Prof.Dr. H.Lenske
Dr. U.Badarch
Dipl.-Phys. M.Strecker
Institut für Theoretische Physik I

Übungsblatt Nr. 12

Präsenzaufgaben am 04.07.11, Hausaufgaben zum 11.07.11

Präsenzaufgabe 16:
Ein System mit dem Spin $s = 1/2$ und dem magnetischen Moment $\vec{\mu} = \gamma\vec{s}$ mit $\vec{s} = \hbar\vec{\sigma}/2$ befinde sich in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld $\vec{B}$ mit den Komponenten

$$B_x = B_1 \cos(\omega t)$$

$$B_y = B_1 \sin(\omega t)$$

$$B_z = B_0$$

wobei $B_0, B_1 =$const. Der Hamiltonoperator des Systems

$$H(t) = -\vec{\mu}\vec{B}(t)$$

ist also zeitabhängig. Die Eigenzustände des Operators σ_z seien $\sigma_z|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$. Benutzen Sie $\omega_i = -\gamma B_i$, $i = 0, 1$.

a) Leiten Sie für den Ansatz $\psi(t) = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$ für die Wellenfunktion des Systems ein Gleichungssystem mit zeitabhängigen Koeffizienten für die Entwicklungskoeffizienten $a_\pm$ her.

b) Zeigen Sie, dass der Übergang zu den Koeffizienten $b_\pm(t) = e^{\pm i\omega t/2} a_\pm(t)$ zu einem Gleichungssystem mit *zeitunabhängigen* Koeffizienten führt. Welche physikalische Bedeutung hat diese Transformation?

c) Zeigen Sie, dass die Transformation durch den unitären Operator

$$U = \cos(\omega t/2) + i\sigma_z \sin(\omega t/2) = e^{i\omega t\sigma_z/2}$$

beschrieben wird. Geben Sie die Schrödingergleichung für die transformierte Wellenfunktion $\Phi = U\Psi$ an und berechnen Sie die zugehörigen stationären Lösungen. (Hinweis: Das Gleichungssystem stimmt mit dem in b) hergeleiteten überein!)

d) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im Zustand $\Psi(0) = |+\rangle$ vorgegeben. Berechnen Sie für $t > 0$ die Wahrscheinlichkeiten $P_+(t)$ und $P_-(t)$ für das Auftreten der Zustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ in $\Psi(t)$.

Hausaufgabe 24:(15 P.)
Ein Teilchen bewegt sich in drei Dimensionen in dem Potential

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right)$$

a) Diskutieren Sie die Symmetrien des Potentials für die Fälle

(i) $\omega_x \neq \omega_y \neq \omega_z$

(ii) $\omega_x = \omega_y \neq \omega_z$

(iii) $\omega_x = \omega_y = \omega_z$

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$H(\vec{r},\vec{p}) = \sum_i H_i(x_i,p_i)$$

wobei $x_1 = x$, $x_2 = y$ und $x_3 = z$. Geben Sie $H_i(x_i,p_i)$ an.

c) Zeigen Sie, dass der Ansatz $\phi(\vec{r}) = \phi_1(x)\phi_2(y)\phi_3(z)$ die Schrödingergleichung löst.

d) Berechnen Sie das Energiespektrum. Diskutieren Sie die Entartungsgrade für die Fälle unter Punkt a).