Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 1

Präsenzaufgaben am 18.04.11, Hausaufgaben zum 26.04.11

Abgabetermin: Dienstag, 26.04.11, im Raum 517a.

Präsenzaufgabe 1:
Berechnen Sie die Rydberg-Konstante R_∞ mit Hilfe des Bohrschen Modells für ein Elektron im Orbit um ein Proton (Wasserstoffatom) aus den Gleichungen:

$$\vec{F}_Z + \vec{F}_C = 0$$
$$E = \hbar\omega$$

Hier ist $\vec{F}_Z$ die Zentrifugalkraft und ist $\vec{F}_C$ die Coulombkraft.

Präsenzaufgabe 2:
Lösen Sie die Differentialgleichungen

$$f' + \lambda f = 0$$
$$f'' + k^2 f = 0$$

und geben Sie die vollständigen Lösungen an.

Hausaufgabe 1: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Compton-Wellenlängen

a.) eines e^-,

b.) einer Fliege $m = 10$mg,

c.) eines/einer Studierenden mit $m =$ihre persönliche Ruhemasse,

d.) eines Autos $m = 1$t und die de Broglie-Wellenlange bei $v = 100$km/h.

Hausaufgabe 2: (3 Punkte)
In "Quantum-Land", einem sehr merkwürdigen Land, wo $\hbar = 10^{-3}$Js, wachsen Melonen mit einer sehr harten Schale. Diese Melonen haben einen ungefähren Durchmesser von 20cm und enthalten Samen mit einer ungefähren Masse von 0,1g. Warum muss man sehr vorsichtig beim Aufschneiden einer Melone aus Quantum-Land sein?

Hausaufgabe 3: (8 Punkte)
Die Bohr-Sommerfeld'sche Quantisierungsbedingung der "alten" Quantentheorie besagt, dass für jede verallgemeinerte Koordinate q_α und den zugehörigen kanonischen Impuls p_α das Wirkungsintegral

$$I_\alpha = \oint p_\alpha dq = n_\alpha h$$

integriert über eine Periode, ein ganzzahliges Vielfaches $n_\alpha \in \mathbf{N}$ des Planck'schen Wirkungsquantums h annimmt.
Berechnen Sie I für die gebundenen Radialbewegung eines Elektrons mit dem Bahndrehimplus L in einem Wasserstoffatom, d.h

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}.$$

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a.) Geben Sie die Lagrangefunktion, die Hamiltonfunktion, Hamiltongleichungen und die Konstanten der Bewegung an.

b.) Zeigen Sie, dass der radiale Impuls p_r bei gegebener Energie E und gegebenem Bahndrehimpuls L durch

$$p_r = \frac{\sqrt{2m(Er^2 + e^2 r) - L^2}}{r}$$

gegeben ist. Welchen Wert hat der veralgemeinerte Impuls p_ϕ?

c.) Zeigen Sie, dass für die Umkehrpunkte

$$r_{1,2} = -\frac{e^2}{2E} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{4mE}$$

gilt. Dabei ist $\Delta = -4m(2EL^2 + me^4)$.

d.) Es gelten die Quantisierungsvorschriften $I_\phi = 2\pi\hbar n_\phi$ und $I_r = 2\pi\hbar n_r$. Berechnen Sie für $E < 0$

$$\begin{aligned} I_\phi &= \oint p_\phi d\phi \\ I_r &= \oint p_r(r) dr = 2\int_{r_1}^{r_2} p_r(r) dr. \end{aligned}$$

(**Hinweis:** Sie können zum Lösen der Integrale eine Integraltafel, z.B. Bronstein, benutzen.)

e.) Berechnen Sie die Energie der gebundenen Zustände und zeigen Sie, dass die zulässigen Energieeigenwerte durch die "Hauptquantenzahl" $N = n_r + n_\phi + 1$ gegeben sind.

Blatt 1 Theo 4 Julian Bergmann (13,5/15) S.B.

