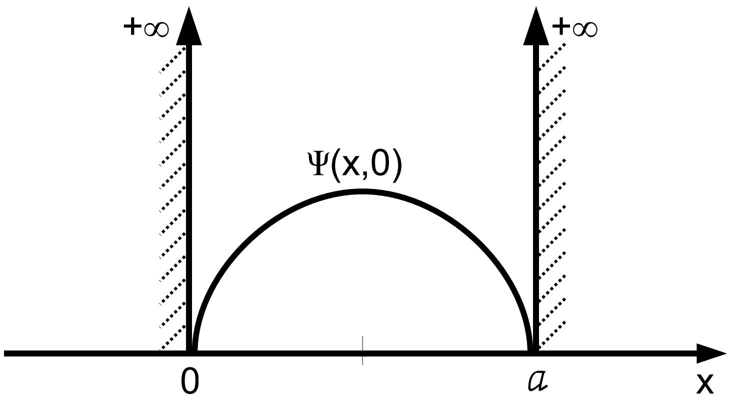
Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 9

Hausaufgaben am 20.6.11
(Abgabetermin: Montag, 20.06.11.)

Hausaufgabe 17:(12 P.)
Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einer Dimension in einem Potential mit unendlich hohen Wänden bei $x = 0$ und $x = a$. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Zustand $\Psi(x, 0) = Ax(x - a)$.



a.) Berechnen Sie die Normierungskonstante A.

b.) Entwickeln Sie $\Psi(x, 0)$ nach dem vollständigen Orthonormalsystem der stationären Eigenfunktionen des unendlich tiefen Topfes.

c.) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen im Grundzustand bzw. nicht im Grundzustand befindet.

d.) Berechnen Sie $\Psi(x, t)$ für beliebige Zeiten $t > 0$.

e.) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t)$, Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x, t)$ für beliebige Zeiten $t > 0$. Zeigen Sie, dass $\rho(x, t) = \rho_s(x) + \rho_t(x, t)$ gilt. Überprüfen Sie explizit, ob die quantenmechanische Kontinuitätsgleichung erfüllt ist.

f.) Berechnen Sie den Mittelwert des Ortsoperators $\langle x\rangle(t)$ und die Schwankung der Energie $\Delta E(t) = [\langle(H^2 - \langle H\rangle^2)\rangle]^{1/2}$.
Mathematische Hinweise: Benutzen Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2m}} = \frac{\pi^{2m}(2^{2m}-1)}{2(2m)!}|B_{2m}|$$

wobei B_{2m} eine Bernoulli-Zahl ist: $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$ etc.

Hausaufgabe 18:(3 P.)

a.) Zeigen Sie, dass $\phi_s(\mathrm{x}) = \delta(\mathrm{x} - \mathrm{s})$ Eigenfunktion zum Ortsoperator x ist. Welcher Eigenwert ergibt sich?

b.) Geben Sie die Eigenzustände des Impulsoperators p_{x} an. Stellen sie $\phi_s(\mathrm{x})$ in der (kontinuierlichen) Basis der Impulseigenzustände dar. Welchen Wert haben die Entwicklungskoeffizienten?

Zusatzaufgabe 5:(10 ZP.)
Konstruieren Sie die Resolvente (Green'sche Funktion) zum Hamilton-Operator eines freien Teilchens der Masse m :

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 .$$

a.) Entwickeln Sie den Resolvente-Operator

$$G = (E + i\eta - H)^{-1} ; \quad (\eta \to 0_+)$$

nach dem vollständigen Satz der stationären Eigenfunktionen zu H. Zeigen Sie, dass dies zur Darstellung

$$G(r, \vec{r}\,') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{E + i\eta - e(k)}$$

führt.

b.) Benutzen Sie $s = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$ und wählen Sie ein Koordinatensystem mit $\vec{k} = k\vec{e}_z$. Führen Sie die Winkelintegration aus.

c.) Berechnen Sie das resultierende Integral mit dem Residuensatz. Zeigen Sie, dass $G(\vec{r}, \vec{r}\,') = G(s)$ gilt und geben Sie die Green-Funktion $G(s)$ an. Skizzieren Sie das Verhalten von $G(s)$ als Funktion von s.