Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 2

Hausaufgaben zum 02.05.11

Hausaufgabe 3: (8 Punkte)

Betrachten Sie die Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = F \cos \omega t$ wobei o.B.d.A. $\omega_0 > 0$, $\omega > 0$ und $F > 0$ angenommen werden kann.

a) Approximieren Sie die Sinusfunktion durch ihre Potenzreihe bis einschließlich der dritten Ordnung und setzen Sie das Ergebnis in die DGL ein.

b) Führen Sie die folgenden neuen, dimensionslosen Größen ein:

$$\tau = \omega t, \quad \Omega^2 = \omega_0^2/\omega^2 \;\; (\Omega > 0), \quad \Gamma = F/\omega^2$$

und zeigen Sie, dass dann die Gleichung $x'' + \Omega^2 x - \frac{1}{6}\Omega^2 x^3 = \Gamma \cos \tau$ resultiert, wobei Striche Ableitungen nach τ kennzeichnen.

Es kann angenommen werden, dass $\frac{1}{6}\Omega^2 =: \epsilon_0$ klein ist. Betrachten Sie anstatt des Falles eines festen Parameters ϵ_0 die ganze Familie von Differentialgleichungen, die sich ergibt, wenn ϵ aus einem Intervall I_ϵ stammt, welches die Fälle $\epsilon = 0$ und $\epsilon = \epsilon_0$ beinhaltet. Die Lösungen von

$$x'' + \Omega^2 x - \epsilon x^3 = \Gamma \cos \tau \tag{1}$$

sind nun Funktionen $x(\epsilon, \tau)$ von τ und ϵ. Versuchen Sie eine Darstellung der Lösungen der DGL (1) zu erhalten, indem Sie eine Potenzreihe in ϵ ansetzen

$$x(\epsilon, \tau) = x_0(\tau) + \epsilon x_1(\tau) + \epsilon^2 x_2(\tau) + \dots$$

deren Koeffizienten $x_i(\tau)$ nur von τ abhängen.

c) Um Gleichungen für die $x_i(\tau), i = 0, 1, 2, \dots$ zu erhalten, setzen Sie den Potenzreihenansatz in (1) ein. Da die DGL (1) für alle $\epsilon \in I_\epsilon$ gelten soll, erhalten Sie z.B. $x_0'' + \Omega^2 x_0 = \Gamma \cos \tau$ als Gleichung für x_0. Finden Sie die entsprechenden Gleichungen für x_1 und x_2.

Suchen Sie nun nach periodischen Lösungen mit der Periode 2π. Es soll also für alle $\epsilon \in I_\epsilon$ und alle τ gelten: $x(\epsilon, \tau + 2\pi) = x(\epsilon, \tau)$. Gemäß dem gemachten Potenzreihenansatz reicht es dann aus, wenn für alle τ

$$x_i(\tau + 2\pi) = x_i(\tau) \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

gilt. Diese Forderung zusammen mit den Gleichungen aus c) reicht aus, um die Lösungen zu ermitteln. Nehmen Sie nun an, dass $\Omega \notin \mathbb{N}$. Die Lösungen der Differentialgleichung für x_0 sind Ihnen bekannt. Sie lauten

$$x_0(\tau) = a_0 \cos \Omega\tau + b_0 \sin \Omega\tau + \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \cos \tau$$

wobei a_0 und b_0 Konstanten sind.

d) Welche Werte müssen a_0 und b_0 annehmen, damit die Lösung $x_0(\tau)$ 2π-periodisch wird? (Hinweis: Beachten Sie, dass $\Omega \notin \mathbb{N}$)

e) Setzen Sie die Lösung aus d) in Ihre Differentialgleichung für x_1 ein. Zeigen Sie, dass die resultierende Gleichung für x_1 wie folgt geschrieben werden kann:

$$x_1'' + \Omega^2 x_1 = \frac{\Gamma^3}{(\Omega^2-1)^3}\left(\frac{3}{4}\cos\tau + \frac{1}{4}\cos 3\tau\right)$$

f) Machen Sie für die Lösung von e) den Ansatz $x_1(\tau) = A\cos\tau + B\cos 3\tau$, setzen Sie ihn in die DGL für x_1 ein und bestimmen Sie die Konstanten A und B.

g) Formulieren Sie mit Hilfe der gewonnenen Ergebnisse die Approximation für $x(\epsilon,\tau)$ bis zur ersten Ordnung in ϵ.

Hausaufgabe 4: (7 Punkte)

Aus der Vorlesung ist Ihnen eine explizite Formel für das eindimensionale Gauß'sche Wellenpaket bekannt: $\psi(x,t) = M(x,t)e^{i\phi(x,t)}$ mit der Amplitude

$$M(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}\sqrt{\sigma_x}}\exp\left[-\frac{(x-x_0-v_0t)^2}{4\sigma_x^2}\right]$$

und der Phase

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\hbar}\left[p_0 + \frac{\sigma_p^2}{\sigma_x^2}\frac{t}{2m}(x-x_0-v_0t)\right](x-x_0-v_0t) + \frac{p_0}{2\hbar}v_0t + \frac{\alpha}{2}$$

wobei α gegeben ist durch $\tan\alpha = \frac{2}{\hbar}\frac{\sigma_p^2}{m}t$.

a) Verifizieren Sie diese Formel für $t=0$, indem Sie den Ausdruck

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)\psi_p(x-x_0,t)dp$$

für $t=0$ durch Integration berechnen. Dabei ist

$$\psi_p(x,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et-px)\right]$$

eine Schrödinger-Welle und

$$f(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}\sqrt{\sigma_p}}\exp\left[-\frac{(p-p_0)^2}{4\sigma_p^2}\right]$$

eine Gauß'sche Spektralfunktion.

b) Prüfen Sie durch anschließende Integration von $|\psi(x,0)|^2$ über die gesamte x-Achse, dass das Gauß'sche Wellenpaket zum Zeitpunkt $t=0$ mit den angegebenen Vorfaktoren korrekt auf 1 normiert ist.

(Hinweis: Führen Sie im Exponenten eine quadratische Ergänzung durch, um auf ein Integral der Form $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-\beta)^2} dx$ zu kommen, dessen Wert Sie aus einer Integraltabelle ermitteln können. Sie können annehmen, dass für den Fall $t = 0$ die Heisenbergsche Unschärferelation $\sigma_p \sigma_x \geq \frac{\hbar}{2}$ mit Gleichheitszeichen gilt.)