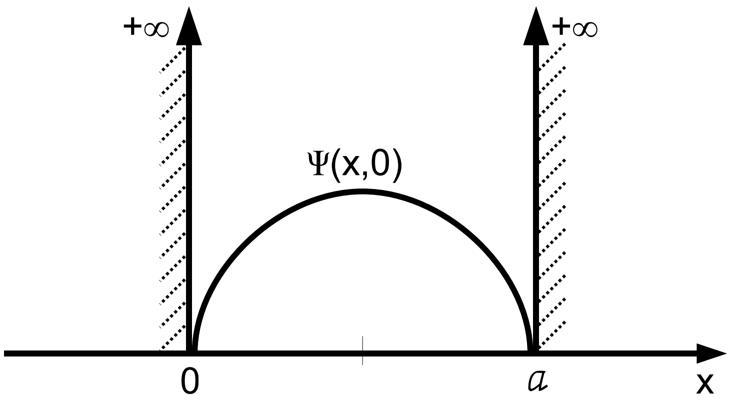
Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 9

Hausaufgaben am 20.6.11
(Abgabetermin: Montag, 20.06.11.)

Hausaufgabe 17:(12 P.)
Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einer Dimension in einem Potential mit unendlich hohen Wänden bei $x = 0$ und $x = a$. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Zustand $\Psi(x, 0) = Ax(x - a)$.



a.) Berechnen Sie die Normierungskonstante A.

b.) Entwickeln Sie $\Psi(x, 0)$ nach dem vollständigen Orthonormalsystem der stationären Eigenfunktionen des unendlich tiefen Topfes.

c.) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen im Grundzustand bzw. nicht im Grundzustand befindet.

d.) Berechnen Sie $\Psi(x, t)$ für beliebige Zeiten $t > 0$.

e.) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t)$, Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x, t)$ für beliebige Zeiten $t > 0$. Zeigen Sie, dass $\rho(x, t) = \rho_s(x) + \rho_t(x, t)$ gilt. Überprüfen Sie explizit, ob die quantenmechanische Kontinuitätsgleichung erfüllt ist.

f.) Berechnen Sie den Mittelwert des Ortsoperators $\langle x\rangle(t)$ und die Schwankung der Energie $\Delta E(t) = [\langle(H^2 - \langle H\rangle^2)\rangle]^{1/2}$.
Mathematische Hinweise: Benutzen Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2m}} = \frac{\pi^{2m}(2^{2m}-1)}{2(2m)!}|B_{2m}|$$

wobei B_{2m} eine Bernoulli-Zahl ist: $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$ etc.

Hausaufgabe 18:(3 P.)

a.) Zeigen Sie, dass $\phi_s(\mathrm{x}) = \delta(\mathrm{x} - \mathrm{s})$ Eigenfunktion zum Ortsoperator x ist. Welcher Eigenwert ergibt sich?

b.) Geben Sie die Eigenzustände des Impulsoperators p_x an. Stellen sie $\phi_s(\mathrm{x})$ in der (kontinuierlichen) Basis der Impulseigenzustände dar. Welchen Wert haben die Entwicklungskoeffizienten?

Zusatzaufgabe 5:(10 ZP.)
Konstruieren Sie die Resolvente (Green'sche Funktion) zum Hamilton-Operator eines freien Teilchens der Masse m :

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 \,.$$

a.) Entwickeln Sie den Resolvente-Operator

$$G = (E + i\eta - H)^{-1} \, ; \quad (\eta \to 0_+)$$

nach dem vollständigen Satz der stationären Eigenfunktionen zu H. Zeigen Sie, dass dies zur Darstellung

$$G(r, \vec{r}\,') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{E + i\eta - e(k)}$$

führt.

b.) Benutzen Sie $s = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$ und wählen Sie ein Koordinatensystem mit $\vec{k} = k\vec{e}_z$. Führen Sie die Winkelintegration aus.

c.) Berechnen Sie das resultierende Integral mit dem Residuensatz. Zeigen Sie, dass $G(\vec{r}, \vec{r}\,') = G(s)$ gilt und geben Sie die Green-Funktion $G(s)$ an. Skizzieren Sie das Verhalten von $G(s)$ als Funktion von s.

Blatt 9 (Tutorium) Theo 4

H 17

a) $\psi(x,0) = A\,x(a-x)$

$1 = A^2 \int_0^a dx\, x^2(a-x)^2 = A^2 \int_0^a dx\, x^2(a^2 - 2ax + x^2) = A^2 \int_0^a dx (a^2x^2 - 2ax^3 + x^4)$

$= A^2\left(\frac{a^5}{3} - \frac{2}{4}a^5 + \frac{1}{5}a^5\right) = A^2 a^5\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = A^2 a^5 \frac{10-15+6}{30} \Rightarrow A = \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{30}{a}}$

$\psi(x,0) = (\pm)\sqrt{\frac{30}{a^5}}\, x(a-x)$

b) $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, $\psi(x,0) = \sum_n c_n \phi_n(x)$

$c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} A \int_0^a dx\, x(a-x)\sin(k_n x)$, $k_n = \frac{n\pi}{a}$

$= A\sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a dx (ax - x^2)\sin(k_n x)$

$\int_0^a dx\, x\sin(k_n x) = -\frac{1}{k_n}\int_0^a dx\, x \frac{d}{dx}\cos(k_n x) = -\frac{1}{k_n} a\cos(k_n a) + \frac{1}{k_n}\int_0^a dx \cos(k_n x)$

$= -\frac{1}{k_n} a\cos(k_n a) + \frac{1}{k_n^2}\sin(k_n a) = -\frac{1}{k_n} a\cos(n\pi) = -(-1)^n \frac{a^2}{n\pi}$

$\int_0^a dx\, x^2 \sin(k_n x) = -\frac{d^2}{dk_n^2}\int_0^a dx \sin(k_n x) = \frac{\partial^2}{\partial k_n^2} \frac{1}{k_n}(\cos(k_n a) - 1) \overset{s = k_n a}{=} a^3 \frac{d}{ds^2}\left(\frac{\cos(s) - 1}{s}\right)$

$\frac{d}{dx^2}(g(x)h(x)) = g''h + 2h'g' + hg'' \Rightarrow \ldots = \frac{2}{s^3}(\cos(s) - 1) + \frac{2}{s^2}\sin(s) - \frac{1}{s}$

$\frac{2}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1) - \frac{1}{n\pi}(-1)^n = \int_0^a dx\, x^2 \sin(k_n x)\frac{1}{a^3}$

$\Rightarrow c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} A a^3 \left[(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n\pi}\right) + \frac{4}{(n\pi)^3}\cdot\frac{1}{2}(1-(-1)^n)\right] = \sqrt{\frac{2}{a}} a^3 A \frac{4}{n^3\pi^3}\cdot\frac{1}{2}(1-(-1)^n)$

$\Rightarrow c_{2k+1} = \sqrt{60}\cdot\frac{4}{\pi^3}\cdot\frac{1}{(2k+1)^3}$, $c_{2k} = 0$

$\Rightarrow \psi(x,0) = \sqrt{15}\frac{8}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\phi_{2k+1}(x)$

c) $w_1 = |c_1|^2 = \frac{960}{\pi^6} \approx 0{,}9986$, $w_1 = 1 - \bar{w} \Rightarrow \bar{w} = 1{,}44\cdot 10^{-3}$

Norm: $\int_0^a dx |\psi(x,0)|^2 = \frac{960}{\pi^6}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{(2^6-1)\pi^6}{6!\cdot 2}\cdot\frac{960}{\pi^6} B_6 = 1$

d) $\psi(x,t) = \frac{\sqrt{960}}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\phi_{2k+1} e^{-i\omega_{2k+1}t}$, $\omega_n = \frac{1}{\hbar}E_n = \frac{\hbar}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}n^2$

e) $\rho(x,t) = \sum_{n,k} c^*_{2k+1}\varphi^*_{2k+1}(x) c_{2n+1}\varphi_{2n+1}(x)\, e^{i(\omega_{2k+1} - \omega_{2n+1})t}$

$\rho(x,t) = \rho_s(x) + \rho_t(x,t)$, $\rho_s(x) = \sum c^2_{2n+1}\varphi^2_{2n+1}(x)$ $(c, \varphi \in \mathbb{R})$

$\rho_t(x,t) = \sum_{k<n} c_{2k+1}c_{2n+1}\varphi_{2k+1}\varphi_{2n+1}\left(e^{i(\omega_{2k+1} - \omega_{2n+1})t} + e^{-i(\omega_{2k+1} - \omega_{2n+1})t}\right)$

$= 2\sum_{k<n} c_{2k+1}c_{2n+1}\varphi_{2k+1}\varphi_{2n+1}\cos((\omega_{2k+1} - \omega_{2n+1})t)$

$j(x,t) = \frac{\hbar}{2im}\sum_{n,k}\left(\varphi^*_{2k+1}\frac{d}{dx}\varphi_{2n+1} - \varphi_{2n+1}\frac{d}{dx}\varphi^*_{2k+1}\right)c_{2k+1}c_{2n+1}e^{i(\omega_{2k+1} - \omega_{2n+1})t}$

$= \frac{\hbar}{2im}\sum_{k<n}\left(\varphi^*_{2k+1}\frac{d}{dx}\varphi_{2n+1} - \varphi_{2n+1}\frac{d}{dx}\varphi^*_{2k+1}\right)c_{2k+1}c_{2n+1}\left(e^{\cdots} + e^{-\cdots}\right)$

$= \frac{\hbar}{m}\sum_{k<n}\left(\varphi_{2k+1}\frac{d}{dx}\varphi_{2n+1} - \varphi_{2n+1}\frac{d}{dx}\varphi_{2k+1}\right)c_{2k+1}c_{2n+1}\sin((\omega_{2k+1} - \omega_{2n+1})t)$

Kontinuitätsgl: $\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = 0$

f) $\langle x\rangle(t) = \int_0^a dx\, \psi^*(x,t)\, x\, \psi(x,t)$, $x = \left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2}$

$\langle x\rangle(t) = \frac{960}{\pi^6}\sum_{k,k'}((2k+1)^3(2k'+1)^3)^{-1}\left(\frac{a}{2}\delta_{kk'} + \int_0^a dx\left(x - \frac{a}{2}\right)\phi_{2k+1}(x)\phi_{2k'+1}(x)\, e^{i(\omega_{2k+1} - \omega_{2k'+1})t}\right)$

Sym. um $\frac{a}{2}$ $\Rightarrow$ 2. Int $= 0$, $\langle x\rangle(t)$ stat: $\langle x\rangle(t) = \frac{960}{\pi^6}\frac{a}{2}\sum_k\frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{a}{2}$

$(\Delta E)^2 = \langle(H - \langle H\rangle)^2\rangle = \langle H^2 - \langle H\rangle^2\rangle = \langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2$

$\langle H\rangle = \int_0^a dx\, \psi^* H\psi = -i\hbar\int_0^a dx\, \psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{960}{\pi^6}\sum_k\frac{1}{(2k+1)^6}E_{2k+1} = E_1\frac{960}{\pi^6}\frac{(2^4-1)\pi^4}{4!\,2}|B_4| \approx 1{,}01\,E_1$

$\langle H^2\rangle$: $H^2\phi_n = H(H\phi_n) = E_n H\phi_n = E_n^2\phi_n$

$\langle H^2\rangle = \frac{960}{\pi^6}E_1^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)^4}{(2k+1)^6} = \frac{960}{\pi^6}E_1\frac{(2^2-1)\pi^2}{2!\,2}|B_2| = 1{,}23\,E_1^2$

$\Delta E = \sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2} = E_1\sqrt{\frac{120}{\pi^4} - \frac{101}{\pi^6}} = \frac{\sqrt{20}}{\pi^2}E_1 \Rightarrow \Delta E = 2E_1\frac{\sqrt{5}}{\pi^2} \approx 1{,}453\,E_1$

