Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 3

Präsenzaufgaben am 02.05.11, Hausaufgaben zum 09.05.11

Minitest 1: (15 min)

M1) Geben Sie die vollständige Lösung der Differentialgleichung $f''(x) - k^2 f(x) = 0$ an.

M2) Berechnen Sie folgende Integrale:

(i) $4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \, \exp(-2ar)$,

(ii) $\int_{-2}^{+5} (x^2 - 5x + 6)\, \delta(x-3)\, dx$,

(iii) $\int_0^\infty dx\, \delta(\sin 2\pi x)\, \exp(-x)$,

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta''(x - x_0)\, \exp(-x^2)$.

Präsenzaufgabe 3:

Berechnen Sie für ein 1-D freies ebenes Wellenpaket die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ und Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x,t)$.
Ist die quantenmechanische Kontinuitätsgleichung erfüllt?

Präsenzaufgabe 4:

a.) Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x-y)\, \delta(x-z) = \delta(y-z)$$

Hint: Betrachten Sie die Funktionen $\delta(x-y)$ und $\delta(x-z)$ als zwei quadratische Funktionen mit der Breite ε und der Höhe $1/\varepsilon$, zentriert bei $x = y$ bzw. $x = z$.

b.) Benutzen Sie die Definition von $\delta(x)$ als Grenzwert einer normierten Gauß-Funktion

$$G(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2a^2}$$

um zu zeigen, dass die n-te Ableitung von $\delta(x)$:

$$\delta^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n \delta(x)}{dx^n}$$

als Grenzwert eine glatt Funktion gewonnen werden kann. Diskutieren Sie die entsprechenden Ausdrücke für $n = 1, 2$.

Hausaufgabe 6: (9 Punkte)
Gegeben ist $\psi(x) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$.

a.) Bestimmen Sie $\mathcal{N}$ aus der Normierungsbedingung $\int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi(x)|^2 = 1$.

b.) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\psi(p)$. Wieso ist auch diese normiert?

c.) Berechnen Sie:

(i) die Erwartungswerte für $n = 1, 2$

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*(x)\ x^n\ \psi(x),$$

$$\langle p^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi}\psi^*(p)\ p^n\ \psi(p)$$

d.) Beweisen Sie die folgenden Relationen:

(i) $[x, p^n] = \alpha\, n\, p^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $[p, f(x)] = \alpha f'(x)$ für eine beliebige Funktion $f(x)$

und bestimmen Sie die Konstante α.

e.) Berechnen Sie die Schwankungen

$$(\triangle x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$
$$(\triangle p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

Hausaufgabe 7: (6 Punkte)
Betrachten Sie die Funktionenfolge von Lorentz-Kurven für $x, x_0 \in \mathbb{R}$

$$l_n = A\frac{1}{(x-x_0)^2 + w_n^2}$$

mit $w_n = w_0/n$ und $n \in \mathbb{N}$.

a.) Berechnen Sie die Normierungskonstante A. Skizzieren Sie das Verhalten von $l_n(x, x_0)$ für $n >> 1$.

b.) Zeigen Sie, dass $l_n(x, x_0) \to \delta(x - x_0)$ für $n \to \infty$ gilt, indem Sie die beiden definierenden Eigenschaften der δ-Funktion nachweisen.

Zusatzaufgabe 1: (5 Punkte)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Blatt 3 Theo 4 Julian Bergmann 19|15

H6

a) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, N^2 \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot \sigma N^2 \exp(-z^2)$

