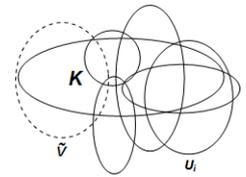


# 8 Besprechung in Analysis 2 zum Blatt 8, zum 16.6.2010



## 8.1

$K \subset X \text{ kp} \Leftrightarrow K \subset X \text{ abg}$ .

Für  $A \subset K : A \subset K \text{ relativ abg} \Rightarrow A \subset X \text{ abg}$ . (Blatt 7)

Bew. A kp: z.B. Zeige folgenkp:

Sei  $(x_n) \in A$  Folge. Da K folgenkp. ex konv. Teilfolge  $(x_{\varphi(n)}) \subset (x_n)$  mit  $\lim x^* \in K$ .

Da A abg, ist  $x^* \in A$ . Somit A folgenkp, A kp.

(In metr. Räumen äquivalent)

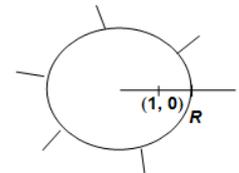
Oder: Sei  $(U_i)_{i \in I}$  off  $\ddot{U}$  von A. Setze  $V := K \setminus A$ . V relativ offen in K, da  $A \in K$  abg.

Es ex.  $\tilde{V} \subset X \text{ offen}, V = K \cap \tilde{V}$ .

$(U_i)_{i \in I}$  zusammen mit  $\tilde{V}$  bilden off  $\ddot{U}$  von K.

Da K kp, ex  $i_1, \dots, i_n \in I : K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \cup \tilde{V}$

Es folgt, da  $V \cap A = \emptyset : A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$



## 8.2

$f(x, y) \geq 0 \forall (x, y), f(0, 0) = 0 \Rightarrow$  bei (0,0) globales Min.

Für Extrema:  $\nabla f(x, y) = 0 = ((8x - 2x(4x^2 + y^2))\exp(\dots), (2y - 8y(4x^2 + y^2))\exp(\dots))$

Also  $x(4 - 4x^2 - y^2) = 0$  und  $y(1 - 16x^2 - 4y^2) = 0$

Lösungen:  $x = y = 0; x = 0, y = \pm \frac{1}{2}; x = \pm$

Falls  $x \neq 0 \neq y : 4x^2 + y^2 = 4, 4x^2 = 4 - y^2, 16x^2 = 16 - 4y^2$  und  $1 - (16 - 4y^2) - 4y^2 = 0$  nicht erfüllbar.

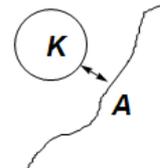
$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} |f(x, y)| = 0$ , Also ex  $R > 1$  mit  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\|_2 \geq R : |f(x, y)| < f(1, 0) = 4e^{-1}$

$Hess_f(0, \pm \frac{1}{2}) = e^{-1} \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$  indefinit, kein Extremum.

Folgt:  $\max_{\|(x,y)\|_2 \leq R} |f(x, y)|$  ist globales Max. von f. ( $\|(x, y)\|_2 \leq R$  ex., ste Fu auf der kp Menge  $\overline{B(0, R)}$ )

Also:  $f(\pm 1, 0) = 4^{-1}, f(0, \pm \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}e^{-1}$

Folgt: globales Maximum bei  $(\pm 1, 0)$



## 8.3

$dist(K, A) := \inf\{d(x, y) | x \in K, y \in A\} > 0$

Annahme:  $dist(\dots) = 0$ . Dann ex. Folgen  $(x_n) \subset K, (y_n) \subset A$  mit  $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$

Da K kp (folgenkp), ex konv Teilf  $(x_{\varphi(n)}) \subset (x_n)$  mit  $\lim x^* \in K$

Es gilt  $d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \rightarrow 0$ , also  $y_{\varphi(n)} \rightarrow x^*$ . Da A abg, ist  $x^* \in A$

Somit  $x^* \in A \cap K$ . Wid zu  $A \cap K = \emptyset$

Beispiel:  $A_1 := \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2, A_2 = \{(x, e^{-x}) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ .

$A_1, A_2$  abg.  $A_1 \cap A_2 = \emptyset, dist(A_1, A_2) = 0$

## 8.4

Falls  $n \geq 1$ , so  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |p(z)| = \infty$  (!)

Also ex.  $R > 1$  mit  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R : |p(z)| > |p(0)|$

Folgt  $\min_{z, |z| \leq R} |p(z)|$  ist globales Min von  $|p|$  ( $z, |z| \leq R$  ex, da  $|p|$  ste Fu auf kp Menge  $\overline{B(0, R)}$ )

Zu (!):  $p(z) = z^n(A_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n})$  mit  $a_n \neq 0$ .

