Institut für Theoretische Physik
JLU Gießen
C. Fischer, G. Eichmann, C. Popovici

Blatt 4
WiSe 2011/12
17.11.2011

Übungen zur Statistischen Thermodynamik
(schriftlich)

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Betrachten Sie N Punktteilchen der Masse m, die nicht miteinander wechselwirken und in dem Volumen V eingeschlossen seien. Für ihre Gesamtenergie soll gelten:

$$E_0 \leq \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{N} p_i^2 \leq E_0 + \delta E_0.$$

a. (**1p**) Zeigen Sie, dass der Entartungsgrad durch

$$\delta\Gamma(N, E_0, \delta E_0) = \frac{V^N}{(2\pi\hbar)^{3N}} \frac{(2\pi m)^{3N/2}}{\Gamma(3N/2)} E_0^{3N/2-1} \delta E_0$$

gegeben ist.

Hinweis: Nutzen Sie das Phasenraumvolumen aus der Aufgabe **A5**:

$$\frac{V^N}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \cdot \frac{(2\pi m E)^{3N/2}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2} + 1\right)}.$$

b. (**1p**) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Energie des ersten Teilchens im Intervall $(E_1, E_1 + dE_1)$ liegt, gegeben ist durch:

$$p(E_1) dE_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(3N/2)}{\Gamma(3(N-1)/2)} \frac{(E_0 - E_1)^{3(N-1)/2-1} E_1^{1/2}}{E_0^{3N/2-1}} dE_1.$$

c. (**2p**) Verifizieren Sie, dass $\int dE_1 p(E_1) = 1$.

Hinweis: Nutzen Sie das Integral

$$\int_0^1 dx (1-x)^n x^a = \frac{n! \Gamma(a+1)}{\Gamma(a+n+2)}.$$

d. (**2p**) Zeigen Sie, dass $<E_1> = \int dE_1 p(E_1) = E_0/N$.

e. (**2p**) Zeigen Sie, dass für die Schwankung gilt:

$$\Delta E_1 = \left[<E_1^2> - <E_1>^2\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2(N-1)}{N^2(3N+2)}}\, E_0.$$

f. (**2p**) Zeigen Sie, dass für große N die Verteilung $p(E_1)$ durch die Maxwellverteilung

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\Delta E_1}\right)^{3/2}\exp\left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{E_1}{\Delta E_1}\right\}E_1^{1/2}dE_1$$

genähert werden kann.

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Gegeben seien N wechselwirkungsfreie und unterscheidbare Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen harmonischen Oszillatorpotential der Frequenz ω. Die zugehörige Hamiltonfunktion lautet

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x_i^2\right).$$

a. (**4p**) Zeigen Sie für die Oberfläche S_n sowie das Volumen B_n der Einheitskugel in n Dimensionen die Formeln

$$S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad B_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Verifizieren Sie die Spezialfälle $n = 1, 2, 3$.

Hinweis: Betrachten Sie das n-dimensionale Gauss-Integral $I_n = \int d^n x \exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{x}^2\right]$ und führen Sie Kugelkoordinaten ein.

b. (**4p**) Zeigen Sie, dass im Rahmen der klassischen Mechanik das Phasenraumvolumen $W(E)$ des Bereichs mit Energie kleiner als E gegeben ist durch

$$W(E) = \left(\frac{2\pi E}{\omega}\right)^N \frac{1}{N!}.$$

c. (**2p**) Berechnen Sie die Zahl $\Sigma(E)$ der Quantenzustände mit Energie kleiner als E und zeigen Sie für $E \gg N\hbar\omega$ näherungsweise

$$W(E) \approx (2\pi\hbar)^N\Sigma(E).$$

Bitte geben Sie die Aufgaben (jeder Student seine eigenen Lösungen) bis Do 17.11, 12.00 Uhr, bei Frau Monika Weingärtner, Büro 419, schriftlich ab.