Nr. 1

a) $\lambda_c = \frac{h}{mc}$, $\lambda_{c,e} = \frac{h}{m_e c} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \frac{kg\,m^2}{s}}{9,109 \cdot 10^{-31} kg \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 2,426 \cdot 10^{-12}\, m$ ✓

b) $\lambda_{c,F} = \frac{h}{m_F \cdot c} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \frac{kg\,m^2}{s}}{1 \cdot 10^{-5} kg \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 2,21 \cdot 10^{-22}\, m$ ✓

c) $\lambda_{c,S} = \frac{h}{m_S \cdot c} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \frac{kg\,m^2}{s}}{60\, kg \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 3,68 \cdot 10^{-44}\, m$ ✓

d) $\lambda_{c,A} = \frac{h}{m_A \cdot c} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \frac{kg\,m^2}{s}}{1000\, kg \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 2,21 \cdot 10^{-45}\, m$ ✓

$\lambda_{B,A} = \frac{h}{p_A} = \frac{h}{m_A v_A} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \frac{kg\,m^2}{s}}{1000\, kg \cdot \frac{250}{9} \frac{m}{s}} = 2,385 \cdot 10^{-38}\, m$ ✓

4/4

Nr. 2

$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ mit $\Delta x = 0,2 m$, $\Delta p = m \cdot \Delta v$, $m = 10^{-4} kg$, $\hbar = 10^{-3} \frac{kg\,m^2}{s}$

$m \cdot \Delta v \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta v = \frac{\hbar}{2m \cdot \Delta x} = \cancel{50}\ 25 \frac{m}{s} = \cancel{180}\ 90 \frac{km}{h}$

$\Rightarrow$ Geschwindigkeitsunschärfe sehr hoch $\Rightarrow$ schnell ducken! 2/3

Nr. 3

a) gen. Koord: r, φ , $v_\varphi = r\dot\varphi$, $v_r = \dot r$ $\Rightarrow v^2 = r^2\dot\varphi^2 + \dot r^2$

$\Rightarrow T = \frac{m}{2}(r^2\dot\varphi^2 + \dot r^2) \Rightarrow L = T - V = \frac{m}{2}(r^2\dot\varphi^2 + \dot r^2) + \frac{e^2}{r}$ ✓

$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m r^2 \dot\varphi$, $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r$

$\Rightarrow \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mr^2}$ ✓ $\Rightarrow \dot r = \frac{p_r}{m}$ ✓

$H = p_\varphi\dot\varphi + p_r \dot r - \frac{m}{2}((r^2\dot\varphi^2) + \dot r^2) - \frac{e^2}{r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^2} + \frac{p_r^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_\varphi^2}{m^2r^2} + \frac{p_r^2}{m^2}\right) - \frac{e^2}{r}$

$= \frac{1}{2m}\left(\frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_r^2\right) - \frac{e^2}{r}$ ✓

konst. der Beweg. p_φ und E −1/2

$\dot p_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{e^2}{r^2}$ ✓ , $\dot p_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$ ✓

1,5/2

b) H n. zeitabh. $\Rightarrow$ H sklcronom $\Rightarrow E = H = \frac{1}{2m}\left(\frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_r^2\right) - \frac{e^2}{r}$

$L = p_\varphi \Rightarrow E = \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{r^2}L^2 + p_r^2\right) - \frac{e^2}{r} \Rightarrow 2m\left(E + \frac{e^2}{r}\right) - \frac{1}{r^2}L^2 = p_r^2$

$\Rightarrow p_r = \sqrt{\frac{2m(Er^2 + e^2 r) - L^2}{r^2}} = \sqrt{2m(Er^2 + e^2 r) - L^2} \cdot \frac{1}{r}$ ✓

$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_r^2\right) - \frac{e^2}{r} \Rightarrow p_\varphi^2 = \left(\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\cdot 2m - p_r^2\right)\cdot r^2$ ✓

$\Rightarrow p_\varphi = r\sqrt{2m\left(E + \frac{e^2}{r}\right) - p_r^2}$

1/1

c) Umkehrpunkt $\Rightarrow p_r = 0 \Rightarrow 2m(Er^2 + e^2 r) = L^2$

$\Rightarrow r^2 + \frac{e^2}{E} r - \frac{L^2}{2mE} = 0 \xrightarrow{p,q-F.} r_{1,2} = -\frac{e^2}{2E} \pm \sqrt{\frac{e^4}{4E^2} + \frac{L^2}{2mE}}$