$z := \frac{x-x_0}{\sigma} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sigma} = dx = dz \cdot \sigma$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x)|^2 = N^2 \sigma \sqrt{\pi} \overset{!}{=} 1 \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{\sigma}}$ ✓

b) $\Psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi(x) e^{+ipx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-ipx)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{\sigma}} \exp\left(\frac{-x^2+2xx_0-x_0^2-2ipx\sigma^2}{2\sigma^2}\right)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{\sigma}} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\left(x^2-2x(x_0-ip\sigma^2)+x_0^2\right)\right)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-(x_0-ip\sigma^2))^2-(x_0-ip\sigma^2)^2+x_0^2\right)\right)$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{\sigma}} \cdot \exp\left(((x_0-ip\sigma^2)^2-x_0^2)\cdot\frac{1}{2\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left((x-(x_0-ip\sigma^2))^2\right)\right)$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{\sigma}} \cdot \exp\left(((x_0-ip\sigma^2)^2-x_0^2)\cdot\frac{1}{2\sigma^2}\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot \sqrt{2}\sigma \exp(-z^2)}_{=\sqrt{2\pi}\sigma}$

$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{\pi}} \cdot \sqrt{2} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma}} \cdot \exp\left((\cancel{2}x_0 ip\sigma^2 + i^2p^2\sigma^4)\cdot\frac{1}{2\sigma^2}\right)$

$= \sqrt[4]{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sigma} \cdot \exp\left(+ix_0p - \frac{p^2\sigma^2}{2}\right)$ ✓ warum? -0,5

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, |\Psi|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \Psi^*(p)\Psi(p) = \frac{2\sigma\sqrt{\pi}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \exp(-p^2\sigma^2) = \frac{2\sigma\sqrt{\pi}}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} = 1$

c) $i=1$: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi^*(x)\, x\, \Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}\right)$

$z := \frac{x-x_0}{\sigma} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sigma} \Rightarrow dx = \sigma dz \Rightarrow x = z\sigma + x_0$

$\Rightarrow \dots = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \sigma \frac{z\sigma+x_0}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp(-z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\underbrace{z\sigma}_{\text{ungerade}} \underbrace{\exp(-z^2)}_{\text{gerade}} + x_0 \underbrace{\exp(-z^2)}_{\to\sqrt{\pi}}\right)$

ungerade $\Rightarrow \int_{-a}^{a}\dots = 0$

$= \frac{x_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = x_0$ ✓

$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \Psi^*(p)\, p \cdot \Psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \frac{1}{2\pi} \cdot 2\sigma\sqrt{\pi} \cdot \underbrace{\exp(-p^2\sigma^2)}_{\text{gerade}} \cdot \underbrace{p}_{\text{ungerade}}$

$\Rightarrow \int_{-a}^{a}\dots = 0$

$= 0$ ✓

$i=2$: $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \sigma \frac{(z\sigma+x_0)^2}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp(-z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\underbrace{\exp(-z^2)}_{\text{gerade}}(\underbrace{2z\sigma x_0}_{\text{ungerade} \Rightarrow = 0} + \underbrace{x_0^2}_{\text{fest}} + \underbrace{z^2\sigma^2}_{\text{gerade}})\right)$

$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^2\sigma^2 \exp(-z^2)\right) + \frac{x_0^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = x_0^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^2 \cdot -\frac{1}{2}(-2)z\exp(-z^2)\cdot z$

$= x_0^2 + \left(\left[\underbrace{z}_{\text{ungerade}} \underbrace{\exp(-z^2)}_{\text{gerade}}\right]_{-\infty}^{\infty} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2)dz}_{\to\sqrt{\pi}}\right) \cdot \left(-\frac{\sigma^2}{2\sqrt{\pi}}\right)$

$\Rightarrow = 0$

$= x_0^2 + \frac{\sigma^2}{2}$ ✓

$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \frac{1}{2\pi} \cdot 2\sigma\sqrt{\pi} \exp(-p^2\sigma^2) \cdot p^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \left(\frac{-\sqrt{\pi}}{2\pi\sigma}\right) p \cdot (-2p\sigma^2) \exp(-p^2\sigma^2)$

$= \left(\frac{-\sqrt{\pi}}{2\pi\sigma}\right)\left(\left[p \cdot \exp(-p^2\sigma^2)\right]_{-\infty}^{\infty} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-p^2\sigma^2)\, dp}_{\to\sqrt{\pi}/\sigma}\right)$

