Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 10

Präsenzaufgaben am 20.06.11, Hausaufgaben zum 27.06.11

Minitest 6:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

M1) Welche Bedingungen müssen erfüllt sein für $A = A^\dagger$?

M2) Berechnen Sie den hermiteschen und den anti-hermiteschen Anteil von A.

M3) Berechnen Sie die Spur $\mathrm{Sp}(A)$.

Präsenzaufgabe 12:

Gegeben sei der Hamiltonoperator des linearen harmonischen Oszillators

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

zu welchem eine Störung

$$H_1 = \lambda \frac{m^2\omega^2}{\hbar} x^4$$

hinzutritt. Der Hamiltonoperator des anharmonischen Oszillators ist dann gegeben als $H = H_0 + H_1$. Berechnen Sie die Energiekorrekturen dieses anharmonischen Oszillators, die von H_1 herrühren.

(Hinweis: Günstig ist die Verwendung der Besetzungszahldarstellung.)

Präsenzaufgabe 13:

Gegeben sei nochmals der Hamiltonoperator des linearen harmonischen Oszillators

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Für den Grundzustand sei eine Testfunktion

$$\psi_a(x) = \begin{cases} (a^2 - x^2)^2 & |x| \leq a \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die von einem Parameter a abhängt, gegeben.

Berechnen Sie eine Abschätzung für die Grundzustandsenergie gemäß

$$E' = \frac{\langle \psi_a(x)|H|\psi_a(x)\rangle}{\langle \psi_a(x)|\psi_a(x)\rangle}$$

und optimieren Sie den Parameter a, indem Sie E' nach a ableiten. Berechnen Sie E' für den optimalen Parameter und vergleichen Sie mit der exakten Grundzustandsenergie.

Hausaufgabe 19: (6 P.)
Ein Teilchen bewegt sich in einer Dimension in dem gestörten Oszillator-Potential

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + cx^3$$

a) Welche Parität hat das Störpotential $V_s(x) = cx^3$? Was folgt daraus für die Matrixelemente?

b) Berechnen Sie die Energieeigenwerte in erster Ordnung Störungstheorie.

c) Berechnen Sie die Energieeigenwerte in zweiter Ordnung Störungstheorie.

(Hinweis: Stellen Sie die Ortskoordinate durch die Operatoren a und $a^\dagger$ dar.)

Hausaufgabe 20: (6 P.)
Ein neutrales Wasserstoffatom mit einem Elektron wird durch den Hamiltonoperator

$$H = -\frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2 - \hbar c\alpha_f \frac{1}{r}$$

beschrieben, wobei der Atomkern (Proton mit $M \gg m_e$) als unendlich schwer angenommen wird. Die Feinstrukturkonstante ist $\alpha_f = \frac{e^2}{\hbar c}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sim \frac{1}{137.0381}$; $\hbar c = 1.9732 \cdot 10^3\,\mathrm{eV\mathring{A}}$ und $m = 5.11 \cdot 10^5$ eV. ($1\mathring{A} = 10^{-10}$ m).

a) Berechnen Sie mit dem Ritz'schen Variationsverfahren die Grundzustandsenergie mit der Testfunktion $\varphi(r) = Ae^{-\mu r}$.

Die Konstante μ ist ein Variationsparameter. Berechnen Sie die Normierungskonstante A. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem experimentellen Wert $E_0 = -13.606$ eV.

b) Berechnen Sie mit der Testfunktion den mittleren quadratischen Radius

$$\langle r^2\rangle = \int d^3r \frac{\varphi^*(r) r^2 \varphi(r)}{\langle \varphi|\varphi\rangle}$$

Vergleichen Sie das Ergebis mit dem Bohrschen Radius $a_B = 0.5298\,\mathring{A}$.

Hausaufgabe 21: (3 P.)
Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Spur einer Matrix:

a) Sp(A)+Sp(B) =Sp($A+B$)

b) Sp(AB) =Sp(BA)

c) Die Spur ist invariant unter unitären Transformationen, d.h. mit $\Omega = U^{\dagger}AU$ gilt Sp(Ω) =Sp(A).