Institut für Theoretische Physik
JLU Gießen
C. Fischer, G. Eichmann, C. Popovici

Blatt 5
WiSe 2011/12
24.11.2011

Übungen zur Statistischen Thermodynamik

Aufgabe 13 (Harmonischer Oszillator)

Betrachten Sie ein System aus N klassischen Teilchen der Masse m, die sich in einem dreidimensionalen harmonischen Oszillatorpotential der Kreisfrequenz ω befinden. Das System werde durch Kopplung an ein Wärmebad auf einer konstanten Temperatur T gehalten. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T, N)$ und die mittlere Energie $U(T, N)$.

Aufgabe 14 (Isotherme Atmosphäre)

Ein klassisches monoatomares ideales Gas aus N Teilchen der Masse m befinde sich im Schwerefeld der Erde. Das Gas sei auf einen Zylinder mit Grundfläche A und beliebiger Höhe beschränkt und durch eine konstante Temperatur T charakterisiert.

a. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T, N)$ und die mittlere Energie $U(T, N) = \langle H \rangle$.

b. Berechnen Sie den Mittelwert der kinetischen Energie $\langle E_{kin} \rangle$ *eines* Teilchens und daraus die mittlere Steighöhe der Teilchen.

c. Berechnen Sie die Teilchendichte $n(h)$ als Funktion der Höhe h.

d. Berechnen Sie den Gasdruck $p(h)$ als Funktion der Höhe h, indem Sie annehmen, dass die Zustandsgleichung der idealen Gase auch lokal gelte.

Aufgabe 15 (Thermischer Mittlewert)

Eine kleine Masse m werde an eine Federwaage mit der Federkonstanten K gehängt. Die Masse befinde sich im homogenen Schwerfeld mit Beschleunigung g und im Gleichgewicht mit einem thermischen Ensemble der Temperatur T. Das Potential ist durch

$$V(z) = \frac{K}{2} z^2 + mgz$$

gegeben. Berechnen Sie den termischen Mittelwert $\overline{z} = \langle z \rangle$ und die mittlere thermische Schwankung $\Delta z = \langle (z - \overline{z})^2 \rangle^{1/2}$ als Funktion der Temperatur. Welche Massen m kann man noch messen, wenn man für die Messbarkeit $\overline{z} \geq \Delta z$ voraussetzen muss?

Aufgabe 16 (Energiefluktuationen)

a. Zeigen Sie, dass das Schwankungsquadrat der Energie im kanonischen Ensemble allgemein durch

$$(\Delta H)^2 = \langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle = kT^3 \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$

gegeben ist, wobei $F = F(T, V, N)$ die freie Energie ist.

Besprechung: Blatt 5, Theo 5 vom Mittwoch, den 23.11.2011

Aufgabe 13

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} + \frac{mw^2}{2} x_i^2$$

$$\begin{aligned}
Z_n &= \int d\Gamma e^{-\beta H} = \int d\Gamma e^{-\frac{H}{kT}} = \frac{1}{h^{3N}N!} \int d^{3N}p d^{3N}q \exp\left(\sum_{i=1}^{3N} p_i^2\right) \exp\left(\frac{\beta m w^2}{2} \sum_{i=1}^{3N} x_i^2\right) \\
&= \frac{1}{h^{3N}N!} \int d^{3N}p \exp\left(-\frac{\beta}{2m} \sum_{i=1}^{3N} p_i^2\right) \int d^{3N}q \exp\left(-\frac{\beta m w^2}{2} \sum_{i=1}^{3N} x_i^2\right) \\
&= \frac{1}{h^{3N}N!} \left(\int dp \exp\left(-\frac{\beta}{2m} p^2\right)\right)^{3N} \left(\int dx \exp\left(-\frac{\beta m w^2}{2} x^2\right)\right)^{3N} \\
&= \frac{1}{h^{3N}N!} \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{\frac{3N}{2}} \left(\frac{2}{\beta m w^2}\pi\right)^{\frac{3N}{2}} = \frac{1}{h^{3N}N!} \left(\frac{2\pi}{\beta w}\right)^{3N} = \left(\frac{2\pi k^{3N}}{wh}\right) \frac{1}{N!} T^{3N}
\end{aligned}$$

$$U = \langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Z) = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln(Z) = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln(T^{3N}) = kT^2 \frac{3N}{T} = 3NkT$$

