Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 11

Präsenzaufgaben am 27.06.11, Hausaufgaben zum 04.07.11

Minitest 7: Gegeben ist der 2-D Zustandsraum $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$:

$$\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2\,; \quad P_i = |a_i\rangle\langle a_i|.$$

a.) Berechnen Sie P_i^2.

b.) Berechnen Sie $P_i^\dagger$.

c.) Berechnen Sie $P_1 P_2$.

d.) Es gelte der Isomorphismus zum $\mathbb{R}^2$ $|a_i\rangle \mapsto \vec{e}_i$. Geben Sie P_1 in Matrixform an.

Präsenzaufgabe 14:

a.) Zeigen Sie, dass gilt

$$[\vec{L}^2, L_i] = 0$$

für $i = x, y, x$ und die Komponenten $L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$ des Drehimpulsoperator $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Hier ist ϵ_{ijk} der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor.

b.) Berechnen Sie die Kommutatoren: $[L_i, L_j]$, $[\vec{L}^2, r_i]$ und $[\vec{L}^2, \vec{p}^2]$.

c.) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator für ein Teilchen in einem Zentralpotential

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$

mit dem Drehimpulsoperator $\vec{L}$ kommutiert.

Präsenzaufgabe 15:
Der Hamiltonoperator eines Teilchens der Masse m sei gegeben durch

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}), \quad \text{mit} \quad U(\vec{r}) = U^\dagger(\vec{r}) = U^*(\vec{r}).$$

Beweisen Sie das sogenannte Ehrenfest Theorem: Die zeitliche Entwicklung der Mittelwerte von QM-Operatoren folgt den klasssischen Bewegungsgleichungen, d.h

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{r}\rangle = \frac{1}{m}\langle\vec{p}\rangle$$
$$\frac{d}{dt}\langle\vec{p}\rangle = -\langle\vec{\nabla}U(\vec{r})\rangle. \tag{1}$$

Gehen Sie wie folgt vor, um Gleichung (1) zu beweisen:

a.) Geben Sie die Schrödinger-Gleichungen für die Wellenfunktionnen $\Psi(\vec{r}, t)$ und $\Psi^*(\vec{r}, t)$ an.

b.) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren $\vec{r}$ und $\vec{p}$.

c.) Berechnen Sie die 1. und 2.Zeitableitung der Erwartungswerte der Operatoren $\vec{r}$ und $\vec{p}$.

d.) Benutzen Sie die Schrödinger-Gleichungen und $[\vec{p}, f(\vec{r})] = -i\hbar\vec{\nabla} f(\vec{r})$ um zu zeigen, dass die Erwartungswerte quantenmechanischer Observablen den klassischen Bewegungsgleichungen gehorchen.

Hausaufgabe 22: (4 P.)

Durch $|a_1\rangle, |a_2\rangle$ sei in einem 2-D komplexen Hilbertraum eine orthonormierte Basis gegeben (Basis der $\{a\}$-Darstellung). Zwei Vektoren $|b_1\rangle, |b_2\rangle$ seien durch

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle + i|a_2\rangle)\,, \quad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle - i|a_2\rangle)$$

gegeben.

a.) Zeigen Sie, dass die Vektoren $|b_1\rangle, |b_2\rangle$ ebenfalls eine orthonormierte Basis (Basis der $\{b\}$-Darstellung) bilden.

b.) Welche Vektoren sind den Ketvektoren $|a_1\rangle, |a_2\rangle, |b_1\rangle, |b_2\rangle$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet?

c.) Welche Vektoren sind den Bravektoren $\langle b_1|, \langle b_2|$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet und wie schreiben sich die inneren Produkte $\langle b_1|b_1\rangle$, $\langle b_1|b_2\rangle$ und $\langle b_2|b_2\rangle$ als Matrizenprodukte?

d.) Welche Vektoren sind den Ketvektoren $|a_1\rangle, |a_2\rangle$ in der $\{b\}$-Darstellung zugeordnet?

