Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 11

Präsenzaufgaben am 27.06.11, Hausaufgaben zum 04.07.11

Minitest 7: Gegeben ist der 2-D Zustandsraum $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$:

$$\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2\,; \quad P_i = |a_i\rangle\langle a_i|.$$

a.) Berechnen Sie P_i^2.

b.) Berechnen Sie $P_i^\dagger$.

c.) Berechnen Sie $P_1 P_2$.

d.) Es gelte der Isomorphismus zum $\mathbb{R}^2$ $|a_i\rangle \mapsto \vec{e}_i$. Geben Sie P_1 in Matrixform an.

Präsenzaufgabe 14:

a.) Zeigen Sie, dass gilt

$$[\vec{L}^2, L_i] = 0$$

für $i = x, y, x$ und die Komponenten $L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$ des Drehimpulsoperator $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Hier ist ϵ_{ijk} der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor.

b.) Berechnen Sie die Kommutatoren: $[L_i, L_j]$, $[\vec{L}^2, r_i]$ und $[\vec{L}^2, \vec{p}^2]$.

c.) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator für ein Teilchen in einem Zentralpotential

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$

mit dem Drehimpulsoperator $\vec{L}$ kommutiert.

Präsenzaufgabe 15:
Der Hamiltonoperator eines Teilchens der Masse m sei gegeben durch

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}), \quad \text{mit} \quad U(\vec{r}) = U^\dagger(\vec{r}) = U^*(\vec{r}).$$

Beweisen Sie das sogenannte Ehrenfest Theorem: Die zeitliche Entwicklung der Mittelwerte von QM-Operatoren folgt den klasssischen Bewegungsgleichungen, d.h

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{r}\rangle = \frac{1}{m}\langle\vec{p}\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{p}\rangle = -\langle\vec{\nabla}U(\vec{r})\rangle. \tag{1}$$

Gehen Sie wie folgt vor, um Gleichung (1) zu beweisen:

a.) Geben Sie die Schrödinger-Gleichungen für die Wellenfunktionnen $\Psi(\vec{r},t)$ und $\Psi^*(\vec{r},t)$ an.

b.) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren $\vec{r}$ und $\vec{p}$.

c.) Berechnen Sie die 1. und 2.Zeitableitung der Erwartungswerte der Operatoren $\vec{r}$ und $\vec{p}$.

d.) Benutzen Sie die Schrödinger-Gleichungen und $[\vec{p}, f(\vec{r})] = -i\hbar\vec{\nabla} f(\vec{r})$ um zu zeigen, dass die Erwartungswerte quantenmechanischer Observablen den klassischen Bewegungsgleichungen gehorchen.

Hausaufgabe 22: (4 P.)
Durch $|a_1\rangle, |a_2\rangle$ sei in einem 2-D komplexen Hilbertraum eine orthonormierte Basis gegeben (Basis der $\{a\}$-Darstellung). Zwei Vektoren $|b_1\rangle, |b_2\rangle$ seien durch

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle + i|a_2\rangle)\,, \quad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle - i|a_2\rangle)$$

gegeben.

a.) Zeigen Sie, dass die Vektoren $|b_1\rangle, |b_2\rangle$ ebenfalls eine orthonormierte Basis (Basis der $\{b\}$-Darstellung) bilden.

b.) Welche Vektoren sind den Ketvektoren $|a_1\rangle, |a_2\rangle, |b_1\rangle, |b_2\rangle$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet?

c.) Welche Vektoren sind den Bravektoren $\langle b_1|, \langle b_2|$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet und wie schreiben sich die inneren Produkte $\langle b_1|b_1\rangle$, $\langle b_1|b_2\rangle$ und $\langle b_2|b_2\rangle$ als Matrizenprodukte?

d.) Welche Vektoren sind den Ketvektoren $|a_1\rangle, |a_2\rangle$ in der $\{b\}$-Darstellung zugeordnet?

Hausaufgabe 23: (11 P.)

Ein Neutron mit Spin $s = 1/2$, der Masse M und dem magnetischen Moment $\vec{\mu} = \frac{1}{2} g_s \mu_N \vec{\sigma}$, das durch das Kernmagneton $\mu_N = \frac{e_0\hbar}{2M} = 5.05078324(13) \times 10^{-27}$ J/T mit der Elementarladung e_0 und dem g-Faktor $g_s = -3.8263...$ gegeben ist, befindet sich in einer magnetischen Falle, deren Einfluss näherungsweise durch ein Oszillatorpotential

$$V(x) = \hbar\omega_0 \left(\frac{x}{\beta_0}\right)^2$$

beschrieben werde. Zusätzlich wirkt in der Falle das Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ mit $B = B(x) = b_0 + b_1 x$ und den reellen Konstanten $b_{0,1}$.

a.) Geben Sie den Hamilton-Operator $H = H_0 + H_B$ für die kombinierte Bewegung in der Falle (H_0) und im Magnetfeld B (H_B) an. Was ergibt sich für $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$?

b.) Welche Struktur haben die zugehörigen stationären Eigenfunktionen $\psi(x, t)$?

c.) Zeigen Sie, dass sich Neutronen mit magnetischen Quantenzahlen $m = \pm 1/2$ in den verschobenen Oszillatorpotentialen

$$U_\pm(x) = W_\pm + \hbar\omega \left(\frac{x - x_\pm}{\beta} \right)^2$$

bewegen.

d.) Berechnen Sie die Konstanten $W_\pm$ und $x_\pm$ sowie ω und β.

e.) Berechnen Sie die Grundzustandsenergien $E_0^\pm$ und die zugehörigen Eigenfunktionen $\psi_{\pm,0}(x)$ des Neutrons. Skizzieren und diskutieren Sie $\psi_{\pm,0}(x)$.