

8 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 16.6.2010

8.1

Sei $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ beliebige offene Überdeckung von A , A abg. $\Rightarrow X \setminus A$ off.

$\Rightarrow \{(U_i)_{i \in \mathbb{N}}, X \setminus A\} = (v_i)$ ist die offene Überdeckung von X und K .

K kompakt $\Rightarrow \exists V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$ als endliche offene Überdeckung von K

$(V_{i_1} \cup V_{i_2} \cup \dots \cup V_{i_k} \supset K \supset A)$

Also auch V_{i_1}, \dots, V_{i_k} endl. off. Überdeckung von A .

Gilt $\forall j : X \setminus A \neq V_{i_j}$, wird A von endlicher Teilüberdeckung von (U_i) überdeckt.

Gilt $\exists j : X \setminus A \neq V_{i_j}$, so gilt weiterhin $(X \setminus A) \cap A = \emptyset \Rightarrow V_{i_1}, \dots, V_{i_{j-1}}, V_{i_{j+1}}, V_{i_k}$ ist endliche Teilüberdeckung von A . Also ist A kompakt.

Ist A relativ abg. gilt $\exists \tilde{A} \subset X$ abg: $A = K \cap \tilde{A} \Rightarrow A$ abg.

Ist A abg. gilt mit $C := A$, dass $C \cap K = A \Rightarrow A$ rel. abg.

Also ist es nicht wichtig, ob abg. oder rel. abg.

8.2

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8xe^{-x^2-4y^2} + -2x(4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2} \\ 2ye^{-x^2-4y^2} + -8y(4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-x^2-4y^2}(4x^2 + y^2 - 4)x \\ -2e^{-x^2-4y^2}(16x^2 + 4y^2 - 1)y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = 0 \Rightarrow (4x^2 + y^2 - 4)x = (16x^2 + 4y^2 - 1)y = 0 \Rightarrow (x, y)_1 = (0, 0)$$

Ist $x = 0$, so ist auch $4y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$ möglich.

Ist $y = 0$, so ist auch $4x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 1$ möglich.

Ist $4x^2 + y^2 - 4 = 0$, so ist $16x^2 + 4y^2 - 1 \neq 0$, da sonst $4x^2 + 2y^2 - \frac{1}{4} = 0$, also $\frac{1}{4} = 4$.

$$\Rightarrow (x, y) = \{(0, 0), (0, \pm \frac{1}{2}), (\pm 1, 0)\}$$

$$\partial_x^2 f(x, y) = -2(12x^2 + y^2 - 4)e^{-x^2-4y^2} + 4x(4x^3 + y^2x - 4x)e^{-x^2-4y^2}$$

$$= e^{-x^2-4y^2}(-2(12x^2 + y^2 - 4) + 4x(4x^3 + y^2x - 4x))$$

$$= e^{-x^2-4y^2}(-24x^2 - 2y^2 + 8 + 16x^4 + 4y^2x^2 - 16x^2)$$

$$= e^{-x^2-4y^2}(-40x^2 - 2y^2 + 8 + 16x^4 + 4y^2x^2)$$

$$\partial_x \partial_y f(x, y) = -4xye^{-x^2-4y^2} + (-16y)(4x^3 + y^2x - 4x)e^{-x^2-4y^2}$$

$$= e^{-x^2-4y^2}(-4xy + (16y)(4x^3 + y^2x - 4x))$$

$$= e^{-x^2-4y^2}(-4xy + 64yx^3 + 16y^3x - 64xy) = e^{-x^2-4y^2}(64yx^3 + 16y^3x - 68xy)$$

$$\partial_y^2 f(x, y) = -2(16x^2 + 12y^2 - 1)e^{-x^2-4y^2} + (16y)(16x^2y + 4y^3 - y)e^{-x^2-4y^2}$$

$$= e^{-x^2-4y^2}(-2(16x^2 + 12y^2 - 1) + (16y)(16x^2y + 4y^3 - y))$$

$$= e^{-x^2-4y^2}(-32x^2 - 24y^2 + 2 + 256x^2y^2 + 64y^4 - 16y^2)$$

$$= e^{-x^2-4y^2}(-32x^2 - 40y^2 + 2 + 256x^2y^2 + 64y^4)$$

$$\Rightarrow Hess_f(x, y) = e^{-x^2-4y^2} \begin{pmatrix} -40x^2 - 2y^2 + 8 + 16x^4 + 4y^2x^2 & 64x^3y + 16xy^3 - 68xy \\ 64x^3y + 16xy^3 - 68xy & 256x^2y^2 - 32x^2 + 64y^4 - 40y^2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$Hess_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \text{Minima bei } f(0,0)=0$$

$$Hess_f(0, \pm \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{15}{2e} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{e} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kein Minima/Maxima}$$

$$Hess_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{16}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{30}{e} \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \text{Maxima bei } f(\pm 1, 0) = \frac{4}{e}$$

Es gilt $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$, da $f(x, y) \geq 0$.