Hausaufgabe 23: (11 P.)

Ein Neutron mit Spin $s = 1/2$, der Masse M und dem magnetischen Moment $\vec{\mu} = \frac{1}{2} g_s \mu_N \vec{\sigma}$, das durch das Kernmagneton $\mu_N = \frac{e_0\hbar}{2M} = 5.05078324(13) \times 10^{-27}$ J/T mit der Elementarladung e_0 und dem g-Faktor $g_s = -3.8263...$ gegeben ist, befindet sich in einer magnetischen Falle, deren Einfluss näherungsweise durch ein Oszillatorpotential

$$V(x) = \hbar\omega_0 \left(\frac{x}{\beta_0}\right)^2$$

beschrieben werde. Zusätzlich wirkt in der Falle das Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ mit $B = B(x) = b_0 + b_1 x$ und den reellen Konstanten $b_{0,1}$.

a.) Geben Sie den Hamilton-Operator $H = H_0 + H_B$ für die kombinierte Bewegung in der Falle (H_0) und im Magnetfeld B (H_B) an. Was ergibt sich für $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$?

b.) Welche Struktur haben die zugehörigen stationären Eigenfunktionen $\psi(x,t)$?

c.) Zeigen Sie, dass sich Neutronen mit magnetischen Quantenzahlen $m = \pm 1/2$ in den verschobenen Oszillatorpotentialen

$$U_\pm(x) = W_\pm + \hbar\omega \left(\frac{x - x_\pm}{\beta} \right)^2$$

bewegen.

d.) Berechnen Sie die Konstanten $W_\pm$ und $x_\pm$ sowie ω und β.

e.) Berechnen Sie die Grundzustandsenergien $E_0^\pm$ und die zugehörigen Eigenfunktionen $\psi_{\pm,0}(x)$ des Neutrons. Skizzieren und diskutieren Sie $\psi_{\pm,0}(x)$.

Übungsblatt 11 Theo 4 Julian Bergmann

15|15

H 22

a) $|b_1\rangle$ orthogonal zu $|b_2\rangle$:

$\langle b_1|b_2\rangle = \frac{1}{2}\cdot(\langle a_1| + i\langle a_2|)(|a_1\rangle - i|a_2\rangle)$

$= \frac{1}{2}(\underbrace{\langle a_1|a_1\rangle}_{1} - \underbrace{\langle a_2|a_2\rangle}_{1} - i\underbrace{\langle a_2|a_1\rangle}_{=0} - i\underbrace{\langle a_1|a_2\rangle}_{=0})$ da a_1, a_2 orthogonal

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ✓

$|b_1\rangle$ normiert:

$\langle b_1|b_1\rangle = \frac{1}{2}(\langle a_1| - i\langle a_2|)(|a_1\rangle + i|a_2\rangle)$

$= \frac{1}{2}(\langle a_1|a_1\rangle + i\langle a_1|a_2\rangle - i\langle a_2|a_1\rangle + \langle a_2|a_2\rangle)$

$= \frac{1}{2}\cdot(1+1) = 1$ ✓

$|b_2\rangle$ normiert:

$\langle b_2|b_2\rangle = \frac{1}{2}(\langle a_1| + i\langle a_2|)(|a_1\rangle - i|a_2\rangle)$

$= \frac{1}{2}(\langle a_1|a_1\rangle + i\langle a_2|a_1\rangle - i\langle a_1|a_2\rangle + \langle a_2|a_2\rangle)$

$= \frac{1}{2}(1+1) = 1$ ✓

$\Rightarrow$ $|b_1\rangle, |b_2\rangle$ bilden orthonormale Basis ✓

b) $|a_1\rangle \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_a$, ✓ $|a_2\rangle \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_a$ ✓

$\Rightarrow$ $|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle + i|a_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}_a$ ✓

$|b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle - i|a_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}_a$ ✓

c) $\langle b_1| = |b_1\rangle^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)_a$ ✓

