Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 5

Präsenzaufgaben am 16.05.11, Hausaufgaben zum 23.05.11

Minitest 1: (15 min)
Berechnen Sie für $f(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$

M1) $|f(x)|$

M2) $Imf(x)$, $Ref(x)$

M3) $\ln f(x)$

M4) $f^*(x)$, $\frac{1}{f(x)}$

Präsenzaufgabe 7:
Elektronen bewegen sich in Materialen typischerweise in einem periodischen Potential , dessen Struktur durch die Gitterplätze der Ionen bestimmt wird. Wir betrachten die Bewegungen in einer Raumdimension (z.B. entlang einer Gitter-Kette von Kristall-Ionen).

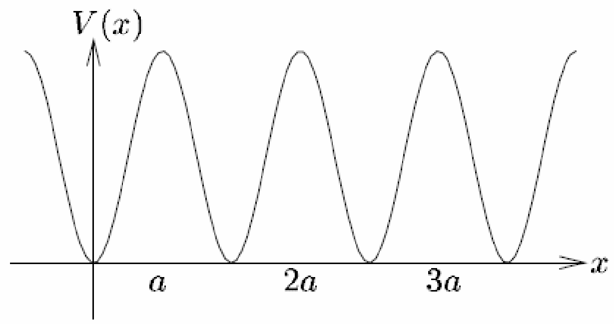


Abb. Periodisches Potential mit Gitterkonstante a.

Es gelte $V(x+a) = V(x)$ mit der "Gitterkonstanten"a. Es sollen stationäre Zustände $\varphi(x)$ in $V(x)$ untersucht werden.

a.) Welche Symmetrie besitzt der zugehörige Hamiltonoperator?

b.) Der (räumliche) Translationsoperator T_a ist definiert durch die Relation $T_a f(x) = f(x+a)$ für beliebige (stetige) Funktionen $f(x)$. Was gilt dann für $T_a H\varphi(x)$? Zeigen Sie, dass $[H, T_a] = 0$ gilt. Was folgt daraus für die Eigenfunktionen von H?

c.) Zeigen Sie, dass $\varphi(x+a) = e^{\frac{i}{\hbar}ap}\varphi(x)$ gilt. Was folgt damit für die explizite Form von T_a?

d.) Die Eigenwerte λ_a von T_a seien als $\lambda_a = e^{ika}$ gegeben. Es gelte $u_k(x) = e^{-ikx}\varphi(x)$. Zeigen Sie, dass $T_a u_k(x) = u_k(x)$ invariant unter der Translation T_a ist.

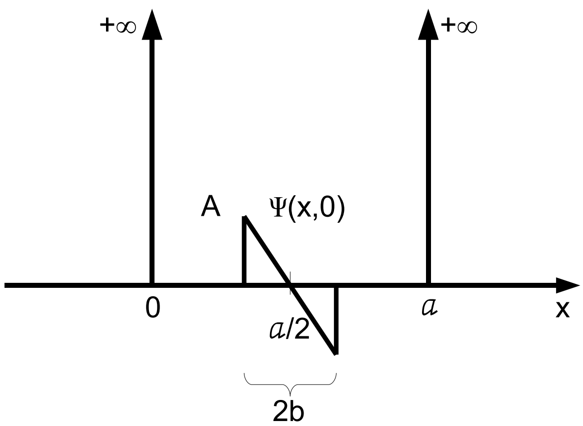
e.) Warum genügt es, die Lösungen in der ersten Brillouin-Zone $-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}$ zu betrachten?

Die Funktionen $\varphi(x) = e^{ikx}u_k(x)$ mit $k \in R$ heißen **Bloch-Wellen**. Es sind ebene Wellen, die durch eine periodische Funktion $u(x)$ mit der Periode des Potentials moduliert werden.

Hausaufgabe 10: (9 Punkte)
Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m bewegt sich in einer räumlichen Dimension in einem Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden bei $x = 0$ und $x = a$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen in folgendem Zustand:

$$\Psi(x,0) = A\Theta(x - (\frac{a}{2} - b))\Theta(\frac{a}{2} + b - x)(\frac{a}{2} - x)\frac{1}{b}$$

wobei A eine Normierungskonstante ist und $b < \frac{a}{2}$ gilt (siehe Zeichnung).



a.) Berechnen Sie die Normierungskonstante A.

b.) Geben Sie die normierten Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ und Energie-Eigenwerte E_n des unendlichen tiefen Potentialtopfs an. Welche Symmetrie liegt vor?

c.) Entwickeln Sie $\Psi(x, 0)$ nach dem vollständigen System $\{\varphi_n\}_{n=1..\infty}$, d.h.

$$\begin{aligned} \Psi(x,0) &= \sum_{1\leq n\leq\infty} c_n\varphi_n(x) \\ c_n &= \int_0^{+a} dx\varphi_n(x)\Psi(x,0) \end{aligned}$$

Wie verhalten sich die Koeffizienten als Funktion der Quantenzahl n? Warum verschwinden die Koeffizienten $c_{2k+1} \equiv 0$? Skizzieren und diskutieren Sie das Verhalten von c_n für $n \to \infty$.

d.) Geben Sie $\Psi(x,t)$ für belebige Zeiten $t \neq 0$ an.

Hausaufgabe 11: (6 Punkte)
Gegeben sei ein Potential $V(x)$ der Form:

$$V(x) \quad = \quad \begin{cases} \infty & x \leq 0 \\ -V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

a.) Geben Sie die Schrödinger-Gleichung und die allgemeinen vollständigen Lösung der resultieren Differentialgleichung für $E > 0$ und $E < 0$.

b.) Wie lauten die Randbedingunen für gebundene stationäre Zustand $\phi(x)$ bei $x = 0$, $x = a$ und $x \to +\infty$?

c.) Leiten Sie die Eigenwertgleichung für gebundene Zustände her.

d.) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte sich als Schnittpunkte zweier Funktionen ergeben. Skizzieren Sie die beiden Funktionen.

Zusatzaufgabe 3: (3 Punkte)
Berechnen Sie das Integral

$$\Theta(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k - i\varepsilon} dk$$

mit Hilfe des Residuensatzes.