Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 8

Präsenzaufgaben am 06.06.11, Hausaufgabenabgabe in der Vorlesung am Mi, 15.6.

Minitest 5:

M1) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

M2) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix M.

M3) Berechnen Sie die Matrix M^2.

M4) Berechnen Sie die transponierte Matrix M^T und die hermitesch konjugierte Matrix $M^\dagger$.

Präsenzaufgabe 10:
Es seien A, B und C Operatoren im Hilbertraum.

i) Zeigen Sie:

$$[[A,B],C] = [A,[B,C]] - [B,[A,C]]$$

ii) Es gelte

$$[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

Präsenzaufgabe 11:
Gegeben sei die Matrix in der kartesischen Standardbasis

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von L_x.

b) Berechnen Sie die normierten Eigenvektoren von L_x

c) Verifizieren Sie, dass die Eigenvektoren von L_x ein Orthonormalsystem bilden.

d) Drücken Sie die Matrix L_x in der durch die Eigenvektoren von L_x gegebenen Basis aus. Ordnen Sie die neue Basis so an, dass der erste Eigenvektor zum kleinsten, der zweite zum mittleren und der dritte zum höchsten Eigenwert von L_x gehört.

Hausaufgabe 15: (3 P.)
Gegeben seien drei positive, reelle Zahlen x, y und z und es gelte $x + y + z \leq 3$.

Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$$

gilt. (Hinweis: Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)

Hausaufgabe 16:(12 P.)
Gegeben seien zusätzlich zur Matrix L_x aus der Präsenzaufgabe die Matrizen

$$L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Physikalisch sind L_x, L_y, L_z die Drehimpulsoperatoren eines Spin-1-Systems, dargestellt in der kartesischen Standardbasis.

a) Berechnen Sie die Matrizen $L_+ = L_x + iL_y$ und $L_- = L_x - iL_y$.

b) Berechnen Sie $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$.

c) Berechnen Sie die folgenden Kommutatoren und drücken Sie das Ergebnis, sofern dieses nicht die Nullmatrix ist, durch ein Vielfaches einer der Matrizen L_x, L_y, L_z, L_+ und L_- aus:

i) $[L_x, L_y]$ ii) $[L_+, L_-]$ iii) $[L_+, L_z]$ iv) $[L_-, L_z]$ v) $[L^2, L_+]$ vi) $[L^2, L_-]$

d) Berechnen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren von L_y.

e) Prüfen Sie, dass die drei Eigenvektoren von L_y ein Orthonormalsystem bilden.

f) Stellen Sie nun die drei Matrizen L_x, L_y und L_z in der neuen Basis aus den Eigenvektoren von L_y dar. Ordnen Sie die neue Basis so an, dass der erste Eigenvektor zum kleinsten, der zweite zum mittleren und der dritte zum höchsten Eigenwert von L_y gehört.

Zusatzaufgabe 4: (5 ZP.)
Welche Parität haben die Leiteroperatoren $a(x, p_x)$ und $a^\dagger(x, p_x)$ des quantenmechanischen harmonischen Oszillators? Welche Konsequenz lässt sich daraus für die Diagonalelemente in der Matrixdarstellung dieser Operatoren folgern?

Blatt 8 Theo 4 Julian Bergmann

17,5 | 15

H 15

Schwarz: $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$

$\vec{a} := \begin{pmatrix}\sqrt{x}\\ \sqrt{y}\\ \sqrt{z}\end{pmatrix}$, $\vec{b} := \begin{pmatrix}1/\sqrt{x}\\ 1/\sqrt{y}\\ 1/\sqrt{z}\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 3$

$$\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| = \sqrt{\underbrace{x+y+z}_{\leq 3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

$$\Rightarrow 3 \leq \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \Rightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \Rightarrow 3 \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$ ✓

3|3

H 16

a) $L_+ = L_x + iL_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} + \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ ✓

$L_- = L_x - iL_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} - \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}$ ✓ 2|2

b) $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\right)^2\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} + \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\right)^2\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$

$+\hbar^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix} + \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix} + \hbar^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$= \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix} = \hbar^2\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ ✓ 1|1

c) i) $[L_x, L_y] = \frac{\hbar^2}{2}\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right)$

$= \frac{\hbar^2}{2}\left(\begin{pmatrix}i&0&-i\\0&0&0\\i&0&-i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-i&0&-i\\0&0&0\\i&0&i\end{pmatrix}\right) = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}2i&0&0\\0&0&0\\0&0&-2i\end{pmatrix} = i\hbar^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

$= i\hbar L_z$ ✓

ii) $[L_+, L_-] = \frac{\hbar^2}{2}\left(\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\right)$

$= \frac{\hbar^2}{2}\left(\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\right) = 2\hbar^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = 2\hbar L_z$ ✓

iii) $[L_+, L_z] = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\right) = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)$

$= \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix} = -\hbar L_+$ ✓

iv) $[L_-, L_z] = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}\right) = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-2&0\end{pmatrix}\right)$

$= \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix} = \hbar L_-$ ✓

v) $[L^2, L_+] = \frac{\hbar^3}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right) = \frac{\hbar^3}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}0&4&0\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&4&0\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\right)$

$= 0$ ✓

vi) $[L^2, L_-] = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right) = \frac{\hbar^3}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\4&0&0\\0&4&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0\\4&0&0\\0&4&0\end{pmatrix}\right)$

$= 0$ ✓ 3|3

d) $\det\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{i\hbar}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{i\hbar}{\sqrt2} & -\lambda & -\frac{i\hbar}{\sqrt2} \\ 0 & \frac{i\hbar}{\sqrt2} & -\lambda \end{pmatrix}\right) \stackrel{!}{=} 0 = \frac{\hbar}{\sqrt2}\left(-\lambda^3 + \hbar^2\lambda\right) \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm\hbar$ ✓ ✓

$\lambda_1 = 0:\ \frac{\hbar}{\sqrt2}\begin{pmatrix} -0 & -i & 0 \\ i & -0 & -i \\ 0 & i & -0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -ib = 0 \\ ib = 0 \\ ia - ic = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = c \\ b = 0 \end{matrix} \Rightarrow \vec v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

$\lambda_2 = \hbar:\ \begin{pmatrix} -\hbar & -\frac{i\hbar}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{i\hbar}{\sqrt2} & -\hbar & -\frac{i\hbar}{\sqrt2} \\ 0 & \frac{i\hbar}{\sqrt2} & -\hbar \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ~~$-\hbar a - ib = 0$, $ia - \hbar b - ic = 0$, $ib - \hbar c = 0$ ⇒ $a = \ldots$, $b = \ldots$~~

$\Rightarrow \begin{matrix} -\hbar a - i\frac{\hbar}{\sqrt2} b = 0 \\ i\frac{\hbar}{\sqrt2} a - \hbar b - i\frac{\hbar}{\sqrt2} c = 0 \\ i\frac{\hbar}{\sqrt2} b - \hbar c = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow a = -\frac{i}{\sqrt2} b = -c \\ \Rightarrow +\frac{\hbar}{2} b - \hbar b + \frac{\hbar}{2} b \equiv 0 \\ \Rightarrow c = +\frac{i}{\sqrt2} b \end{matrix} \quad \Rightarrow \vec v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt2} \\ 1 \\ \frac{i}{\sqrt2} \end{pmatrix}$ ✓

$\lambda_3 = -\hbar:\ \begin{pmatrix} \hbar & -i\frac{\hbar}{\sqrt2} & 0 \\ i\frac{\hbar}{\sqrt2} & \hbar & -i\frac{\hbar}{\sqrt2} \\ 0 & i\frac{\hbar}{\sqrt2} & \hbar \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \hbar a - i\frac{\hbar}{\sqrt2} b = 0 \\ i\frac{\hbar}{\sqrt2} a + \hbar b - i\hbar\frac{1}{\sqrt2} c = 0 \\ i\frac{\hbar}{\sqrt2} b + \hbar c = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow a = \frac{i}{\sqrt2} b \\ -\frac{\hbar}{2} b + \hbar b - \frac{\hbar}{2} b = 0 \\ \Rightarrow c = -\frac{i}{\sqrt2} b \end{matrix}$

$\Rightarrow \vec v_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt2} \\ 1 \\ -\frac{i}{\sqrt2} \end{pmatrix}$ ✓

Normierung: $\vec v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$, $\vec v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix}$ ✓ $\vec v_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$ ✓

waren sie schon!

