Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 8

Präsenzaufgaben am 06.06.11, Hausaufgabenabgabe in der Vorlesung am Mi, 15.6.

Minitest 5:

M1) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

M2) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix M.

M3) Berechnen Sie die Matrix M^2.

M4) Berechnen Sie die transponierte Matrix M^T und die hermitesch konjugierte Matrix $M^\dagger$.

Präsenzaufgabe 10:
Es seien A, B und C Operatoren im Hilbertraum.

i) Zeigen Sie:

$$[[A, B], C] = [A, [B, C]] - [B, [A, C]]$$

ii) Es gelte

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$$

Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

Präsenzaufgabe 11:
Gegeben sei die Matrix in der kartesischen Standardbasis

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von L_x.

b) Berechnen Sie die normierten Eigenvektoren von L_x

c) Verifizieren Sie, dass die Eigenvektoren von L_x ein Orthonormalsystem bilden.

d) Drücken Sie die Matrix L_x in der durch die Eigenvektoren von L_x gegebenen Basis aus. Ordnen Sie die neue Basis so an, dass der erste Eigenvektor zum kleinsten, der zweite zum mittleren und der dritte zum höchsten Eigenwert von L_x gehört.

Hausaufgabe 15: (3 P.)
Gegeben seien drei positive, reelle Zahlen x, y und z und es gelte $x + y + z \leq 3$.

Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$$

gilt. (Hinweis: Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)

Hausaufgabe 16:(12 P.)
Gegeben seien zusätzlich zur Matrix L_x aus der Präsenzaufgabe die Matrizen

$$L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Physikalisch sind L_x, L_y, L_z die Drehimpulsoperatoren eines Spin-1-Systems, dargestellt in der kartesischen Standardbasis.

a) Berechnen Sie die Matrizen $L_+ = L_x + iL_y$ und $L_- = L_x - iL_y$.

b) Berechnen Sie $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$.

c) Berechnen Sie die folgenden Kommutatoren und drücken Sie das Ergebnis, sofern dieses nicht die Nullmatrix ist, durch ein Vielfaches einer der Matrizen L_x, L_y, L_z, L_+ und L_- aus:

i) $[L_x, L_y]$ ii) $[L_+, L_-]$ iii) $[L_+, L_z]$ iv) $[L_-, L_z]$ v) $[L^2, L_+]$ vi) $[L^2, L_-]$

d) Berechnen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren von L_y.

e) Prüfen Sie, dass die drei Eigenvektoren von L_y ein Orthonormalsystem bilden.

f) Stellen Sie nun die drei Matrizen L_x, L_y und L_z in der neuen Basis aus den Eigenvektoren von L_y dar. Ordnen Sie die neue Basis so an, dass der erste Eigenvektor zum kleinsten, der zweite zum mittleren und der dritte zum höchsten Eigenwert von L_y gehört.

Zusatzaufgabe 4: (5 ZP.)
Welche Parität haben die Leiteroperatoren $a(x, p_x)$ und $a^\dagger(x, p_x)$ des quantenmechanischen harmonischen Oszillators? Welche Konsequenz lässt sich daraus für die Diagonalelemente in der Matrixdarstellung dieser Operatoren folgern?