Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 3

Präsenzaufgaben am 02.05.11, Hausaufgaben zum 09.05.11

Minitest 1: (15 min)

M1) Geben Sie die vollständige Lösung der Differentialgleichung $f''(x) - k^2 f(x) = 0$ an.

M2) Berechnen Sie folgende Integrale:

(i) $4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \exp(-2ar)$,

(ii) $\int_{-2}^{+5} (x^2 - 5x + 6)\, \delta(x-3)\, dx$,

(iii) $\int_0^\infty dx\, \delta(\sin 2\pi x) \exp(-x)$,

(iv) $\int_{-\infty}^\infty dx\, \delta''(x - x_0) \exp(-x^2)$.

Präsenzaufgabe 3:

Berechnen Sie für ein 1-D freies ebenes Wellenpaket die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ und Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x,t)$.
Ist die quantenmechanische Kontinuitätsgleichung erfüllt?

Präsenzaufgabe 4:

a.) Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x-y)\, \delta(x-z) = \delta(y-z)$$

Hint: Betrachten Sie die Funktionen $\delta(x-y)$ und $\delta(x-z)$ als zwei quadratische Funktionen mit der Breite ε und der Höhe $1/\varepsilon$, zentriert bei $x = y$ bzw. $x = z$.

b.) Benutzen Sie die Definition von $\delta(x)$ als Grenzwert einer normierten Gauß-Funktion

$$G(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2a^2}$$

um zu zeigen, dass die n-te Ableitung von $\delta(x)$:

$$\delta^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n \delta(x)}{dx^n}$$

als Grenzwert eine glatt Funktion gewonnen werden kann. Diskutieren Sie die entsprechenden Ausdrücke für $n = 1, 2$.

Hausaufgabe 6: (9 Punkte)
Gegeben ist $\psi(x) = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$.

a.) Bestimmen Sie $\mathcal{N}$ aus der Normierungsbedingung $\int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi(x)|^2 = 1$.

b.) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\psi(p)$. Wieso ist auch diese normiert?

c.) Berechnen Sie:

(i) die Erwartungswerte für $n = 1, 2$

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x)\ x^n\ \psi(x),$$

$$\langle p^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \psi^*(p)\ p^n\ \psi(p)$$

d.) Beweisen Sie die folgenden Relationen:

(i) $[x, p^n] = \alpha\, n\, p^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $[p, f(x)] = \alpha f'(x)$ für eine beliebige Funktion $f(x)$

und bestimmen Sie die Konstante α.

e.) Berechnen Sie die Schwankungen

$$(\triangle x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$
$$(\triangle p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

Hausaufgabe 7: (6 Punkte)
Betrachten Sie die Funktionenfolge von Lorentz-Kurven für $x, x_0 \in \mathbb{R}$

$$l_n = A \frac{1}{(x-x_0)^2 + w_n^2}$$

mit $w_n = w_0/n$ und $n \in \mathbb{N}$.

a.) Berechnen Sie die Normierungskonstante A. Skizzieren Sie das Verhalten von $l_n(x, x_0)$ für $n >> 1$.

b.) Zeigen Sie, dass $l_n(x, x_0) \rightarrow \delta(x - x_0)$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, indem Sie die beiden definierenden Eigenschaften der δ-Funktion nachweisen.

Zusatzaufgabe 1: (5 Punkte)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes.