Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 6

Präsenzaufgaben am 23.05.11, Hausaufgaben zum 30.05.11

Minitest 4:

M1) Berechnen Sie $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^2+1} dx$ (Cauchy-Hauptwert:$\mathcal{P}$)

M2) Berechnen Sie $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2(ax) dx$

M3) Berechnen Sie $\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} dz$, wobei $|a| < 1$ ist und $\mathcal{C}$ den Einheitskreis bezeichnet.

M4) Bestimmen Sie die Polstellen und Residuen der Funktion $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$.

Präsenzaufgabe 8:

a) Zeigen Sie

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$
$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$$

b) Gegeben seien die Leiteroperatoren beim harmonischen Oszillator

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x - i\frac{1}{m\omega}p)$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x + i\frac{1}{m\omega}p)$$

Berechnen Sie die folgenden Kommutatoren, wobei N der Besetzungszahloperator ist und H der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators: (siehe Vorlesung)

i) $[a, (a^\dagger)^2]$

ii) $[a^2, a^\dagger]$

iii) $[N, a]$

iv) $[N, N^2]$

v) $[H, a^\dagger]$

vi) $[a, f(a^\dagger)]$ und $[a^\dagger, f(a^\dagger)]$ wobei $f(x) = \sum_n \frac{1}{n!} f_n x^n$

Präsenzaufgabe 9:

In einem quantenmechanischen Oszillatorpotential bewegt sich in einer Dimension ein Teilchen der Masse m.

a) Geben Sie den Hamiltonoperator H in zweiter Quantisierung an.

b) Wie sieht das Eigenwertspektrum aus?

c) Berechnen Sie die Matrixdarstellung für die Operatoren $\hat{p}^2$ und $\hat{x}^2$.

Hausaufgabe 12:(15 Punkte)

Der Hamiltonoperator des verschobenen linearen harmonischen Oszillators besitzt die Form

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \gamma\sqrt{2m\hbar\omega^3}x$$

wobei $\gamma \geq 0$ ein dimensionslose reelle Konstante ist.

a) Berechnen Sie die exakten Eigenwerte $E_n(\gamma)$ und die exakten Eigenvektoren $|\psi_n(\gamma)\rangle$ von H und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Fall $\gamma = 0$.

b) Zeichnen Sie den Potentialverlauf und die Energieeigenwerte für den ungestörten Oszillator mit dem Potential $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ und für den verschobenen Oszillator mit dem Potential $U(x, \gamma) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \gamma\sqrt{2m\hbar\omega^3}x$.

c) Berechnen Sie die Matrixelemente von $H_1 = -\gamma\sqrt{2m\hbar\omega^3}x$ für die Zustände φ_n des verschobenen Oszillators.

Hinweis: Drücken Sie den Operator H_1 durch den Erzeugungsoperator $b^\dagger$ bzw. den Vernichtungsoperator b aus. Benutzen Sie die Formeln:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(b^\dagger + b), \qquad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(b^\dagger - b)$$

$$b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad b^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Achtung

Am Dienstag, den 24. Mai, findet um 12:00 Uhr eine Fragestunde zur Klausurvorbereitung im Raum 437 statt. Bitte bereiten Sie entsprechende Fragen zum Stoff vor!