Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 7

Hausaufgaben zum 06.06.11

Hausaufgabe 13:(10 Punkte)

Die Pauli-Matrizen

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

sind definiert als

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a.) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[\sigma_i, \sigma_j] \qquad i = 1...3, j = 1...3$$

und die Antikommutatoren

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i.$$

b.) Zeigen Sie dass diese Matrizen die Beziehung

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

erfüllen. Folgern Sie aus dieser Beziehung, dass

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{a} \cdot \vec{b}\mathbf{1} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

c.) Zeigen Sie $e^{i\alpha\sigma_k} = \cos(\alpha) + i\sigma_k \sin(\alpha) \quad \alpha \in \mathbb{C},\ k = 1, 2, 3$

d.) Zeigen Sie, dass jede 2×2 Matrix M in der Form

$$M = m_0\mathbf{1} + \sum_{i=1,2,3} m_i\sigma_i$$

ausdrücken lässt. Bestimmen Sie die Koeffizienten m_0 und m_i.

e.) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von σ_i.

f.) Berechnen Sie

(i) $\sigma_i^\dagger$,

(ii) $\mathrm{Sp}(\sigma_i)$,

(iii) $\det(\sigma_i)$,

(iv) σ_i^T

Hausaufgabe 14:(5 Punkte)

Der Zustand eines Teilchens der Masse m werde durch die Wellenfunktion $\varphi(x)$ beschrieben, die eine stationäre Eigenfunktion zum Hamilton-Operator $H = \frac{p_x^2}{2m} + V(x)$ mit den Eigenwert E ist. Es gilt

$$\varphi(x) = Axe^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}}$$

a.) Berechnen Sie die Normierungkonstante A.

b.) Bestimmen Sie mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung das Potential $V(x)$ und die Eigenenergie E. Es gelte $V(0) = 0$.