H18

a) $x\phi_s(x) = x\delta(x-s) = s\phi \Rightarrow EW = x = s$

b) stat. Impulseigenfn : ebene Wellen $\phi_k(x) = e^{ikx}$

$\phi_s(x) = \delta(x-s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-s)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} c_k(s) e^{iks} \Rightarrow$ Entw. Koeff $c_k = e^{-iks}$

Z5

a) $G = \frac{1}{E+i\eta-H}$, $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}$, $H\psi = e\psi$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\psi = e\psi \Rightarrow \psi'' + \frac{2me}{\hbar^2}\psi = 0$, $k^2 = \frac{2me}{\hbar^2} \Rightarrow e(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}}$

$\langle\vec{k}|\vec{k}'\rangle = \int \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')\, d^3k$, $\langle\vec{k}|\vec{k}\rangle = 1$, $\langle\vec{r}|\vec{k}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$

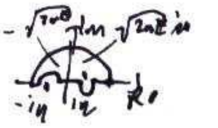
$= \langle\vec{r}|\frac{1}{E+i\eta-H}|\vec{r}'\rangle = \int d\vec{k} \langle\vec{r}|\vec{k}\rangle \frac{1}{E+i\eta-e}\langle\vec{k}|\vec{r}'\rangle = \int \frac{1}{(2\pi)^3} d^3k\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{E+i\eta-e(k)} e^{-i\vec{k}\vec{r}'}$

$= \int \frac{1}{(2\pi)^3} d^3k\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} \frac{1}{E+i\eta-e(k)}$

b) sph. Koord : $\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} dk\, k^2\, d\cos(\vartheta)\, d\varphi\, e^{iks\cos(\vartheta)} \frac{1}{E+i\eta-e(k)} = \frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, k^2 \frac{e^{iks}-e^{-iks}}{iks}\frac{1}{E+i\eta-e(k)}$

$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{ke^{iks}}{is}\frac{1}{E+i\eta-e(k)} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{ke^{iks}}{is}\frac{1}{E+i\eta-\frac{\hbar^2}{2m}k^2} = \frac{m}{2\pi^2\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{ke^{iks}}{is}\frac{1}{\frac{2m}{\hbar}E-k^2}$

c) $\hbar k_1 = \sqrt{2mE} + i\eta$ in Kontur $\Rightarrow \frac{m}{2\hbar\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k}{\frac{2mE}{\hbar^2}-k^2}\frac{e^{iks}}{is} = \frac{m}{2\hbar^2\pi^2}\cdot 2\pi i\, \mathrm{Res}\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\right)$



$= -\frac{m}{2\pi\hbar}\frac{e^{is\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}}{s}$, $G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\exp\left(\frac{i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}(\vec{r}-\vec{r}')}{(\vec{r}-\vec{r}')}\right)$

$G(s) \sim -\frac{e^{is}}{s} \sim \frac{\cos(s)}{s} + i\frac{\sin(s)}{s}$

Theo 4 Blatt 9 Julian Bergmann

11/15

H 17

a) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2 dx = A^2 \int_0^a (x(x-a))^2 dx = A^2 \int_0^a x^4 - 2x^3 a + x^2 a^2 \, dx$

$= A^2 \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 a + \frac{1}{3}x^3 a^2 \right]_0^a = A^2 \left(\frac{a^5}{5} - \frac{2}{4}a^5 + \frac{1}{3}a^5 \right) = A^2 \cdot \frac{a^5}{30}$

$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$ ✓ 2/2

b) $\Psi(x,0) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$, $c_n = \int_0^a \varphi_n(x) \Psi(x,0)$

$\varphi_n(x) = A' \sin(kx) + B' \cos(kx)$, $\varphi_n(0) = \varphi_n(a) = 0 \Rightarrow 0 = B'\cos(0) \Rightarrow B' = 0$

$\Rightarrow \varphi_n(x) = A' \sin(kx)$, $\varphi_n(a) = 0 \Rightarrow \sin(k \cdot a) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$

$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(x)|^2 dx = \cancel{\int (A' \sin(x)) dx} \; A'^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \; \cancel{= A'^2 \left[-\frac{a}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right]_0^a}$

