Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 4

Präsenzaufgaben am 09.05.11, Hausaufgaben zum 16.05.11

Minitest 2:

M1) Für welchen Wertebereich von x verschwindet die Heaviside-Funktion $\theta(x)$?

M2) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - a^2)dx$.

M3) Berechnen Sie den quantenmechanischen Erwartungsgwert des Operators x im Zustand $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-|x|/2a} \cdot e^{-i\omega t}$.

M4) Berechnen Sie die Kommutatoren $[x, f(x)]_-$ und $[x, p_y]_-$.

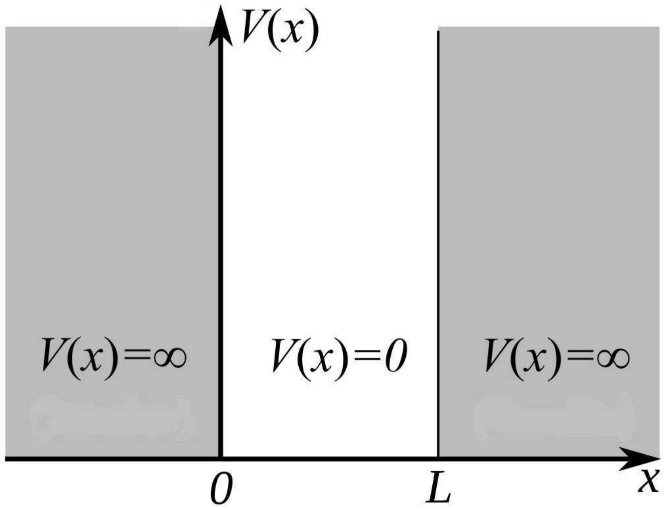
Präsenzaufgabe 5:
Gegeben sei ein repulsives Delta-Potential $V(x) = V_0\delta(x)$ mit $V_0 > 0$.

a) Betrachten Sie die stationäre Schrödingergleichung für $x < 0$ und $x > 0$ und geben Sie für $E > 0$ die Struktur der allgemeinen Lösung an.

b) Berücksichtigen Sie die Anschlussbedingungen der Wellenfunktion und ihrer ersten Ableitung an der Stelle $x = 0$. Ist die Wellenfunktion stetig bei $x = 0$? Zeigen Sie, dass jedenfalls die Ableitung $\psi'(x)$ bei $x = 0$ um $\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(0)$ springt, indem Sie die Schrödingergleichung für ein ϵ-Intervall um den Punkt $x = 0$ herum integrieren.

c) Betrachten Sie für das repulsive Potential die Streuzustände mit $E > 0$, und zwar speziell für den Fall eines von *links* einlaufenden Teilchens. Finden Sie gemäß den gemachten Ansätzen sinnvolle Definitionen für die Relexions- und Transmissionsamplituden bzw. die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten R und T. Zeigen Sie, dass $R + T = 1$ gilt und skizzieren Sie den Verlauf von R und T als Funktion der Energie E.

Präsenzaufgabe 6:
Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in einem unendlich tiefen Potentialtopf, der sich von $x = 0$ bis $x = L$ erstreckt. Außerhalb dieses Kastens wird das Potential als unendlich groß angenommen, innerhalb des Kastens bewegt sich das Teilchen frei.



a) Stellen Sie für den Bereich innerhalb des Kastens die stationäre Schrödingergleichung auf. Zur Vereinfachung empfiehlt es sich die neue Variable $k^2 = 2mE/\hbar^2$ einzuführen.

b) Machen Sie einen allgemeinen Lösungsansatz für die erhaltene Differentialgleichung. Dieser Ansatz sollte zwei Konstanten beinhalten, da es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt.

c) Überlegen Sie sich zwei geeignete Randbedingungen. Aus einer dieser Randbedingugen folgert man auch, dass nur bestimmte – quantisierte – Energiewerte möglich sind. Geben Sie eine Formel für diese Energien E_n an.

d) Sie sollten nun einen Ansatz für die Wellenfunktion haben, der nur noch von einer Konstanten abhhängt. Bestimmen Sie diese Konstante mit Hilfe der Normierungsbedingung, d.h. der Forderung, dass die Wahrscheinlichkeit das Teilchen irgendwo im Kasten zu finden gleich 1 ist.

e) Wie lautet folglich das Resultat für die normierten Wellenfunktionen $\psi_n(x)$?

f) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x^2 \rangle = \langle \psi_n | x^2 | \psi_n \rangle$ und diskutieren Sie das Verhalten für $n \to \infty$.