$\langle b_2| = |b_2\rangle^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)_a$ ✓

$\langle b_1|b_1\rangle = \frac{1}{2}(1, -i)\cdot\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = 1$ ✓

$\langle b_1|b_2\rangle = \frac{1}{2}(1, -i)\cdot\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = 0$ ✓

$\langle b_2|b_2\rangle = \frac{1}{2}(1, i)\cdot\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = 1$ ✓

d) Transformationsmatrix: $C_{kj} = \langle a_k|b_j\rangle$

$\Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\1 & -i\end{pmatrix}$

$\cancel{C^+|a_1\rangle_a C = |a_1\rangle_b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\1 & +i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\i & -i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

$|a_1\rangle_b = C|a_1\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ✓

$|a_2\rangle_b = C|a_2\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\\+i\end{pmatrix}$ ✓

4|4

HZ3

a) $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(x) + V_B(x)$

$V(x) = \hbar\omega_0 \left(\frac{x}{\beta}\right)^2$, $V_B(x) = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\frac{1}{2} g_s \mu_N \vec{\sigma}\cdot\vec{B} = -\frac{1}{2} g_s \mu_N \vec{\sigma}_z \cdot \vec{B}_z$

$= -\frac{1}{2} g_s \mu_N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (b_0 + b_1 x)$

$\Rightarrow H = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + \hbar\omega_0 \left(\frac{x}{\beta}\right)^2\right) \cdot \underset{\text{Dimensionsanpassung}}{\mathbb{1}} + \left(-\frac{1}{2}\right) g_s \mu_N \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (b_0 + b_1 x)$

$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\cdot \mathbb{1} + \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 \left(\frac{x}{\beta_0}\right)^2 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_0\left(\frac{x}{\beta_0}\right)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} g_s \mu_N (b_0 + b_1 x) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} g_s \mu_N (b_0 + b_1 x) \end{pmatrix}$

$\vec{\nabla}\vec{B} = \frac{\partial}{\partial z} B_z(x) = \frac{\partial}{\partial z} b_0 + \frac{\partial}{\partial z} b_1 x = 0$ ✓ H_0 ? H_B ?

b) H diagonal ⇒ $\varphi_\uparrow = \varphi_+$ und $\varphi_\downarrow = \varphi_-$ entkoppelt.
Potential wie verschobener harmonischer Oszillator
⇒ $\psi_{\pm,n}(x,t) = \varphi_{\pm,n}(x) e^{-i\omega_n t}$, $\varphi(x) \sim e^{-\frac{x^2}{2b^2}} \cdot H\left(\frac{x}{b}\right)$
(H ist Hermitepolynome)

c) $V_\pm = \hbar\omega_0 \left(\frac{x}{\beta_0}\right)^2 \mp \frac{1}{2} g_s \mu_N (b_0 + b_1 x)$

$= \frac{\hbar\omega_0}{\beta_0^2} x^2 \mp \frac{1}{2} g_s \mu_N b_0 \mp \frac{1}{2} g_s \mu_N b_1 x$

$= \frac{\hbar\omega_0}{\beta_0^2}\left(\left(x^2 \mp \frac{\beta_0^2 g_s \mu_N}{2\hbar\omega_0} b_0 \mp \frac{\beta_0^2 g_s \mu_N}{2\hbar\omega_0} b_1 x\right) + \frac{1}{16}\frac{\beta_0^4 g_s^2 \mu_N^2}{\hbar^2\omega_0^2} b_1^2 - \frac{1}{16}\frac{\beta_0^4 g_s^2 \mu_N^2}{\hbar^2\omega_0^2} b_1^2\right)$

$= \frac{\hbar\omega}{\beta_0^2}\left(\left(x \mp \frac{\beta_0^2 g_s \mu_N}{4\hbar\omega_0} b_1\right)^2 \mp \frac{\beta_0^2 g_s \mu_N}{2\hbar\omega_0} b_0 - \frac{1}{16}\frac{\beta_0^4 g_s^2 \mu_N^2}{\hbar^2\omega_0^2} b_1^2\right)$