Aufgabe 14

a) $H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + mgz_i$

$$\begin{aligned}
Z &= \int d\Gamma \exp\left(-\beta H\left(p,q\right)\right) = \int \frac{d^{3N}p d^{3N}q}{(2\pi\hbar)^{3N}N!} \exp\left(-\frac{1}{kT} \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}\right) \exp\left(-mg \sum_{i=1}^{N} z_i\right) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi m kT}^{3N}}{(2\pi\hbar)^{3N}N!} \int \exp\left(-\sum_i \frac{mgz_i}{kT}\right) d^{3N}q = c\left(A \int_0^\infty \exp\left(-\sum \frac{mgz_i}{kT}\right) dz\right)^N \\
&= c\left(A\left[\exp\left(-\sum_i mgz_i\right)\left(-\frac{kT}{mg}\right)\right]_0^\infty\right)^N = \frac{\sqrt{2\pi kT}^{3N}}{(2\pi\hbar)^{3N}N!} \left(\frac{AkT}{mg}\right)^N
\end{aligned}$$

$$U = kt \frac{\partial}{\partial T} \ln\left(Z\right) = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\ln\left(T\right)\frac{3N}{2} + \ln\left(T\right)N\right)$$

$$= kT^2 \frac{1}{T}\left(\frac{3N}{2} + 3N\right) = kT\left(\frac{3N}{2} + N\right) = \frac{5}{2}NkT$$

b)
$$\begin{aligned}
\langle E_{kin} \rangle &= \frac{\int\int d^{3N}p d^{3N}q \frac{p^2}{2m} \exp\left(-\frac{1}{kT}\frac{p^2}{2m}\right)\exp(-mgz)}{\int\int d^{3N}q d^{3N}p \exp\left(-\frac{1}{kT}\frac{p^2}{2m}\right)\exp(-mgz)} \\
&= \frac{1}{2m} \frac{\int d^3p p^2 \exp\left(-\frac{1}{kT}\frac{p^2}{2m}\right)}{\int d^3p \exp\left(-\frac{1}{kT}\frac{p^2}{2m}\right)} \\
&= \frac{1}{2m} \frac{\int_0^\infty dp p^4 \exp\left(-\frac{1}{kT}\frac{p^2}{2m}\right)}{\int_0^\infty dp p^2 \exp\left(-\frac{1}{kT}\frac{p^2}{2m}\right)} \frac{\int\int d\phi d\theta \sin(\theta)}{\int\int d\phi d\theta \sin(\theta)} \\
&= \frac{1}{2m} \frac{\frac{1}{2}(2mkT)^{\frac{5}{2}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{1}{2}(2mkT)^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3}{2}kT
\end{aligned}$$

$$U = \frac{5}{2}NkT = N\left(\langle E_{kin}\rangle + \langle E_{pot}\rangle\right) = N\left(\frac{3}{2}kT + mg\langle z\rangle\right) \quad \Rightarrow \langle z \rangle = \frac{kT}{mg}$$

c) $n\left(h\right) = \frac{\int_0^\infty dz_1 \exp(-\beta mgz_1)\delta(z-h)}{\int dz_1 \exp(-\beta z_1 mg)} = \frac{\exp(-\beta mgh)}{\frac{1}{mg\beta}} = mg\beta \exp\left(-\beta mgh\right)$

$n_{phys}\left(h\right) = \frac{N}{A}\frac{mg}{kT} \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = n\left(0\right) \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$

d) $p(h)$; lokal gilt: $pV = NkT$

$$\Rightarrow \quad p\left(h\right) = n\left(h\right)kT = \frac{Nmg}{AkT}kT\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = \frac{Nmg}{A}\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = p\left(0\right)\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