Also $((0, 0), 0)$ Strikt globales Minimum.

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$$

Mit einem δ , sodass $(1, 0) \in B(\delta, (0, 0))$

und $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(\delta, (0, 0))}) : f(x, y) < f(1, 0) \Rightarrow \overline{B(\delta, (0, 0))}$ kompakt und besitzt Max und Min $((0, 0), (1, 0), (0, 1)) \Rightarrow (\pm 1, 0)$ globales Maxima.

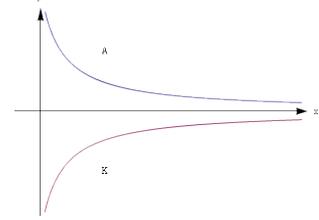
8.3

Sei $\text{dist}(A, K) = 0 \Rightarrow \exists (a_n) \subset A, (k_n) \subset K : \text{dist}(a_n, k_n) = \|a_n - k_n\| \rightarrow 0$
 $(k_n) \subset K$ kompakt $\Rightarrow \exists k_{n_j}$ Teilfolge: $k_{n_j} \rightarrow k^* \in K \Rightarrow \lim \|a_{n_j} - k^*\| = 0$. Mit A abg.
 $\Rightarrow k^* \in A$

Also $k \in A \cap K = \emptyset$ (Widerspruch)

Also $\text{dist}(A, K) > 0$

$A := \{(x, y) | x > 0, y = \frac{1}{x}\}, \quad K := \{(x, y) | x > 0, y = -\frac{1}{x}\}$



8.4

Falls $p(z) = a_0 \Rightarrow$ konstant. klar.

Sonst $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0 : \exists R > 0 : \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R \Rightarrow |p(z)| \geq \frac{|R_n|}{2} |R|^n$, da $|p(z)| \geq |R|^n (|R_n| - \frac{|R_{n-1}|}{2} + \dots - \frac{|R_0|}{|z|^n})$ und mir genügend großen R auch $\frac{|R_{n-1}|}{R} + \dots + \frac{|R_0|}{|R|^n} \leq \frac{|R_n|}{2}$

Außerdem $\exists R > 0 : |R_n|/2R^n \geq |p(0)| = |R_0| \Rightarrow \overline{B(0, R)}$ kompakt

p stetig $\Rightarrow |p(\cdot)|$ hat Min $\leq |p(0)|$ auf $B(0, R)$.

Also ist $\min_{|z| \leq R} |p(z)| = \min_{z \in \mathbb{C}} |p(z)| \Rightarrow$ Die Funktion hat ein globales Minimum auf \mathbb{C}

8.5

$f([0, 1]^2) \subset [0, 1]^2$ klar.

$$\|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(y_2 - y_1) + \frac{y_2^2 - y_1^2 + \sin(x_2) - \sin(x_1)}{12} \\ \frac{1}{3}(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(\cos(y_2) - \cos(y_1)) \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$\leq \left\| \begin{pmatrix} \frac{2}{3}|y_2 - y_1| + \frac{2(y_2 - y_1) + |x_2 - x_1|}{12} \\ \frac{1}{3}|x_2 - x_1| + \frac{1}{2}|y_2 - y_1| \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \frac{11}{12} \|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\|_\infty \Rightarrow \text{Kontraktion. Also}$$

existiert nach Banach genau ein Fixpunkt in $[0, 1]^2$

8.6

a) Nein, da eine Kugel so Definiert ist, dass alle ihre Punkte exakt um den Radius der Kugel vom Mittelpunkt derselben entfernt sind. Also kann der Elefant, dessen „Diagonale“ hier $\sqrt{(4m)^2 + (2m)^2 + (3m)^2} = \sqrt{29m^2} \approx 5.385m$ nur in eine Kugel passen, deren Durchmesser so mindestens $\sqrt{29}$ beträgt, unabhängig von der Dimension der Kugel.

b) Die Diagonale eines Quaders berechnet sich aus $d = \sqrt{\sum_{a=1}^n a^2}$ mit a: eine Seitenlänge

und n: Dimension des Quaders. Für den Einheitswürfel heißt das $d = \sqrt{\sum_{a=1}^n 1^2} = 1 \cdot \sqrt{n}$.

Damit der Elefant nun in den Würfel passt, ist $\sqrt{29m^2} = \sqrt{29}m = 0.01m\sqrt{n} \Rightarrow n = 290000$.

Also ist die benötigte Dimension des Einheitswürfels, um den Elefanten fassen zu können $n=290000$.