Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 7

Hausaufgaben zum 06.06.11

Hausaufgabe 13:(10 Punkte)

Die Pauli-Matrizen

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

sind definiert als

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a.) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[\sigma_i, \sigma_j] \qquad i = 1...3, j = 1...3$$

und die Antikommutatoren

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i.$$

b.) Zeigen Sie dass diese Matrizen die Beziehung

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

erfüllen. Folgern Sie aus dieser Beziehung, dass

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{a} \cdot \vec{b}\mathbf{1} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

c.) Zeigen Sie $e^{i\alpha\sigma_k} = \cos(\alpha) + i\sigma_k \sin(\alpha) \quad \alpha \in \mathbb{C},\ k = 1, 2, 3$

d.) Zeigen Sie, dass jede 2×2 Matrix M in der Form

$$M = m_0\mathbf{1} + \sum_{i=1,2,3} m_i\sigma_i$$

ausdrücken lässt. Bestimmen Sie die Koeffizienten m_0 und m_i.

e.) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von σ_i.

f.) Berechnen Sie

(i) $\sigma_i^\dagger$,

(ii) $\mathrm{Sp}(\sigma_i)$,

(iii) $\det(\sigma_i)$,

(iv) σ_i^{T}

Hausaufgabe 14:(5 Punkte)

Der Zustand eines Teilchens der Masse m werde durch die Wellenfunktion $\varphi(x)$ beschrieben, die eine stationäre Eigenfunktion zum Hamilton-Operator $H = \frac{p_x^2}{2m} + V(x)$ mit den Eigenwert E ist. Es gilt

$$\varphi(x) = Axe^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}}$$

a.) Berechnen Sie die Normierungkonstante A.

b.) Bestimmen Sie mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung das Potential $V(x)$ und die Eigenenergie E. Es gelte $V(0) = 0$.

Blatt 7 Theo 4 Julian Bergmann ~~13~~ 14,5 | 15

H 14

a) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, A^2 x^2 e^{-\frac{x^2}{\gamma^2}} = A^2\left(\underbrace{\left[x^2\left(-\frac{\gamma^2}{2x}\right)e^{-\frac{x^2}{\gamma^2}}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{\to 0} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\left(-\frac{\gamma^2}{2x}\right)e^{-\frac{x^2}{\gamma^2}}\,dx}_{-\frac{\gamma^2}{2}\cdot\sqrt{\pi\gamma^2}}\right)$

$= A^2\cdot\frac{\gamma^2}{2}\cdot\gamma\sqrt{\pi} \overset{!}{=} 1$

$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{\gamma^3\sqrt{\pi}}}$ ✓

b) $E\varphi(x) = H\varphi(x)$

$\Rightarrow E\cdot A x e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(Axe^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}}\right) + V(x)Axe^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}}$

$= -A\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} - x\cdot\frac{2x}{2\gamma^2}e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}}\right) + V(x)Axe^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}}$

$= -A\left(\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{2x}{2\gamma^2}e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} - \frac{2x}{\gamma^2}e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} + \frac{x^3}{\gamma^4}e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}}\right) + \ldots\right.$

$= -A\left(\frac{\hbar^2}{2m}\left(-3\frac{x}{\gamma^2} + \frac{x^3}{\gamma^4}\right)\right)e^{-\frac{x^2}{\gamma^2\cdot 2}} + V(x)Axe^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}}$

$-0{,}5$

$\Rightarrow A \neq 0$ sonst trivial, $x \neq 0$ sonst* trivial, $e^{\cdots} \neq 0$

$\Rightarrow \quad E = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-3\cdot\frac{1}{\gamma} + \frac{x^2}{\gamma^4}\right) + V(x)$

$x = 0 \Rightarrow \quad E = +\frac{\hbar^2}{2m}\cdot 3\cdot\frac{1}{\gamma^2}$ ✓ $\Rightarrow V(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m}\left(-3\cdot\frac{1}{\gamma^2} + \frac{x^2}{\gamma^4}\right)$

ff

$\Rightarrow V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{x^2}{\gamma^4}$

* auch möglich, dann $0 = 0$, also nicht weiterführend. ✓

4,5 | 5

H 13

a)

$[\sigma_1,\sigma_1] = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ✓, $\{\sigma_1,\sigma_1\} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ ✓

$[\sigma_2,\sigma_2] = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ✓, $\{\sigma_2,\sigma_2\} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ ✓

$[\sigma_3,\sigma_3] = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ✓, $\{\sigma_3,\sigma_3\} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ ✓

$[\sigma_1,\sigma_2] = \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2i&0\\0&-2i\end{pmatrix}$ ✓, $\{\sigma_1,\sigma_2\} = \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-i&0\\0&+i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ✓

$[\sigma_2,\sigma_1] = \begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2i&0\\0&-2i\end{pmatrix}$ ✓, $\{\sigma_2,\sigma_1\} = \begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ✓

$[\sigma_1,\sigma_3] = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}$ ✓, $\{\sigma_1,\sigma_3\} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ✓

$[\sigma_3,\sigma_1] = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$ ✓, $\{\sigma_3,\sigma_1\} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ✓

$[\sigma_2,\sigma_3] = \begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2i\\-2i&0\end{pmatrix}$ ✓, $\{\sigma_2,\sigma_3\} = \begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ✓

$[\sigma_3,\sigma_2] = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-2i\\2i&0\end{pmatrix}$ ✓, $\{\sigma_3,\sigma_2\} = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ✓

2 | 2

b) $i=j: \quad \sigma_i\sigma_j = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \mathbb{1}$ (siehe a) $= \underbrace{\delta_{ij}}_{1} + i\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{0}\sigma_k$

