Institut für Theoretische Physik
JLU Gießen
C. Fischer, G. Eichmann, C. Popovici

Blatt 8
WiSe 2011/12
22. 12. 2011

Übungen zur Statistischen Thermodynamik

Aufgabe 22 (Joule-Thomson-Prozess):

Wir interessieren uns für die *Inversionstemperatur*, jenseits derer ein Gas durch gedrosselte Entspannung gekühlt werden kann. Betrachten Sie dazu den Joule-Thomson-Prozess für ein Van-der-Waals-Gas mit der Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{V}\right)(V - b) = NkT\,.$$

Der Joule-Thomson-Koeffizient ist gegeben durch

$$\delta = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{V}{C_p}\,(\alpha T - 1)\,, \quad \text{wobei} \quad \alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

(a) Drücken Sie die Zustandsgleichung zunächst durch die dimensionslosen Variablen $\tilde{p} = p/p_c$, $v = V/V_c$ und $t = T/T_c$ aus (siehe Vorlesung). Berechnen Sie den isobaren Ausdehnungskoeffizienten α.

(b) Welche Kurven erhält man für $\tilde{p}(v)$ und $\tilde{p}(t)$, wenn $\delta = 0$ gilt? In welchen Gebieten in der $\{\tilde{p}, v\}$ bzw. $\{\tilde{p}, t\}-$Ebene ist $\delta > 0$?

(c) Kann man Sauerstoff ($T_c = 154K$) bei Zimmertemperatur und Atmosphärendruck mit Hilfe des Joule-Thomson-Verfahrens kühlen, unter der Annahme, dass er sich wie ein Van-der-Waals-Gas verhält? Wie sieht es mit Helium aus ($T_c = 5.2K$)?

Aufgabe 23 (Statistischer Operator):

Ein statistischer Operator ρ ist definiert durch die Eigenschaften: $\rho = \rho^\dagger$, $\rho \geq 0$, $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $\rho = \sum_i p_i\, |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ mit $||\psi_i|| = 1$ alle diese Eigenschaften erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass aus der Definition für ρ folgt:

- $\rho^2 \leq \rho$, wobei $\rho^2 = \rho$ für Reinzustände.
- $\rho(\lambda) = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2$ für $0 \leq \lambda \leq 1$ (Konvexität).

(c) Gegeben sei ein quantenmechanisches System, das nur zwei Zustände, z.B. zwei Spineinstellungen, einnehmen kann ('qubit'). Der entsprechende Hilbertraum werde durch die Basisvektoren $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ aufgespannt. Welche Eigenschaften muss der Vektor $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^3$ erfüllen, damit

$$\rho(\boldsymbol{P}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right)$$

ein statistischer Operator ist? σ_i bezeichnet dabei die drei Pauli-Matrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wie überträgt sich die Eigenschaft der Konvexität für $\rho(\boldsymbol{P})$ auf $\boldsymbol{P}$? Wodurch wird ein Reinzustand charakterisiert? Wie lautet der Mittelwert des Spinvektors $\boldsymbol{\sigma}/2$? (Hinweis: $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$).

(d) Betrachten Sie nun zwei Spins, die zu einem Singlettzustand der Art

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\right)$$

gekoppelt sind. Beschreibt der zugehörige statistische Operator einen Reinzustand? Berechnen Sie den statistischen Operator im Untersystem des ersten Spins, indem Sie die Teilspur $\rho_A = \mathrm{tr}_B(\rho_{AB})$ über den zweiten Spin bilden. Erhalten Sie einen Reinzustand oder einen gemischten Zustand?

Aufgabe 24 (Ideales Quantengas):

Die großkanonische Zustandssumme eines idealen Quantengases ist gegeben durch

$$Z = \mathrm{tr}\, e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}, \qquad \text{mit} \quad \hat{H} = \sum_p \epsilon_p \hat{n}_p\,, \quad \hat{N} = \sum_p \hat{n}_p\,.$$

Berechnen Sie daraus sowohl für Bosonen als auch für Fermionen:

(a) die mittlere Besetzungszahl $n(\epsilon_p) = \langle \hat{n}_p \rangle$,

(b) deren mittlere quadratische Schwankung $(\Delta n(\epsilon_p))^2 = (\langle \hat{n}_p^2 \rangle - \langle \hat{n}_p \rangle^2)/\langle \hat{n}_p \rangle^2$,

(c) die innere Energie U.