Hausaufgabe 8: (7 Punkte)
Gegeben sei eine Potentialbarriere, d.h. das Potential ist konstant gleich $V_0 > 0$ für den Bereich $0 \leq x \leq a$ und 0 sonst. Betrachten Sie ein Teilchen, das von links auf diese Barriere zuläuft.

a) Betrachten Sie zunächst nur den Fall $E < V_0$. Teilen Sie das Problem in drei Gebiete ein, und zwar vor der Barriere, genau im Bereich der Barriere und nach der Barriere. Geben Sie für jeden dieser Bereiche Lösungsansätze für die Schrödingergleichung an. Beachten Sie, dass im Bereich nach der Barriere nur eine durchgelassene Welle antreffbar ist. Wie lauten die vier Anschlußbedingungen?

b) Definieren Sie wieder eine Transmissions- und eine Reflexionswahrscheinlichkeit wie in der Präsenzübung und zeigen Sie, dass diese wie folgt geschrieben werden können:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2 \sinh^2 \kappa a} \qquad R = \frac{\frac{1}{4}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2 \sinh^2 \kappa a}{1 + \frac{1}{4}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2 \sinh^2 \kappa a}$$

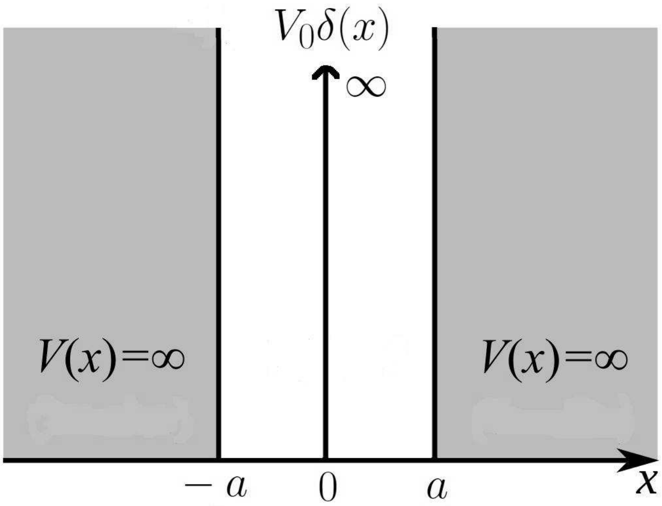
mit $\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$, $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ und $\lambda = \kappa/k$.

c) Welche Werte haben T und R in der Quantenmechanik für den Grenzfall einer sehr breiten Barriere mit $\kappa a \gg 1$?

d) Betrachten Sie nun den Fall $E \geq V_0$. Da κ nun imaginär wird, empfiehlt es sich $\kappa = -iK$ und $\lambda = \frac{\kappa}{k} = -i\frac{K}{k} = -i\Lambda$ zu setzen. Skizzieren und diskutieren Sie das Verhalten von $T(E)$ in Abhängigkeit von E.

e) Für welche diskreten Werte von K nimmt die quantenmechanische Transmissionswahrscheinlichkeit den (maximalen) Wert 1 an?

Hausaufgabe 9: (8 Punkte)
Gegeben sei das Potential eines unendlich tiefen Potentialtopfs mit Grenzen bei $x = -a$ und $x = a$ mit einem Zusatzpotential $V(x) = V_0\delta(x)$.



a) Welche Konsequenzen hat dieses Potential für die Parität der Eigenfunktionen des Hamiltonoperators?

b) Unterteilen Sie das Problem in zwei Gebiete $-a < x < 0$ und $0 < x < a$ und machen Sie für beide Gebiete einen allgemeinen Lösungsansatz für die Schrödingergleichung.

c) Geben Sie die zu erfüllenden Bedingungen an, mit denen man im Prinzip die Koeffizienten des Ansatzes bestimmen kann. Was gilt für $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ bei $x = 0$? Besprechen

Sie warum die Wellenfunktionen mit negativer Parität von dem Zusatzpotential nicht beeinflusst werden.

d) Zeigen Sie für den Fall positiver Parität, dass die Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte

$$\tan(ka) + cka = 0$$

lautet mit $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ und der Kopplungsstärke $c = \frac{\hbar^2}{mV_0 a}$.

e) Für $c \ll 1$ hat die Funktion cx nur schwache Steigung und der Schnitt von $\tan x$ und $-cx$ liegt ungefähr bei π. Machen Sie eine Taylorentwicklung der Tangensfunktion an der Stelle $x = \pi$ und zeigen Sie damit, dass der kleinste Eigenwert der Gleichung in d) näherungsweise gegeben ist durch $k \approx \frac{\pi}{a(1+c)}$.

f) Zeigen Sie, dass im Falle positiver Parität für die zugehörige Energie schließlich $E_1 \approx \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(1-2c)$ folgt, indem Sie zuvor $\frac{1}{(1+c)^2} \approx 1 - 2c$ für kleine c zeigen.

Zusatzaufgabe Z2: (3 Zusatzpunkte) Wählt man speziell die Werte $a = 1$ und $c = 0.05$, so erwartet man die Nullstelle gemäß der Abschätzung aus e) bei $k = \frac{\pi}{1+0.05}$. Berechnen Sie die genaue Lage der Nullstelle mit dem Newton-Verfahren auf mindestens vier Nachkommastellen genau und vergleichen Sie mit dem Wert aus der Abschätzung.