Institut für Theoretische Physik
JLU Gießen
C. Fischer, G. Eichmann, C. Popovici

Blatt 3
WiSe 2011/12
10.11.2011

Übungen zur Statistischen Thermodynamik

Aufgabe 8 (Chemisches Potential)

Betrachten Sie N *ununterscheidbare* klassische Punktteilchen der Masse m, die im Volumen V eingeschlossen sind und nicht miteinander wechselwirken. Berechnen Sie das chemische Potential $\mu = \mu(N, V, E)$ und zeigen Sie, daß sich μ als Funktion von Temperatur und Teilchendichte $n = N/V$ alleine darstellen läßt. Begründen Sie, daß das chemische Potential bei fester Temperatur mit der Teilchendichte zunimmt. Was ergibt sich für *unterscheidbare* Teilchen?

Aufgabe 9 (Photonengas)

Betrachten Sie ein Gas von N (ununterscheidbaren) Photonen mit Dispersionsrelation $E = c|\mathbf{p}|$, die in ein Volumen V eingeschlossen sind. Berechnen Sie im mikrokanonischen Ensemble die Temperatur T und den Druck p des Gases als Funktion der Energiedichte $\varepsilon = E/V$. Zeigen Sie $p = \varepsilon/3$.
Hinweis: Rechnen Sie klassisch und drücken Sie die Entropie durch die Größe

$$\lambda(N) = \int\limits_{\mathbb{R}^{3N}} d(\mathbf{u_1} \dots \mathbf{u_n}) \Theta \left(1 - \sum_{i=1}^{N} |\mathbf{u_i}| \right)$$

aus. Für die vorliegende Rechnung muß $\lambda(N)$ nicht explizit bestimmt werden. Beachten Sie auch, daß jeder Impulszustand zweifach (Helizitäts-)entartet ist.

Aufgabe 10 (Atmosphärenmodell)

Betrachten Sie ein System aus N identischen, aber klassisch unterscheidbare Teilchen der Masse m, die sich unter dem Einfluß der Schwerkraft $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e_z}$ in einem (unendlich hohen) Zylinder der Grundfläche A befinden. Die Grundfläche liege in der xy-Ebene und kann z.B. mit einem Abschnitt der Erdoberfläche identifiziert werden, wobei die Abnahme der Gravitation mit der Höhe vernachlässigt werden soll. Das System sei thermisch isoliert und die Gesamtenergie E vorgegeben.

a. Berechnen Sie das klassische Phasenraumvolumen $W(E)$ des Systems sowie die Gesamtentropie S.

   Hinweis: Nutzen Sie dafür das Integral:

$$\int\limits_{x_i \geq 0, \sum\limits_i x_i \leq \lambda} \left(\lambda - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^k dx_1 \dots dx_n = \frac{k!}{(n+k)!} \lambda^{n+k}.$$

b. Berechnen Sie die Temperatur des Systems als Funktion der Energie E.

c. Berechnen Sie den Mittelwert der kinetischen Energie $<E_{kin}>$ pro Teilchen, und bestimmen Sie hieraus die mittlere Höhe $<z>$ der Teilchenverteilung. Welche Höhe können die Teilchen maximal erreichen?

Besprechung: Blatt 3, Theo 5 vom Mittwoch, den 10.11.2011

Aufgabe 8

$$\mu = -T\frac{\partial S}{\partial N}, \quad S(E) = kN(\ln(\frac{V}{N}(\frac{4\pi mE}{3\hbar^2 N})^{\frac{3}{2}}) + \frac{5}{2})$$

$$\frac{\partial S}{\partial N} = k(\ln(\frac{V}{N}(\frac{4\pi mE}{3\hbar^2 N})^{\frac{3}{2}})) + kN(-\frac{5}{2N}), \quad E = \frac{3}{2}NkT, \quad \frac{N}{V} = 1$$

$$= k\ln(\frac{V}{N}(\frac{2\pi mkT}{\hbar^2 n^{\frac{2}{3}}})^{\frac{3}{2}}) = 3/2k\ln((\frac{2\pi mkT}{\hbar^2 n^{\frac{2}{3}}})^{\frac{3}{2}})$$

$$\Rightarrow \mu = -\frac{3}{2}kT\ln(\frac{2\pi mkT}{\hbar^2 n^{\frac{2}{3}}})$$

$$\lambda_T = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi mkT}}, \quad \Rightarrow \mu = kT\ln(\lambda_T^3 n)$$

$$\sum_{unt} = N!\sum_{alt} \quad \Rightarrow \quad S_{unt} = S_{alt}(N\ln(N) + \ln(N)), \quad \Rightarrow \quad \mu_{unt} = kT\ln(\frac{\lambda^3 n}{\mathbb{N}})$$