$\cancel{= A'^2 \left(-\frac{a}{n\pi}(-1-1) \right) = A'^2 \frac{2a}{n\pi} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{n\pi}{2a}}}$

$= A'^2 \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4\frac{n\pi}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot 2x\right) \right]_0^a = A'^2 \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{2}{a}}$

$\Rightarrow \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ → gilt als vorrausgesetzt

$c_n = \int_0^a \varphi_n(x) \Psi(x,0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sqrt{\frac{30}{a^5}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) x(x-a) \, dx$

$= \sqrt{\frac{60}{a^6}} \left(\int_0^a x^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx - a\int_0^a x \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \right)$

$= \sqrt{\frac{60}{a^6}} \Big[\frac{2xa^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \left(\frac{x^2 a}{n\pi} - \frac{2a^3}{n^3\pi^3} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) -$ (Bronst. 280)

$\cancel{\sin(\ldots a)}$

$\frac{a^3}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + \frac{xa^2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \Big]_0^a$ (Bronst. 279)

$= \sqrt{\frac{60}{a^6}} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(\frac{2xa^2}{n^2\pi^2} - \frac{a^3}{n^2\pi^2} \right) + \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \left(-\frac{x^2 a}{n\pi} + \frac{2a^3}{n^3\pi^3} + \frac{xa^2}{n\pi} \right) \right]_0^a$! ?

$= \sqrt{\frac{60}{a^6}} \cdot \left((-1)^n \left(-\cancel{\frac{a^3}{n\pi}} + \frac{2a^3}{n^3\pi^3} + \cancel{\frac{a^3}{n\pi}} \right) - \frac{2a^3}{n^3\pi^3} \right)$ gerade, ungerade n?

$= \sqrt{240} \left((-1)^n - 1 \right) \cdot \frac{1}{n^3\pi^3}$ ✓ $\Psi(x,0) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$ 1,5/2

c) Grundzustand : $n = 1 \Rightarrow P(n=1) = \int_0^a |\Psi_1(x,0)|^2 dx$

$= \int_0^a |c_1 \varphi_1(x)|^2 dx = |c_1|^2 \underbrace{\int_0^a |\varphi_1(x)|^2 dx}_{=1}$ 2/2

$= \left(\frac{\sqrt{240} \cdot (-2)}{\pi^3} \right)^2 = \frac{960}{\pi^6} \approx 99,86\%$ ✓

$\Rightarrow P(n \neq 1) = 1 - P(n=1) = 0,14\%$ ✓

d) $\Psi(x,t) = \sum_n c_n \varphi_n(x) e^{-i\omega_n t} = \sum_n \frac{\sqrt{240}}{n^3\pi^3} \left((-1)^n - 1 \right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i\left(\frac{\hbar}{2m}k_n^2\right)t}$ ✓ 1/1

e) $\rho(x,t) = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = \left(\sum_n \frac{\sqrt{240}}{n^3\pi^3} \left((-1)^n - 1 \right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-i\omega_n t} \right)^2$

$= \sum_{n=n'} \left[\frac{\sqrt{240}}{n^3\pi^3} \left((-1)^n - 1 \right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right]^2 + \sum_{n \neq n'} \left[\frac{\sqrt{240}}{n^3\pi^3} \left((-1) - 1 \right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\ldots) \right] e^{i(\omega_n - \omega_{n'})t}$?

$\Rightarrow \varrho_s(x) = \sum_n c_n^2 \varphi_n^2(x)$ ✓ , $\varrho_t(x,t) = \sum_{n \neq n'} c_n^2 \varphi_n^2(x) e^{-i(w_n - w_{n'})t}$ ✓

$\vec{j}(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}(\Psi^* \vec{\nabla}\Psi - \Psi \vec{\nabla}\Psi^*)$

$= \frac{\hbar}{2mi}\left(\sum_{n,n'} c_n^* c_{n'} \varphi_n^*(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{n'}(x) e^{-i(w_n-w_{n'})t} - \sum_{n,n'} c_n c_{n'}^* \varphi_n(x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{n'}^*(x) e^{i(w_n-w_{n'})t}\right)$

