Institut für Theoretische Physik
JLU Gießen
C. Fischer, G. Eichmann, C. Popovici

***Blatt 9***
*WiSe 2011/12*
*12. 01. 2012*

## Übungen zur Statistischen Thermodynamik

### Aufgabe 25 (Sommerfeld-Entwicklung):

Wir wollen das folgende Faltungsintegral $I$ mit der Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion $f(E)$ bei niedrigen Temperaturen auswerten:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dE\, g(E) f(E)\,, \qquad f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}+1}\,. \tag{1}$$

Dabei soll $g(E)$ eine beliebige glatte Funktion sein, die für $E \to -\infty$ verschwindet und für $E \gg 1$ höchstens polynomial ansteigt.

(a) Zeigen Sie mit der Stammfunktion $p(E) = \int_{-\infty}^{E} dE'\, g(E')$ zunächst:

$$I = -\int_{-\infty}^{\infty} dE\, p(E) \frac{\partial f}{\partial E}\,.$$

(b) Skizzieren Sie die Ableitung $\partial f/\partial E$. Wo liegen ihre dominanten Beiträge? Entwickeln Sie $p(E)$ um die Stelle $E = \mu$ und beweisen Sie folgende Relation:

$$I = \int_{-\infty}^{\mu} dE\, g(E) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{\beta^{2n}} \left(\frac{d^{2n-1}g}{dE^{2n-1}}\right)_{E=\mu}, \qquad a_n = \int_0^{\infty} dz\, \frac{z^{2n}}{(2n)!}\, \frac{e^z}{(1+e^z)^2}\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass der Sommerfeld-Koeffizient $a_n$ folgendermaßen geschrieben werden kann (Hinweis: geometrische Reihe...):

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2n}} = \left(1 - 2^{1-2n}\right) \zeta(2n)\,, \qquad \zeta(n) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}\,.$$

(c) Werten Sie die Korrekturen niedrigster Ordnung für das Integral $I$ aus, indem Sie die Werte $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$ für die Riemannsche $\zeta-$Funktion einsetzen. Vergleichen Sie mit dem in der Vorlesung angegebenen Ausdruck.

## Aufgabe 26 (Elektronengas):

Die Elektronen im Leitungsband eines metallischen Leiters können näherungsweise als ideales Gas aus $N$ freien, nichtrelativistischen Fermionen beschrieben werden, die im Leitervolumen $V$ eingeschlossen sind. Im thermodynamischen Limes bestimmen sich das großkanonische Potential und die innere Energie daher aus

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE\, g(E)\, \ln\left(1 + e^{-\beta(E-\mu)}\right), \qquad U = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE\, g(E) f(E)\, E\,,$$

wobei die Niveaudichte in der Vorlesung hergeleitet wurde:

$$g(E) = (2s+1)\, \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} \qquad (E \geq 0)\,,$$

und $g(E<0) = 0$. Drücken Sie $g(E)$ durch die Fermi-Energie $E_F$ aus und berechnen Sie für beide Größen $U$ und $\Omega$ die ersten beiden Terme der Sommerfeld-Entwicklung. Geben Sie diese als Funktion der Temperatur und $E_F$ an.

## Aufgabe 27 (Relativistisches Fermiongas):

Gegeben sei ein ideales Fermiongas mit hochrelativistischen Impulsen, d.h. $|\boldsymbol{p}| \gg mc$. Die Ein-Teilchen-Energien sind dann gegeben durch

$$E(\boldsymbol{p}) = \sqrt{c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4} \approx c|\boldsymbol{p}|.$$

Wie lauten in diesem Fall der Fermiimpuls und die Fermienergie? Welche innere Energie $U$ und welchen Druck $p$ hat das System im Grenzfall $T = 0$?