$= -\frac{e^2}{2E} \pm \sqrt{\frac{1}{16m^2E^2}(4m^2e^4 + 8EL^2m)} = -\frac{e^2}{2E} \pm \sqrt{-(-4m(me^4 + 2L^2E))} \cdot \frac{1}{4mE}$

$= -\frac{e^2}{2E} \pm \sqrt{-\Delta} \cdot \frac{1}{4mE}$ ✓

1/1

d) $I_\varphi = 2\pi n_\varphi \hbar = \oint p_\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} L\, d\varphi = 2\pi L \Rightarrow L = n_\varphi \hbar$ ✓

$I_r = 2\pi n_r \hbar = 2\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2mEr^2 + 2me^2r - L^2} \cdot \frac{1}{r}\, dr$ (Bronstein 260)

$= 2\cdot\Big\{ \underbrace{\left[\sqrt{2mEr^2 + 2me^2r - L^2}\right]_{r_1}^{r_2}}_{A} + \frac{2me^2}{2} \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} (2mEr^2 + 2me^2r - L^2)^{-\frac{1}{2}} dr}_{B} + (-L^2) \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} (2mEr^2 + 2me^2r - L^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{r} dr}_{C} \Big\}$ $\Rightarrow$

$$A = \left(2mE\left(-\frac{e^2}{2E}+\frac{\sqrt{-\Delta}}{4mE}\right)^2 + 2me^2\left(-\frac{e^2}{2E}+\frac{\sqrt{-\Delta}}{4mE}\right)+L^2\right)^{1/2}$$
$$-\left(2mE\left(-\frac{e^2}{2E}-\frac{\sqrt{-\Delta}}{4mE}\right)^2 + 2me^2\left(-\frac{e^2}{2E}-\frac{\sqrt{-\Delta}}{4mE}\right)-L^2\right)^{1/2} = \cancel{4m}e^2\frac{2\sqrt{-\Delta}}{\cancel{4m}E} - \cancel{2}\cdot\cancel{2mE}\cancel{2}\cdot\frac{e^2}{2E}\cdot\frac{\sqrt{-\Delta}}{\cancel{4mE}}$$
$$= e^2\frac{\sqrt{-\Delta}}{E} - \frac{e^2}{E}\sqrt{-\Delta} = 0 \checkmark$$

$$B = \left[-(-2mE)^{-1/2}\cdot\arcsin\left(\frac{2\cdot 2mEr+2me^2}{\sqrt{-\Delta}}\right)\right]_{r_1}^{r_2} \quad (\text{Bronstein } 241,\ a<0,\ \Delta<0)$$
$$= \left(-(-2mE)^{-1/2}\cdot\arcsin\left(\frac{4mE\cdot\left(-\frac{e^2}{2E}-\frac{\sqrt{-\Delta}}{4mE}\right)+2me^2}{\sqrt{-\Delta}}\right)\right) - \left(-(-2mE)^{-\frac{1}{2}}\cdot\arcsin\left(\frac{4mE\cdot\left(-\frac{e^2}{2E}+\frac{\sqrt{-\Delta}}{4mE}\right)+2me^2}{\sqrt{-\Delta}}\right)\right)$$
$$= \left(-(-2mE)^{-1/2}\cdot\underbrace{\arcsin\left(\underbrace{\frac{-2me^2-\sqrt{-\Delta}+2me^2}{\sqrt{-\Delta}}}_{=-1}\right)}_{-\frac{\pi}{2}}\right) - \left(-(-2mE)^{-\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\arcsin\left(\underbrace{\frac{-2me^2+\sqrt{-\Delta}+2me^2}{\sqrt{-\Delta}}}_{=+1}\right)}_{\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$= \left(-(-2mE)^{-1/2}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = +\pi\cdot(-2mE)^{-\frac{1}{2}} \checkmark$$