Aufgabe 9

$$H = \sum_i x|p_i|, \quad \sum(E) = \frac{1}{N!}\int_{H<E} d\Gamma = \frac{1}{N!}\int\prod_{i=1}^{N} 2\prod_{k=1}^{3} dp_k dq_k/2\pi\hbar$$

$$= \frac{V^N}{N!2^3(\pi\hbar)^{3N}}\int_{H<E}\prod_{k=1}^{3N} dp_k = \frac{V^N}{N!2^3(\pi\hbar)^{3N}}\int\prod_{k=1}^{3N} dp_k\theta(E - \sum_j x|p_j|)$$

$$u_k = \frac{c}{E}p_k \quad , \quad du_k = \frac{c}{Ed}p_k$$

$$... = \frac{V^N}{N!2^3(\pi\hbar)^{3N}}\frac{E^{3N}}{c^{3N}}\underbrace{\int\prod_k du_k\theta(1 - \sum|u_i|)}_{\lambda(N)}$$

$$S = k\ln(\sum) = k(3N\ln(E) + Nln(V) + rest(N))$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} = \frac{3kN}{E}, \quad -\frac{\partial E}{\partial V}|_N = p = \frac{\partial E}{\partial S}|_V\frac{\partial S}{\partial V}|_N = T\frac{\partial S}{\partial V} = T(\frac{kN}{V}) = \frac{E}{3V} = \frac{\varepsilon}{3}$$

Aufgabe 10

a) N Teilchen ununterscheidbar. F zusätzlich: $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$

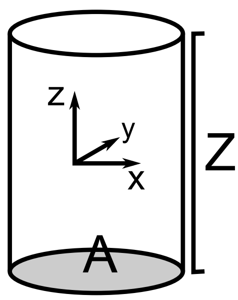
$$W(E) = \int\frac{d^{3N}pd^{3N}q}{(2\pi\hbar)^{3N}} = \int\frac{d^{3N}pd^{3N}q}{(2\pi\hbar)^{3N}}\theta(E - \frac{\vec{p}^2}{2m} - mgz)$$

$$= \frac{A^N}{(2\pi\hbar)^{3N}}\int d^N z \underbrace{\int d^{3N}}_{\int d\Omega_{3N-1}\int dpp^{3N-1}} p\theta(2mE - \vec{p}^2 - 2m^2gz)$$

$$= \frac{A^N}{(2\pi\hbar)^{3N}}\int d^N z\frac{(\sqrt{2mE-2m^2gz})^{3N}}{3N\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}S_{3N-1}\theta(\frac{E}{mg} - z)$$

$$= \frac{A^N}{(2\pi\hbar)^{3N}}\frac{S_{3N-1}}{3N}(2m^2g)^{\frac{3N}{2}}(\frac{E}{mg})^{\frac{3N}{2}+N}\frac{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}{\Gamma(\frac{3N}{2}+N+1)}$$

$$S = k\ln(W(E)) = ...$$



b) $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}|_{N,V} = \frac{\partial S}{\partial E}((3N/2+1)\ln(E)) = \frac{5kN}{2E}$

c) $g(E) = \frac{\partial W}{\partial E} = \int d\Gamma \delta(E-H), \quad \rho = \frac{1}{g(E)}\delta(E-H), \quad E_{kin} = \sum_i^{3N} \frac{\vec{p}_i^2}{2mN}$

$< E_{kin} >= \frac{1}{g(E)} \int \frac{d^{3N}qd^{3N}p}{(2\pi\hbar)^{3N}} \frac{\vec{p}^2}{2m} \delta(E - \sum_j \frac{\vec{p}_j}{2m} - mgz)$

$= \frac{A^N}{g(E)h^{3N}2mN} \int d^N z \int dp p^{3N-1} p^2 \delta(E - \frac{p^2}{2m} - mgz) S_{3N-1}$

$= \frac{A^N S_{3N-1}}{g(E)h^{3N}N} \int d^N z \int dp^2 (p^2)^{\frac{3N}{2}} \delta(2Em - p^2 - 2m^2gz)$

$= \frac{A^N S_{3N-1}}{g(E)h^{3N}N} \int d^N z (2mE - 2m^2gz)^{\frac{3N}{2}} = \frac{A^N}{g(E)} \frac{(2m^2g)^{\frac{3N}{2}}}{2Nh^{3N}} S_{3N-1} \frac{(\frac{3N}{2})!}{(N+\frac{3N}{2})!} (\frac{E}{mg})^{\frac{5N}{2}}$

$g(E) = \frac{\partial W}{\partial E} = \frac{5}{2} Nmg (\frac{E}{mg})^{\frac{3N}{2}} ... \quad \Rightarrow < E_{kin} >= \frac{3}{5}\frac{E}{N}$

$\frac{E}{N} =< E_{kin} > + < V >, \quad < V >=< z > mg \quad \Rightarrow < z >= \frac{kT}{mg}$

$z_{max} = \frac{E}{mg} \quad (V = 0)$