

## 4 Präsenzaufgabe von Theo 4 vom Montag, den 16.5.2011

### 4.7 Präsenzaufgabe

a)  $H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x+1) = H(x+a)$

$\Rightarrow H$  ist a-periodisch

b)  $T_a(H\varphi(x)) = T_a(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) + V(x)) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x+a) + V(x+a) = H\varphi(x+1)$

$$[H, T_a]\Psi(x) = HT_a\Psi(x) - T_aH\Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} T_a\Psi(x) + V(x) - T_a(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + V(x)) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x+a) + V(x) - (-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x+a) + V(x+a)) = 0$$

$\Rightarrow$  Eigenfunktionen von  $H$  und  $T_a$  sind gleich!

c)  $T_{\varphi}^{z_0}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(i)}(z)}{i!} \Big|_{z=z_0} (z-z_0)^i$

$$T_{\varphi}^z(z+a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(i)}(z)}{i!} \Big|_{z=z} (z-z+a)^i e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$T_{\varphi}^z(z-a) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a^i \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dz^i}}_{e^{a \frac{d}{dz}}} \varphi(z) = e^{a \frac{d}{dz}} \varphi(x) = e^{a \frac{p}{\hbar}} \varphi(x)$$

d)  $u_k(x) = e^{-ikx} \varphi(x)$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) = u_k(x) e^{ikx}}$$

$$u_k(x+a) = e^{-ikx} e^{-ika} \varphi(x+a) = e^{-ikx} e^{-ika} e^{\frac{ip}{\hbar} a} \varphi(x) = e^{-ikx} e^{-ika} e^{ika} \varphi(x) = e^{-ikx} \varphi(x)$$

e)  $e^{-ia \frac{\pi}{a}} = e^{-i\pi} = e^{i\pi} = e^{ia \frac{\pi}{a}}$

$\Rightarrow$  Periodisch: Werte wiederholen sich vor  $-\frac{\pi}{a}$  und nach  $\frac{\pi}{a}$