Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 12

Präsenzaufgaben am 04.07.11, Hausaufgaben zum 11.07.11

Präsenzaufgabe 16:
Ein System mit dem Spin $s = 1/2$ und dem magnetischen Moment $\vec{\mu} = \gamma\vec{s}$ mit $\vec{s} = \hbar\vec{\sigma}/2$ befinde sich in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld $\vec{B}$ mit den Komponenten

$$B_x = B_1 \cos(\omega t)$$

$$B_y = B_1 \sin(\omega t)$$

$$B_z = B_0$$

wobei B_0, B_1 =const. Der Hamiltonoperator des Systems

$$H(t) = -\vec{\mu}\vec{B}(t)$$

ist also zeitabhängig. Die Eigenzustände des Operators σ_z seien $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$. Benutzen Sie $\omega_i = -\gamma B_i$, $i = 0, 1$.

a) Leiten Sie für den Ansatz $\psi(t) = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$ für die Wellenfunktion des Systems ein Gleichungssystem mit zeitabhängigen Koeffizienten für die Entwicklungskoeffizienten $a_\pm$ her.

b) Zeigen Sie, dass der Übergang zu den Koeffizienten $b_\pm(t) = e^{\pm i\omega t/2} a_\pm(t)$ zu einem Gleichungssystem mit *zeitunabhängigen* Koeffizienten führt. Welche physikalische Bedeutung hat diese Transformation?

c) Zeigen Sie, dass die Transformation durch den unitären Operator

$$U = \cos(\omega t/2) + i\sigma_z \sin(\omega t/2) = e^{i\omega t \sigma_z/2}$$

beschrieben wird. Geben Sie die Schrödingergleichung für die transformierte Wellenfunktion $\Phi = U\Psi$ an und berechnen Sie die zugehörigen stationären Lösungen. (Hinweis: Das Gleichungssystem stimmt mit dem in b) hergeleiteten überein!)

d) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im Zustand $\Psi(0) = |+\rangle$ vorgegeben. Berechnen Sie für $t > 0$ die Wahrscheinlichkeiten $P_+(t)$ und $P_-(t)$ für das Auftreten der Zustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ in $\Psi(t)$.

Hausaufgabe 24:(15 P.)
Ein Teilchen bewegt sich in drei Dimensionen in dem Potential

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} m \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2 \right)$$

a) Diskutieren Sie die Symmetrien des Potentials für die Fälle

(i) $\omega_x \neq \omega_y \neq \omega_z$

(ii) $\omega_x = \omega_y \neq \omega_z$

(iii) $\omega_x = \omega_y = \omega_z$

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \sum_i H_i(x_i, p_i)$$

wobei $x_1 = x$, $x_2 = y$ und $x_3 = z$. Geben Sie $H_i(x_i, p_i)$ an.

c) Zeigen Sie, dass der Ansatz $\phi(\vec{r}) = \phi_1(x)\phi_2(y)\phi_3(z)$ die Schrödingergleichung löst.

d) Berechnen Sie das Energiespektrum. Diskutieren Sie die Entartungsgrade für die Fälle unter Punkt a).

Übung 12 Theo 4 Julian Bergmann

14/15

H 24

a) i) Parameter quadratisch, Vorfaktoren unterschiedlich ⇒ komponentenweise Achsensymmetrisch! ✓

ii) $V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\left(w_{xy}^2(x^2+y^2) + w_z^2 z^2\right)$
⇒ Zylindersymmetrisch um z-Achse ✓

iii) $V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\, w_{x,y,z}^2 (x^2+y^2+z^2)$
⇒ Kugelsymmetrisch um 0. ✓

b) $H(\vec{r},\vec{p}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x,y,z)$

$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m w_x^2 x^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m w_y^2 y^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2}m w_z^2 z^2$

$= H_x(x,p) + H_y(y,p) + H_z(z,p) = \sum_{i=1}^{3} H_i(x_i,p)$ ✓

c) $H\phi = E\phi$ ⇒

⇒ $\phi_2(y)\phi_3(z)H_1(x)\phi_1(x) + \phi_1(x)\phi_3(z)H_2(y)\phi_2(y) + \phi_1(x)\phi_2(y)H_3(z)\phi_3(z)$
$= E\phi_1(x)\phi_2(y)\phi_3(z)$

1-D-Oszillator ⇒ $H_i\phi_i = E_i\phi_i$; $i=1,2,3$

⇒ $\phi_2(y)\phi_3(z)E_1\phi_1(x) + \phi_1(x)\phi_3(z)E_2\phi_2(y) + \phi_1(x)\phi_2(y)E_3\phi_3(z)$
$=(E_1+E_2+E_3)\phi_1(x)\phi_2(y)\phi_3(z) = E\vec{\phi}(x,y,z)$ ✓

⇒ Ansatz löst S.G. mit $E = \sum_i E_i$ ✓

d) 1-D-Oszillator: $H_i\phi_i = E_i\phi_i$ mit $E_i = \hbar w_i(n_i+\frac{1}{2})$; $i=1,2,3$

⇒ $E = E_1+E_2+E_3 = \hbar\left(w_1(n_1+\frac{1}{2}) + w_2(n_2+\frac{1}{2}) + w_3(n_3+\frac{1}{2})\right)$ ✓

$(w_1,w_2,w_3 \sim w_x,w_y,w_z)$

iii) $E = \hbar w_{xyz}(n_1+n_2+n_3+\frac{3}{2})$ ✓

mit n_1 fest ergeben sich $N-n_1+1$ Werte für n_2, n_3 fest

⇒ $\sum_{n_x}^{N} N-n_x+1 = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ = Entartungsgrad ✓

i) Nur 1. Energie ⇒ Entartungsgrad = 1

ii) $E = \hbar\left(w_{xy}(n_1+n_2+1) + w_z(n_3+\frac{1}{2})\right)$

n_3 fest ⇒ Entartungsgrad $= \sum_{n_x}^{N}(n_x+n_y) - n_x$
$= \sum_{n_x}^{N} n_y = (N+1)n_y$? woher? −1

wenn du es erklären kannst gebe ich dir den Pkt!