$= \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi\sigma}\right)\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma}\right) = \frac{1}{2\sigma^2}$ ✓

$\Rightarrow$

d) i) $[x, p^n] = xp^n - p^n x \Rightarrow [x, p^n]\Psi = x\left((-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}\Psi\right) - (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}\Psi x$

$= x(-i\hbar)^n \frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n} - (-i\hbar)^n\left(n \frac{\partial^{n-1}\Psi}{\partial x^{n-1}} + x \frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n}\right)$

$= x(-i\hbar) \frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n} - x(-i\hbar)^n \frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n} - (-i\hbar)^n \cdot n \frac{\partial^{n-1}\Psi}{\partial x^{n-1}} = \underset{\alpha}{i\hbar} \cdot \underset{n}{n} \cdot \underbrace{(-i\hbar)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}}_{p^{n-1}} \Psi$ ✓

ii) $[p, f(x)] = p f(x) - f(x) p \Rightarrow [p, f(x)]\Psi = (-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x} f(x)\Psi - f(x)(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}\Psi$

$= (-i\hbar)\cdot\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x)\right)\cdot\Psi + f(x)\frac{\partial}{\partial x}\Psi\right) - f(x)\cdot(-i\hbar)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Psi$

$= \underset{\alpha}{(-i\hbar)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x)\right)}_{f'} \cdot \Psi$ ✓

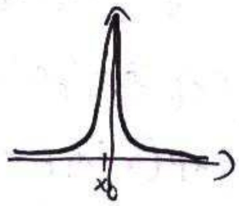
e) $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = x_0^2 + \frac{\sigma^2}{2} - x_0^2 = \frac{\sigma^2}{2}$ ✓ 8,5 | 9

$(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{1}{2\sigma^2} - 0 = \frac{1}{2\sigma^2}$ ✓

H 2

a) $1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{A}{(x-x_0)^2 + w_n^2} = \frac{1}{w_n^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{A}{\frac{(x-x_0)^2}{w_n^2}+1} = \frac{1}{w_n^2}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, A \cdot \underset{\frac{d}{dz}\arctan(z)}{\frac{1}{z^2+1}}\, w_n = \frac{A}{w_n}\underset{\pi}{\left[\arctan(z)\right]_{-\infty}^{\infty}}$

$= \frac{A\pi}{w_n} \Rightarrow A = \frac{w_n}{\pi}$ ✓

$\Rightarrow$ 

Achsenbeschriftung −0,5

b) 1) $\lim_{w_n \to 0} \frac{w_n}{\pi} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^2 + w_n^2} = \text{„}0\text{"} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^2 + \text{„}0\text{"}^2} = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases}$ ✓

2) $\lim_{w_n \to 0} \int_\alpha^\beta \frac{w_n}{\pi} \frac{dx}{(x-x_0)^2 + w_n^2} = \lim_{w_n \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\alpha-x_0}{w_n}}^{\frac{\beta-x_0}{w_n}} dz \frac{1}{z^2+1} = \lim_{w_n \to 0} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left[\arctan(z)\right]_{\frac{\alpha-x_0}{w_n}}^{\frac{\beta-x_0}{w_n}}$

mit $\alpha < x_0 < \beta$ folgt: $\frac{\beta - x_0}{w_n} \xrightarrow[w_n \to 0]{} \infty$, $\frac{\alpha - x_0}{w_n} \xrightarrow[w_n \to 0]{} -\infty$

$\ldots = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ ✓ 5,5 | 6

Z 1

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{g(x)}{h(x)}$ $\begin{matrix}\to \text{grad} = 0 \\ \text{grad} = 2\end{matrix}$, $h(c) = 0 \Rightarrow c = \pm i$. Wir betrachten nur oberen Halbkreis in kplxer Ebene! $\Rightarrow c = i$

$\mathrm{Res}_f(c) = \frac{g(c)}{h'(c)} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left(\sum_c \mathrm{Res}_f(c)\right) \cdot 2\pi i = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{2}\right)$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$ ✓ 5 | 5