(*) $= \frac{\hbar}{2mi} \sum_{n,n'} c_n^* c_{n'} e^{-i(w_n - w_{n'})t} \left(\varphi_{n'}^*(x)\frac{\partial}{\partial x} \varphi_n(x) - \varphi_n(x) \frac{\partial}{\partial x}\varphi_{n'}^*(x)\right)$

$= \frac{\hbar}{2mi} \sum_{n,n'} c_n c_{n'} e^{-i(w_n - w_{n'})t}\left(-\frac{2}{a}\frac{n'\pi}{a}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n'\pi}{a}x\right) + \frac{2}{a}\frac{n\pi}{a}\sin\left(\frac{n'\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n'\pi}{a}x\right)\right)$

~~$= \frac{\hbar}{2mi} \sum_{n,n'} c_n c_{n'} e^{-i(w_n-w_{n'})t} \frac{2\pi}{a^2} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n'\pi}{a}x\right)(-n'+n)$~~

$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \varrho_t(x,t) = \sum_{n<n'} -i(w_n - w_{n'}) c_n^2 \varphi_n^2(x) e^{-i(w_n-w_{n'})t}$

$= -\frac{i}{\hbar} \sum_{n<n'} c_n c_{n'}^* \varphi_n(x)\varphi_{n'}(x)(\hbar w_n - \hbar w_{n'}) e^{-i(w_n-w_{n'})t}$

$= -\frac{i}{\hbar} \sum_{n<n'} c_n c_{n'}^* \left(\varphi_{n'}^*(x) H \varphi_n(x) - \varphi_n(x) H \varphi_{n'}^*(x)\right) e^{-i(w_n-w_{n'})t}$

$= -\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{\hbar}{2m}\right) \sum_{n<n'} c_n c_{n'}^* \left(\varphi_{n'}^*(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_n(x) - \varphi_n(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_{n'}^*(x)\right) e^{-i(w_n-w_{n'})t}$

$= -\frac{\hbar}{2mi}\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n<n'} c_n c_{n'}^* \left(\varphi_{n'}^*(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_n(x) - \varphi_n(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{n'}^*(x)\right) e^{-i(w_n-w_{n'})t}$

$= -\frac{\partial}{\partial x}(*) = -\frac{\partial}{\partial x}\vec{j}(x,t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\varrho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\vec{j}(x,t) = 0$ ✓ 3|3

f) $\langle x \rangle = \int_0^a dx\, \Psi^*(x,0) \cdot x \cdot \Psi(x,0) = \int_0^a \frac{30}{a^5} x^3 (x-a)^2 dx = \frac{30}{a^5}\left[\frac{a^2}{4}x^4 - \frac{2ax^5}{5} + \frac{x^6}{6}\right] = \frac{a}{2}$

1|2

10,5|12

H 18

a) $x\phi_s(x) = \lambda\phi_s(x) \Rightarrow \int x\, \delta(x-s)\, dx = \int \lambda\, \delta(x-s)\, dx$

2

$\Rightarrow x|_{x=s} = \lambda \cdot 1|_{x=s} \Rightarrow s = \lambda \qquad \Rightarrow EW = s$ ✓

0,5|3

EW ex $\Rightarrow \phi_s$ EV

b) $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\Psi(x) = p\Psi(x) \Rightarrow \Psi'(x) + \frac{p}{i\hbar}\Psi(x) = 0 \Rightarrow \Psi(x) = e^{+i\frac{p}{\hbar}x}$

$p\Psi(x) = \lambda\Psi(x) \Rightarrow p e^{i\frac{p}{\hbar}x} = \lambda e^{i\frac{p}{\hbar}x} \Rightarrow EW = p$

$c_p = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-s) e^{i\frac{p}{\hbar}x} dx = e^{i\frac{p^2}{\hbar}} \qquad \left(c_n = e^{i\frac{pn}{\hbar}}\right)$

$\phi_s(x) = \int c_p \Psi(x)$