Institut für Theoretische Physik
JLU Gießen
C. Fischer, G. Eichmann, C. Popovici

Blatt 10
WiSe 2011/12
19. 01. 2012

Übungen zur Statistischen Thermodynamik
(***Schriftlich***)

Aufgabe 28: Bose-Einstein-Kondensation (10P)

Gegeben sei ein ideales, spinloses Bosegas mit Ein-Teilchen-Energien $E = a|\boldsymbol{p}|^r$, das in einem $d-$dimensionalen 'Volumen' $V = L^d$ eingeschlossen ist.

(a) **(1P)** Bestimmen Sie die Zustandsdichte $g(E)$.

(b) **(3P)** Bestimmen Sie das großkanonische Potential Ω und das Verhältnis $U/(pV)$ unter Verwendung der polylogarithmischen Funktionen

$$g_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx\, \frac{x^{\alpha-1}}{z^{-1}\, e^x - 1}\,,$$

wobei $g_\alpha(1) = \zeta(\alpha)$ die Riemannsche $\zeta-$Funktion ist.

(c) **(4P)** Zeigen Sie, dass die mittlere Teilchendichte $n = \langle N \rangle / V$ als Funktion der Temperatur und der Fugazität $z = e^{\beta\mu}$ gegeben ist durch

$$n = \frac{1}{V}\, \frac{z}{1-z} + \frac{S_d}{rh^d}\, \frac{\Gamma(d/r)}{(a\beta)^{d/r}}\, g_{d/r}(z)\,, \qquad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\,.$$

Skizzieren Sie n als Funktion von z. Welche Bedingungen müssen die Parameter d und r erfüllen, um für $V \to \infty$ Bose-Einstein-Kondensation zu ermöglichen? Kann sich in $d = 2$ Dimensionen ein Bose-Einstein-Kondensat bilden?

(d) **(2P)** Wie hängt im Kondensationsgebiet ($z = 1$), sofern es existiert, die Zahl N_0 der Bosonen im Grundzustand von der Temperatur ab? Wie lautet die kritische Temperatur, wenn die Teilchendichte n festgehalten wird?

Aufgabe 29: Weißer Zwerg (10P)

Hat ein Stern seinen für die Kernfusion zur Verfügung stehenden Brennstoff verbraucht, kollabiert er, da der thermische Druck dem Gravitationsdruck nicht mehr standhalten kann. Falls seine Masse nicht zu groß ist, entsteht ein weißer Zwerg, der aus einer extrem komprimierten, ladungsneutralen 'Suppe' von ^{4}He$-$Atomrümpfen und relativistischen Elektronen besteht. Dadurch stellt sich ein neues Gleichgewicht ein, in dem der Fermidruck der Elektronen dem Graviationsdruck der Heliumkerne die Waage hält. Wegen $kT \ll E_F$ kann der weiße Zwerg näherungsweise als entartetes Fermigas ($T = 0$) im Sternvolumen V modelliert werden.

(a) **(1P)** Berechnen Sie die Dichte $n = N/V$ der Elektronen, indem Sie die Impulskugel bis zum Fermiimpuls p_F aufintegrieren. Drücken Sie n und p_F durch die Masse M und den Radius R des Sterns aus.

(b) **(2P)** Zeigen Sie, dass die relativistische Energie des Elektrongases gegeben ist durch

$$E_C = \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 mc^2 \int_0^{x_F} dx\, x^2 \sqrt{1+x^2}\,, \quad \text{wobei} \quad x_F = \frac{p_F}{mc}\,.$$

(c) **(3P)** Untersuchen Sie den nichtrelativistischen ($x_F \ll 1$) und ultrarelativistischen Grenzfall ($x_F \gg 1$), indem Sie das obige Integral jeweils in eine Reihe entwickeln. Zeigen Sie, dass der erste Term im nichtrelativistischen Fall der Ruheenergie entspricht. Zeigen Sie, dass die Energie inklusive erstem Korrekturterm im ultrarelativistischen Fall die Form

$$E_C = \frac{c_1}{R}\left(1 + c_2 R^2\right)$$

hat, und bestimmen Sie c_1 und c_2.

(d) **(1P)** Wie lautet der Nullpunktsdruck der Elektronen für $x_F \gg 1$?

(e) **(3P)** Für eine gegebene Masse M kann der Radius R des Sterns bestimmt werden, indem man die Gesamtenergie E minimiert (was in unserem Fall wegen $T = 0$ zur Minimierung der freien Energie äquivalent ist). E ist die Summe der kinetischen Energie E_C der Elektronen und der Gravitationsenergie E_G:

$$E = E_C + E_G = E_C - \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\,.$$

Betrachten Sie E im ultrarelativistischen Fall als Funktion von R. Zeigen Sie, dass ein weißer Zwerg nur unterhalb der Chandrasekhar-Grenzmasse M_0 existieren kann:

$$M \le M_0 = \left[\frac{\hbar c}{3\pi}\left(\frac{9\pi}{8m_p}\right)^{4/3} \frac{5}{3G}\right]^{3/2}\,,$$

wobei m_p die Masse des Protons ist. Eine rigorose Rechnung würde $M_0 \approx 1.4\, M_\odot$ liefern; welchen Wert erhalten Sie mit den hier getroffenen Näherungen? Geben Sie den resultierenden Sternradius R als Funktion der Masse M an.

Bitte geben Sie die Aufgaben (jeder Student seine eigenen Lösungen) bis Do, 19.01, 12.00 Uhr, bei Frau Monika Weingärtner, Büro 419, schriftlich ab.