$= \underbrace{\mp \frac{g_s \mu_N}{2} b_0 - \frac{\beta_0^2 g_s^2 \mu_N^2}{16\hbar\omega_0} b_1^2}_{W_\pm} + \hbar\omega_0 \Bigg(\underbrace{\frac{x \mp \frac{\beta_0^2 g_s \mu_N b_1}{4\hbar\omega_0}}{\beta_0}}_{\frac{x - x_\pm}{\beta}}\Bigg)^2$ ✓

d) $W_\pm = \mp \frac{g_s \mu_N}{2} b_0 - \frac{\beta_0^2 g_s^2 \mu_N^2}{16\hbar\omega_0} b_1^2$ ✓ , $x_\pm = \pm \frac{\beta_0^2 g_s \mu_N}{4\hbar\omega_0} b_1$ ✓

$\omega = \omega_0$, $\beta = \beta_0$

e) $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \hbar\omega_0 \left(\frac{x - x_\pm}{\beta_0}\right)^2 + W_\pm\right)\varphi_\pm = E_\pm \varphi_\pm$

$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega_0 \cdot 2m}{-\hbar}\left(\frac{x - x_\pm}{\beta_0}\right)^2 + \left(-\frac{2m}{\hbar^2}\right) W_\pm + \frac{2m}{\hbar^2} E_\pm\right)\varphi_\pm = 0$

Lösung aus Vorlesung bekannt:

$\varphi_\pm(z) = \left(\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^n n! b}\right)^{-1} \cdot e^{-\frac{z^2}{2b^2}} \cdot H_\nu\left(\frac{z}{b}\right)$

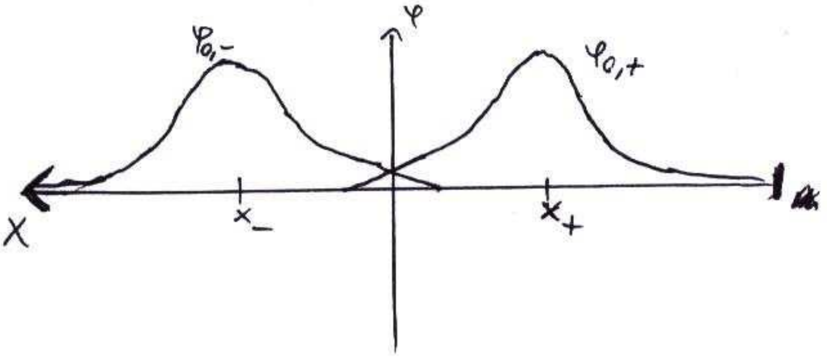
mit $z = x - x_\pm$ und $b = \sqrt{\frac{2m\omega_0}{\hbar\beta_0^2}}$

$\Rightarrow E_\pm = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) + W_\pm = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) \mp \frac{g_s \mu_N}{2} b_0 - \frac{\beta_0^2 g_s^2 \mu_N^2}{16\hbar\omega_0} b_1^2$ ✓

$\Rightarrow E_\pm^{(0)} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \mp \frac{g_s \mu_N}{2} b_0 - \frac{\beta_0^2 g_s^2 \mu_N^2}{16\hbar\omega_0} b_1^2$

$$\Rightarrow \varphi_{0,\pm}(x) = \left(\sqrt[4]{\pi}\sqrt{b}\right)^{-1} \exp\left(\frac{(x-x_\pm)^2}{2b^2}\right) \qquad \left(b = \sqrt{\frac{2m\omega_0}{\hbar\beta_0^2}}\right)$$

$\varphi_{0,+} \neq \varphi_{0,-}$ und $E_+^{(0)} \neq E_-^{(0)}$ $\Rightarrow$ Aufspaltung der Energie aufgrund des Spins und Verschiebung der Wellenfunktion.
$\Rightarrow$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit unterschiedlich!



✓

11/11