$i \neq j$ $\quad$ ijk zyklisch: $\quad \sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} = i\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = i\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{1}\sigma_3 + \delta_{ij} \to 0$

$\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = i\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{1}\sigma_1 + \delta_{ij} \to 0$

$\sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} = i\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{1}\sigma_2 + \delta_{ij} \to 0$

ijk antizyklisch: $\quad \sigma_2\sigma_1 = -\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} = i\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{-1}\sigma_3 + \delta_{ij} \to 0$

$\sigma_3\sigma_2 = -\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix} = i\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{-1}\sigma_1 + \delta_{ij} \to 0$

$\sigma_1\sigma_3 = -\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = i\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{-1}\sigma_2 + \delta_{ij} \to 0$

$\Rightarrow \sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$ ✓

$$
\begin{aligned}
(\vec a\vec\sigma)(\vec b\vec\sigma) &= (a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3)(b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3)\\
&= a_1b_1\sigma_1\sigma_1 + a_2b_2\sigma_2\sigma_2 + a_3b_3\sigma_3\sigma_3\\
&\quad + a_1b_2\sigma_1\sigma_2 + a_2b_3\sigma_2\sigma_3 + a_3b_1\sigma_3\sigma_1\\
&\quad + a_1b_3\sigma_1\sigma_3 + a_2b_1\sigma_2\sigma_1 + a_3b_2\sigma_3\sigma_2\\
&= a_1b_1\mathbb{1} + a_2b_2\mathbb{1} + a_3b_3\mathbb{1}\\
&\quad + a_1b_2 i\sigma_3 + a_2b_3 i\sigma_1 + a_3b_1 i\sigma_2\\
&\quad + a_1b_3(-i\sigma_2) + a_2b_1(-i\sigma_3) + a_3b_2(-i\sigma_1)\\
&= \vec a\vec b\,\mathbb{1}\\
&\quad + i\sigma_1(a_2b_3 - a_3b_2) + i\sigma_2(a_3b_1 - a_1b_3) + i\sigma_3(a_1b_2 - a_2b_1)\\
&= \vec a\vec b\,\mathbb{1} + i\vec\sigma\cdot(\vec a\times\vec b) ✓
\end{aligned}
$$

2/2

c) $e^{i\alpha\sigma_k} = \sum_n^\infty \frac{(i\sigma_k)^n}{n!}\alpha^n = \sum_{n'}^\infty \frac{(i\sigma_k)^{n'}}{n'!}\alpha^{n'} + \sum_{n''}^\infty \frac{(i\sigma_k)^{n''}}{n''!}\alpha^{n''}$ $\quad|$ n': gerade Zahl $\in n$, n'': ungerade Zahl $\in n$

$= \sum_{n'}^\infty (-1)^{n'}\frac{\mathbb{1}}{n'!}\alpha^{n'} + \sum_{n''}^\infty i(-1)^{n''}\frac{\sigma_k}{n''!}\alpha^{n''}$ $\quad|$ $\sigma_k^2 = \mathbb{1}$ ✓

$= \mathbb{1}\cos(\alpha) + i\sigma_k\sin(\alpha)$ ✓

1/1

d) $M = \begin{pmatrix}m_0&0\\0&m_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&m_1\\m_1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&-im_2\\im_2&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}m_3&0\\0&-m_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m_0+m_3 & m_1-im_2\\ m_1+im_2 & m_0-m_3\end{pmatrix}$

$\overset{!}{=} \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m_0+m_3 & m_1-im_2\\ m_1+im_2 & m_0-m_3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$
$m_0+m_3 = a$
$m_1-im_2 = b$
$m_1+im_2 = c$
$m_0-m_3 = d$

$\Rightarrow$
$m_0 = a-m_3$
$m_0 = d+m_3$
$m_1 = b+im_2$
$m_1 = c-im_2$

$\Rightarrow m_0 = \frac{1}{2}(a+d)$ ✓
$m_3 = \frac{1}{2}(a-d)$ ✓
$\Rightarrow m_1 = (b+c)\cdot\frac{1}{2}$ ✓
$m_2 = (c-b)\cdot\frac{1}{2}i$ ✓

1/1

e) $i=1: \quad \det(\sigma_x - \mathbb{1}\lambda) = 0 = \begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$ ✓

$\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix}b-a=0\\a-b=0\end{matrix} \Rightarrow a=b \overset{!}{=} 1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ✓

~~$i=2: \det(\sigma_y - \mathbb{1}\lambda) = 0 = \begin{vmatrix}-\lambda&-i\\i&-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$~~

$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix}a+b=0\\a+b=0\end{matrix} \Rightarrow a=-b \overset{!}{=} 1 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ✓

2/

$i=2: \det(\sigma_y - \mathbb{1}\lambda) = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$ ✓

$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} a - ib = 0 \\ ia + b = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a - ib = 0 \\ a - ib = 0 \end{matrix} \Rightarrow a = ib \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ✓

$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} -a - ib = 0 \\ ia - b = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -a - ib = 0 \\ a + ib = 0 \end{matrix} \Rightarrow a = -ib \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ✓

$i=3: \det(\sigma_z - \mathbb{1}\lambda) = 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2b = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

f) i) $\sigma_i^\dagger = (\sigma_i^*)^T$: $\sigma_1^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1$, $\sigma_2^T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2$, $\sigma_3^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3$ ✓

ii) $tr(\sigma_i) = \sum_j \sigma_{i_{jj}}$: $tr(\sigma_1) = 0$ ✓, $tr(\sigma_2) = 0$ ✓, $tr(\sigma_3) = 1 - 1 = 0$ ✓

iii) $\det(\sigma_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ ✓

$\det(\sigma_2) = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} = -1$ ✓

$\det(\sigma_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$ ✓

iv) $\sigma_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ✓

2/2

10/10