Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 6

Präsenzaufgaben am 23.05.11, Hausaufgaben zum 30.05.11

Minitest 4:

M1) Berechnen Sie $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+1}{x^2+1}dx$ (Cauchy-Hauptwert:$\mathcal{P}$)

M2) Berechnen Sie $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos^2(ax)dx$

M3) Berechnen Sie $\oint_{\mathcal{C}}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}dz$, wobei $|a|<1$ ist und $\mathcal{C}$ den Einheitskreis bezeichnet.

M4) Bestimmen Sie die Polstellen und Residuen der Funktion $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}$.

Präsenzaufgabe 8:

a) Zeigen Sie

$$[A,BC]=B[A,C]+[A,B]C$$
$$[A,B+C]=[A,B]+[A,C]$$

b) Gegeben seien die Leiteroperatoren beim harmonischen Oszillator

$$a^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x-i\frac{1}{m\omega}p)$$

$$a=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x+i\frac{1}{m\omega}p)$$

Berechnen Sie die folgenden Kommutatoren, wobei N der Besetzungszahloperator ist und H der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators: (siehe Vorlesung)

i) $[a,(a^\dagger)^2]$

ii) $[a^2,a^\dagger]$

iii) $[N,a]$

iv) $[N,N^2]$

v) $[H,a^\dagger]$

vi) $[a,f(a^\dagger)]$ und $[a^\dagger,f(a^\dagger)]$ wobei $f(x)=\sum_n\frac{1}{n!}f_nx^n$

Präsenzaufgabe 9:

In einem quantenmechanischen Oszillatorpotential bewegt sich in einer Dimension ein Teilchen der Masse m.

a) Geben Sie den Hamiltonoperator H in zweiter Quantisierung an.

b) Wie sieht das Eigenwertspektrum aus?

c) Berechnen Sie die Matrixdarstellung für die Operatoren $\hat{p}^2$ und $\hat{x}^2$.

Hausaufgabe 12:(15 Punkte)

Der Hamiltonoperator des verschobenen linearen harmonischen Oszillators besitzt die Form

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \gamma\sqrt{2m\hbar\omega^3}x$$

wobei $\gamma \geq 0$ ein dimensionslose reelle Konstante ist.

a) Berechnen Sie die exakten Eigenwerte $E_n(\gamma)$ und die exakten Eigenvektoren $|\psi_n(\gamma)\rangle$ von H und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Fall $\gamma = 0$.

b) Zeichnen Sie den Potentialverlauf und die Energieeigenwerte für den ungestörten Oszillator mit dem Potential $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ und für den verschobenen Oszillator mit dem Potential $U(x,\gamma) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \gamma\sqrt{2m\hbar\omega^3}x$.

c) Berechnen Sie die Matrixelemente von $H_1 = -\gamma\sqrt{2m\hbar\omega^3}x$ für die Zustände φ_n des verschobenen Oszillators.

Hinweis: Drücken Sie den Operator H_1 durch den Erzeugungsoperator $b^\dagger$ bzw. den Vernichtungsoperator b aus. Benutzen Sie die Formeln:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(b^\dagger + b), \qquad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(b^\dagger - b)$$

$$b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad b^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Achtung

Am Dienstag, den 24. Mai, findet um 12:00 Uhr eine Fragestunde zur Klausurvorbereitung im Raum 437 statt. Bitte bereiten Sie entsprechende Fragen zum Stoff vor!

Blatt 6 Theo 4 Julian Bergmann

15

14

H 12

a) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \gamma\sqrt{2m\hbar\omega^3}\,x$

$= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 - \frac{2\gamma}{m\omega^2}\sqrt{2m\hbar\omega^3}\,x\right)$

$= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x - \frac{\gamma}{m\omega^2}\sqrt{2m\hbar\omega^3}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{2m\omega^2}\left(\sqrt{2m\hbar\omega^3}\right)^2$

$= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x - \gamma\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\right)^2 - \gamma^2\hbar\omega$

$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x - \gamma\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\right)^2 - \gamma^2\hbar\omega$

$\Rightarrow H\varphi = E\varphi \Leftrightarrow \left(\frac{d}{dx^2} - \frac{m^2}{\hbar^2}\omega^2\left(x-\gamma\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\right)^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} + \frac{2m\omega\gamma^2}{\hbar}\right)\varphi = 0$

$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2}{\hbar^2}\omega^2 \overbrace{\left(x-\gamma\sqrt{\tfrac{2\hbar}{m\omega}}\right)^2} + \frac{2mE'}{\hbar^2}\right)\varphi(x) = 0$ aus VL bekannt

$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2^n n!\,b}}\, e^{-\frac{\left(x-\gamma\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\right)^2}{2b^2}} \cdot H\left(\left(x-\gamma\sqrt{\tfrac{2\hbar}{m\omega}}\right)\frac{1}{b}\right)$ ✓

$b := \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

4/5

Unterschied hier: $E' = E + \gamma^2\hbar\omega \doteq \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$

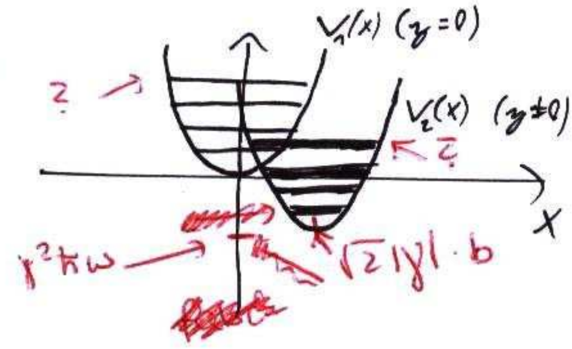
$\Rightarrow E = \hbar\omega(n + \frac{1}{2} - \gamma^2)$ ✓

$\Rightarrow$ E nach unten um $\hbar\omega\gamma^2$ verschoben (unten/y-Ri)

$\Rightarrow$ EF um $\gamma\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$ verschoben (~~rechts~~/x-Ri) ✓

sorry! da $\gamma \geq 0$

b)



15

5

c) $H_1 = -\gamma x\sqrt{2m\hbar\omega^3}$

? $x_{nn'} = \langle\varphi_n|x|\varphi_{n'}^*\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n'+1}\,\delta_{nn'+1} + \sqrt{n'}\,\delta_{nn'-1}\right)$

$H_{1,nn'} = -\gamma\sqrt{2m\hbar\omega^3}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n'+1}\,\delta_{nn'+1} + \sqrt{n'}\,\delta_{nn'-1}\right)$

$= -\gamma\sqrt{\hbar^2\omega^2}(\dots) = -\gamma\hbar\omega\cdot\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \sqrt{n} \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{n} & 0 \end{pmatrix}$

✓

5/5