Aufgabe 15

$$V(z) = \frac{K}{2}z^2 + mgz$$

$$< z > \; = \frac{1}{z}\int d\Gamma \exp\left(-\beta H\right)z = \frac{\int dzz\exp\left(-\beta\left(\frac{K}{2}z^2+mgz\right)\right)}{\int dz\exp\left(-\beta\left(\frac{K}{2}z^2+mgz\right)\right)} = \frac{\int dzz\exp\left(-\beta\frac{K}{2}\left(z+\frac{mg}{K}\right)^2+\frac{\beta m^2g^2}{2K}\right)}{\int dz\exp\left(-\beta\frac{K}{2}\left(z+\frac{mg}{K}\right)^2+\frac{\beta m^2g^2}{2K}\right)}$$

$$= \frac{\int dx\left(x-\frac{mg}{K}\right)\exp\left(-\frac{\beta K}{2}\right)}{\int dx\exp\left(-\beta\frac{K}{2}x^2\right)} = \frac{\frac{1}{\beta K}\int dx\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(-\frac{\beta K}{2}x^2\right)-\frac{mg}{K}\int dx\exp\left(-\frac{\beta K}{2}x^2\right)}{\int dx\exp\left(-\frac{\beta K}{2}x^2\right)} = -\frac{mg}{K}$$

$$< (z-\bar{z})^2 > \; = \frac{\int dz\left(z+\frac{mg}{K}\right)^2\exp\left(-\beta\left(\frac{K}{2}z^2+mgz\right)\right)}{\int dz\exp\left(-\beta\left(\frac{K}{2}z^2+mgz\right)\right)} - \left(\frac{mg}{K}\right)^2$$

$$= \frac{\frac{2}{K}\int dx\frac{\partial}{\partial\beta}\exp\left(-\frac{\beta K}{2}x^2\right)+\left(\frac{mg}{K}\right)^2\int dx\exp\left(-\beta\frac{K}{2}x^2\right)}{\int dx\exp\left(-\frac{\beta k}{2}x^2\right)}$$

$$= \frac{\frac{-2}{K}\frac{\partial}{\partial\beta}\int dx\exp\left(-\frac{\beta K}{2}x^2\right)}{\int dx\exp\left(-\frac{\beta K}{2}x^2\right)} = \frac{-\frac{2}{K}\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{\frac{2\pi}{K\beta}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{K\beta}}} = \frac{1}{K\beta} = \frac{kT}{K}$$

Aufgabe 16

$(a\&b)$:

$$(\Delta H)^2 = < (H - < H >)^2 > = < H >^2 - < H^2 > \stackrel{!}{=} -kT^3\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$

$$-kT^3\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = -kT^3\frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(-kT\ln\left(Z\right)\right) = -kT^3\frac{\partial}{\partial T}\left(\ln\left(Z\right)k - kT\frac{\partial}{\partial T}\ln\left(Z\right)\right)$$

$$= -kT^3\frac{\partial}{\partial T}\left(-\ln\left(Z\right)k - \frac{U}{T}\right) = -kT^3\left(-k\frac{U}{kT^2} + \frac{U}{T^2} - \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial T}U\right) = kT^2\frac{\partial}{\partial T}U$$

$$= kT^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\int d\Gamma\exp((-\beta H))H}{\int d\Gamma\exp(-\beta H)}\right)$$

$$= kT^2\frac{\int d\Gamma\exp(-\beta H)H^2\frac{1}{kT^2}\int d\Gamma\exp(-\beta H)-\int d\Gamma\exp(-\beta H)H\int d\Gamma\exp(-\beta H)\frac{H}{kT^2}}{\left(\int d\Gamma\exp(-\beta H)\right)^2}$$

$$= \frac{\int d\Gamma\exp(-\beta H)H-\int d\Gamma\exp(-\beta H)-\left(\int d\Gamma\exp(-\beta H)H\right)^2}{\left(\int d\Gamma\exp(-\beta H)\right)^2}$$

$$= \frac{\int d\Gamma\exp(-\beta H)H^2}{\int d\Gamma\exp(-\beta H)} - \left(\frac{\int d\Gamma\exp(-\beta H)H}{\int d\Gamma\exp(-\beta H)}\right)^2 = < H^2 > - < H >^2$$

$$\frac{\sqrt{<H^2>-<H>^2}}{<H>} = \frac{\sqrt{kT^2\frac{\partial}{\partial T}U}}{<H>} \sim \frac{\sqrt{\frac{\partial}{\partial T}U}}{U} \sim \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$