2/2

e) $\vec v_1 \cdot \vec v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ 0 \\ 1/\sqrt2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt2} + \frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt2} = 0$ ✓ $\quad \|\vec v_1\| = \frac12 + \frac12 = 1$ ✓

$\vec v_1 \cdot \vec v_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ 0 \\ 1/\sqrt2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ 1/\sqrt2 \\ -i/2 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt2} - \frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt2} = 0$ ✓ $\quad \|\vec v_2\| = \frac14 + \frac12 + \frac14 = 1$ ✓

$\vec v_2 \cdot \vec v_3 = \begin{pmatrix} -i/2 \\ 1/\sqrt2 \\ i/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i/2 \\ 1/\sqrt2 \\ +i/2 \end{pmatrix} = +\frac{i^2}{4} + \frac12 + \frac{i^2}{4} = \frac12 - \frac14 - \frac14 = 0$ ✓ $\quad \|\vec v_3\| = \frac14 + \frac12 + \frac14 = 1$ ✓

1/1

f) $M^{B'}_{B} = \begin{pmatrix} i/2 & \frac{1}{\sqrt2} & -i/2 \\ 1/\sqrt2 & 0 & 1/\sqrt2 \\ -i/2 & \frac{1}{\sqrt2} & i/2 \end{pmatrix}$, $\quad M^{B}_{B'}:\ \left(\begin{matrix} i/2 & 1 & -i/2 \\ 1/\sqrt2 & 0 & 1/\sqrt2 \\ -i/2 & 1 & i/2 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \sim \underbrace{\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{\sqrt2} & +\frac{i}{2} \\ \frac12 & 0 & \frac12 \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{i}{2} \end{matrix}\right)}_{M^B_{B'}}$ ✗

$L_{z,neu} = M^{B'}_{B}\, L_{z,alt}\, M^{B}_{B'} = \begin{pmatrix} i/2 & 1 & -i/2 \\ 1/\sqrt2 & 0 & 1/\sqrt2 \\ -i/2 & 1 & i/2 \end{pmatrix} \cdot \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i/2 & 1/\sqrt2 & i/2 \\ 1/\sqrt2 & 0 & \frac{1}{2} \\ i/2 & 1/\sqrt2 & -i/2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} i/2 & 1 & -i/2 \\ 1/\sqrt2 & 0 & 1/\sqrt2 \\ -i/2 & 1 & i/2 \end{pmatrix} \cdot \hbar\begin{pmatrix} -i/2 & 1/\sqrt2 & i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i/2 & -1/\sqrt2 & i/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt2 & 0 \\ -i/\sqrt2 & 0 & i/\sqrt2 \\ 0 & -i/\sqrt2 & 0 \end{pmatrix}\hbar$ ✗

~~III~~ $L_{x,neu} = M^{B'}_{B} L_{x,alt} M^{B}_{B'} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i/2 & 1 & -i/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -i/2 & 1 & i/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i/2 & 1/\sqrt{2} & i/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ i/2 & 1/\sqrt{2} & -i/2 \end{pmatrix}$

$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i/2 & 1 & -i/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -i/2 & 1 & i/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{\hbar}{\sqrt{2}}$

$= \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ f $L_y = ?$ 0,5 | 3

Zusatz 4:

$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{1}{m\omega}p\right) \qquad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{1}{m\omega}p\right)$

$a^+(-x,-p) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(-x + i\frac{1}{m\omega}p\right) = -\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(+x - \frac{i}{m\omega}p\right) = -a^+(x,p)$

$a(-x,-p) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(-x - i\frac{1}{m\omega}p\right) = -\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{1}{m\omega}p\right) = -a(x,p)$

$\Rightarrow$ a, a^+ ungerade Parität $\Rightarrow$ Diagonale $= 0$ ✓

$a^+ = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \sqrt{1} & 0 & & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \ddots & \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \ddots \end{pmatrix}$ ✓ $\qquad a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \\ & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ & & 0 & \ddots \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$ ✓

5 | 5