Wähle  $R > 1$  mit  $\frac{\sum_{j=0}^{n-1} |a_j|}{R} \leq \frac{|a_n|}{2}$

Dann für  $z \in \mathbb{C}, |z| \geq R : |p(z)| \geq |z|^n (|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_1|}{|z|}) \geq |z|^n (|a_n| - \frac{\sum_{j=0}^{n-1} |a_j|}{|z|}) \geq |z|^n (|a_n| - \frac{\sum \dots}{R}) = |z|^n \frac{|a_n|}{2}$   
(Für  $|z| \geq \tilde{R} \geq R : |p(z)| \geq \tilde{R}^n \frac{|a_n|}{2}$ )

## 8.5

$Q := [0, 1]^2, f(Q) \subset Q$  (leicht zu zeigen)

$$f(x, y) - f(tx, ty) = \left( \left\| \begin{array}{c} \frac{2}{3}(y - \tilde{y}) + \frac{y^2 + \sin(x) - \tilde{y}^2 - \sin(\tilde{x})}{12} \\ 1/3(x - tx) + \frac{\cos(y) - \cos(\tilde{y})}{2} \end{array} \right\| \right)_{\infty}$$

$$|1.komp| \leq \frac{2}{3}|y - \tilde{y}| + \frac{|y - \tilde{y}||y + \tilde{y}|}{12} + \frac{|x - \tilde{x}|}{12} \leq (\frac{2}{3} + \frac{1}{6})|y - \tilde{y}| + \frac{1}{12}|x - \tilde{x}| \leq \frac{11}{12} \|(x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y})\|_{\infty}$$

$$|2.komp| \leq (\frac{1}{3} + \frac{1}{2})\|(x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y})\|_{\infty} \leq \frac{10}{12}$$

Also f bzgl.  $\|\cdot\|_{\infty}$  kontrahierend (Kontraktionskonstante  $\frac{11}{12}$ )

Nach Banach'scher Fixpunktsatz ex. genau ein Fixpunkt. Erhaltbar durch wiederholte Anwendung von f.

## 8.6

$$E = [0, 400] \times [0, 200] \times [0, 300]$$

a) Würde es  $i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$  geben, mit  $\forall x \in \mathbb{R}^3 : \|i(x) - i(y)\|_{2,n} = \|x - y\|_{2,3}$  und  $i(E) \subset \overline{B_{\|\cdot\|_{2,n}}(0, 1)}$

Dann wäre  $\|i(0, 0, 0) - i(400, 0, 0)\|_{2,n} = 400 \leq 1$ , Wid.

b) Setze  $n := 200^2 + 300^2 + 400^2$ ,

$$\xi := (\underbrace{1, \dots, 1}_{400^2 \text{ mal}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{200^2 + 300^2 \text{ mal}}) \in B_{\|\cdot\|_{\infty, n}}(0, 1)$$

$$\eta := (\underbrace{0, \dots, 0}_{400^2 \text{ mal}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{200^2 \text{ mal}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{300^2 \text{ mal}}) \in B_{\|\cdot\|_{\infty, n}}(0, 1)$$

$$\zeta := (\underbrace{0, \dots, 0}_{400^2 + 200^2 \text{ mal}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{300^2 \text{ mal}}) \in B_{\|\cdot\|_{\infty, n}}(0, 1)$$

$$\text{Def } i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n, i(x, y, z) := x \frac{\xi}{\|\xi\|_{2,n}} + y \frac{\eta}{\|\eta\|_{2,n}} + z \frac{\zeta}{\|\zeta\|_{2,n}}$$

(i ist isometrisch.)  $\Rightarrow i(R) \subset \overline{B_{\|\cdot\|_{\infty, n}}(0, 1)}$

## 9 Hinweise zum neuen Blatt 9

- 1) einfacher Spezialfall 2x2 Matrizen. (indefinit: pos und neg EW, bzw einer 0 wenn pos oder neg definit)  $\langle x, Ax \rangle = \langle (x_1, x_2), A(x_1, x_2) \rangle = l_1 x_1^2 + l_2 x_2^2$  (3D Grad, oben  $q_a(x)$ , Rest überlegen (Variable 0 setzen))
- 2) ähnlich 1. nur nicht immer Fu. 2b) ist schon graph. sonst immer Schnitte ansehen (mit Ebenen) (hyperboloide etc.).
- 3) Torus, also um R radius r mit Rotation (Donut) (schöne Mannigfaltigkeit, 2dim umft, grad idR nicht 0! wenn r=R passt nur noch Gerade durch Torusmitte, dort dann keine Mannigfaltigkeit, grad=0.
- 4) Doppelkegelmantel: defs anschauen, also hyperbene. Nullpunkt krankhaft. Dort Tangentialraum wieder kegelfläche. nicht Mannigfaltig)
- 5) Keplerproblem. kp heißt beschr und abg. abg ist erfüllt. Nullpunkt ist nicht Teil Definition! Grenzwert nicht in Def, also nicht kp. außerhalb r gilt: wann beschr?
- 6) doppelmuldenpotential: bei 0 neg parabel, weiter weg nach oben geöffnet. Niveaumenge skizzieren. Meisten untermannigfalt, paar krankhaft!