$$C = \left[(L^2)^{-1/2}\arcsin\left(\frac{2me^2r+2L^2}{r\sqrt{-\Delta}}\right)\right]_{r_1}^{r_2}$$
$$= |L|^{-1}\cdot\left(\arcsin\left(\frac{2me^2\cdot\left(-\frac{e^2}{2E}-\frac{\sqrt{-\Delta}}{4mE}\right)-2L^2}{\left(-\frac{e^2}{2E}-\frac{\sqrt{-\Delta}}{4mE}\right)\sqrt{-\Delta}}\right) - \arcsin\left(\frac{2me^2\cdot\left(-\frac{e^2}{2E}+\frac{\sqrt{-\Delta}}{4mE}\right)-2L^2}{\left(-\frac{e^2}{2E}+\frac{\sqrt{-\Delta}}{4mE}\right)\cdot\sqrt{-\Delta}}\right)\right)$$
$$= |L|^{-1}\cdot\left(\arcsin\left(\frac{2me^2}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{2L^2}{\left(-\frac{e^2}{2E}-\frac{\sqrt{-\Delta}}{4mE}\right)\sqrt{-\Delta}}\right) - \arcsin\left(\frac{2me^2}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{2L^2}{\left(-\frac{e^2}{2E}+\frac{\sqrt{-\Delta}}{4mE}\right)\sqrt{-\Delta}}\right)\right)$$
$$= |L|^{-1}\cdot\left(\arcsin\left(\frac{2me^2}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{2L^2\cdot 4mE}{(-2me^2-\sqrt{-\Delta})\sqrt{-\Delta}}\right) - \arcsin\left(\frac{2me^2}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{8mEL^2}{-2me^2\sqrt{-\Delta}+\sqrt{-\Delta}^2}\right)\right)$$
$$= |L|^{-1}\cdot\left(\arcsin\left(\frac{2me^2(-2me^2-\sqrt{-\Delta})-8mEL^2}{-2me^2\sqrt{-\Delta}-\sqrt{-\Delta}^2}\right) - \arcsin\left(\frac{2me^2(-2me^2+\sqrt{-\Delta})-8mEL^2}{-2me^2\sqrt{-\Delta}+\sqrt{-\Delta}^2}\right)\right)$$
$$= |L|^{-1}\left(\arcsin\left(\frac{-4m^2e^4-8mEL^2-2me^2\sqrt{-\Delta}}{-2me^2\sqrt{-\Delta}-\sqrt{-\Delta}^2}\right) - \arcsin\left(\frac{\overset{*}{-\sqrt{-\Delta}^2}+2me^2\sqrt{-\Delta}}{-2me^2\sqrt{-\Delta}+\sqrt{-\Delta}^2}\right)\right)$$

$$*:\ -4m^2e^4-8mEL^2 = \Delta < 0 \Rightarrow |\Delta| = \sqrt{-\Delta}^2 = -\Delta \Rightarrow \Delta = -\sqrt{-\Delta}^2$$

$$= |L|^{-1}\left(\underbrace{\arcsin\left(\frac{-2me^2\sqrt{-\Delta}-\sqrt{-\Delta}^2}{-2me^2\sqrt{-\Delta}-\sqrt{-\Delta}^2}\right)}_{+\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arcsin\left(\frac{2me^2\sqrt{-\Delta}-\sqrt{-\Delta}^2}{-2me^2\sqrt{-\Delta}+\sqrt{-\Delta}^2}\right)}_{-\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$= +\pi\cdot|L|^{-1} \checkmark$$

$$\Rightarrow I_r = 2\cdot(A+me^2B-L^2C) = 2\cdot\left(0+\frac{me^2\pi}{\sqrt{-2mE}}+\frac{L^2(-\pi)}{|L|}\right) = +\frac{\sqrt{2}e^2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{-E}} - 2\pi L$$
$$= 2\pi\hbar n_r \quad \Rightarrow \quad 2\pi\hbar(n_r+n_\varphi) = +\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{-E}}e^2\pi \checkmark$$

2/2

e) $$2\pi\hbar(n_r+n_\varphi) = \sqrt{\frac{2m}{-E}}e^2\pi \quad \Rightarrow -E = \frac{e^4\pi^2\cdot 2m}{\cancel{4}\cancel{\pi^2}(n_r+n_\varphi)^2\hbar^2} = \frac{e^4m}{2\underbrace{(n_r+n_\varphi)^2}_{N-1}\hbar^2} \xrightarrow{\text{besser Frage}} \frac{e^4m}{2\hbar^2N^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{-e^4m}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{N^2}$$

2/2

mit $N = n_r+n_\varphi+1$ (+1: Entartungsfaktor)