

7 Besprechung in Analysis 2 zum Blatt 7, zum 9.6.2010

7.1

a) f ste. bei allen $(x, y) \neq (0, 0)$: klar (aus stetigen Fu'n zusammengesetzt)

Bei $(0, 0)$: $|f(x, y)| \leq \frac{|x|(x^2-3y^2)|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|(x^2+3y^2)}{x^2+y^2} \leq |x| \cdot 3$

Speziell: $|f(x, y)| \rightarrow 0 = f(0, 0)$ falls $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

b) $\frac{f(tu)}{t} = \frac{t^3 \cos(\varphi)(\cos^2(\varphi)-3\sin^2(\varphi))}{t^2 t(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))} = \cos(\varphi)(1-4\sin^2(\varphi))$

$(\partial_u f(0, 0) \text{ ex. f.a.u.}) \quad (\partial_u f)(0, 0) = 0$, falls $\varphi \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$, $(u = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)))$

c) $u \mapsto \partial_u f(0, 0)$ ist nicht linear \Rightarrow f nicht total dbar.

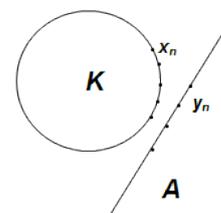
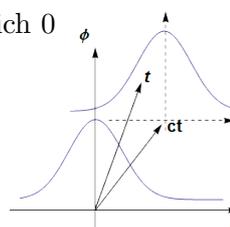
7.2

$$\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$\text{div}(\vec{f}) = 2\alpha < 0$$

3. Komponente vernachlässigt! Mit $\frac{d}{dz} \vec{f}z > 0$ ergibt sich 0

Insgesamt: $\frac{d}{dx} \vec{f}x + \frac{d}{dy} \vec{f}y + \frac{d}{dz} \vec{f}z = 0$



7.3

$u_t + cu_x = 0$, $\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u(t, x) := \phi(x - ct)$

$u_t(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \partial_1 u(t, x) = \phi'(x - ct)(-c)$, $u_x = \phi'(x - ct)$

$(u_t + cu_x)(t, x) = 0$

7.4

a) $f(1, 1) = 0$

$\partial_1 f(x, y) = \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$,

$\partial_2 f(x, y) = \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$

$\partial_2 \partial_1 f(x, y) = 2 \frac{(x+y)^2 - 2y(x+y)}{(x+y)^4} = 2 \frac{x+y-2y}{(x+y)^3} = 2 \frac{x-y}{(x+y)^3} = \frac{-2f(x, y)}{(x+y)^2}$

$\partial_1^2 f(x, y) = \frac{-4y}{(x+y)^3}$, $\partial_2^2 f(x, y) = \frac{4x}{(x+y)^3}$

$(T_{(1,1)}^2 f)(x, y) = 0 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}(x-1, y-1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\eta^2$
 $(\xi = (x-1), \eta = (y-1))$

b) $(T_{(1,1)}^3 f)(x, y) = (T_{(1,1)}^2 f)(x, y) + \underbrace{\sum_{|\alpha|=3} \frac{\partial^\alpha f(1,1)}{\alpha!} * (x-1, y-1)^\alpha}_{=: T_3}$

α	$(3,0)$	$(2,1)$	$(1,2)$	$(0,3)$
$\alpha!$	6	2	2	6

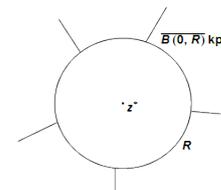
$\partial_1^3 f(1, 1) = \frac{12}{(1+1)^4} = \frac{3}{4}$

$\partial_2^3 f(1, 1) = -\frac{12}{(1+1)^4} = -\frac{3}{4}$

$\partial_1^2 \partial_2 f(1, 1) = \frac{d}{dy} |_{y=1} (\frac{-4y}{(1+y)^3}) = \frac{1}{4}$

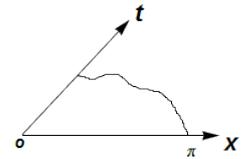
$\partial_1 \partial_2^2 f(1, 1) = -\frac{1}{4}$

$T_3 = \frac{3}{4 \cdot 3 \cdot 2} \xi^3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \xi^2 \eta - \frac{1}{2 \cdot 4} \xi \eta^2 - \frac{3}{4 \cdot 3 \cdot 2} \eta^3 = \frac{1}{8} (\xi^3 + \xi^2 \eta - \xi \eta^2 - \eta^3)$



7.5

- a) Sei $U \subset X$ offen, A rel. offen in $U \Leftrightarrow A$ offen in X .
 Beweis: „ \Rightarrow “: Es ex \tilde{A} off in X , $A = \tilde{A} \cap U$. Somit A offen in X . (endlicher Durchschnitt offener Mengen)
 „ \Leftarrow “: A off. in $X \Rightarrow A \cap U$ rel. offen in U (A offen in X)
- b) „ \Rightarrow “: $U \subset X$ abg. $A \subset U$ rel. abg. $\Rightarrow \exists \tilde{A}$ in X abg., $A = U \cap \tilde{A}$.
 Da U und \tilde{A} abg. in X , ist A abg. in X (Durchschnitt abg. Mengen)
 „ \Leftarrow “: $A \subset X$ abg. $A = A \cap U$, also A rel. abg. (da A abg. in X)



7.6

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^n a_k(t) \sin(kx)$$

- a) $u_t = u_{xx} \Leftrightarrow \sum_k \dot{a}_k(t) \sin(kx) = \sum_k (-k^2 \cdot a_k(t)) \sin(kx)$
 lin. unabh. $\Leftrightarrow \forall k = 1, \dots, n : \dot{a}_k(t) = -k^2 a_k(t)$ (Koeffizientenvergleich!)
 $\Rightarrow a_k(t) = a_k(0) * * e^{-k^2 t}$
- b) $u_{tt} = u_{xx} \Rightarrow \ddot{a}_k(t) = -k^2 a_k(t) \Rightarrow a_k(t) = \frac{a_k}{k} (0) \sin(kt) + a_k(0) \cos(kt)$

8 Hinweise für das neue Blatt 8

- 1) wichtig! Kompakte Menge und abg. Teilmenge drin... relativ oder groß? (nicht wichtig.) abg. teilm. von K_p ist K_p (Überdeckung oder Folgenkompaktheit)
- 3) abg. Menge und K_p Menge inf von Abständen ≥ 0 , positiv oder 0? (vermutlich keine 0, aber Grenzwertig!) (Folge damit Abstände gegen Infimum konvergieren. 2 Folgen. Sei dritte Folge von x gegen x^* , widerspr. bei x^* in A !
- 2) Differenzieren nur, wenn man es muss!
- 4) Vorbereitung auf Vorlesung... (Idee: großer Kreis mit R , dann höchste Potenz dominant für große R , wenn nicht gerade konstant. in Kreisscheibe genügend große Werte.
- 5) Ban. Fixpunktsatz. Leicht durch nicht feine Absch. Zeige $f(x,y)$ liegt wieder drin (Selbstabbildung) und kontrahierend. Dann f genau ein Fixpunkt in dem Bereich.
- 6) Tradition... Elefant ist Quader. Radius 1 cm in hochdimensionalen Kugeln. also isometrische Abbildung (Abstandserhaltung). (Diagonale... Kugel unendlich-Norm- ζ Würfel)