Institut für Theoretische Physik
JLU Gießen
C. Fischer, G. Eichmann, C. Popovici

Blatt 1
WiSe 2011/12
27.10.2011

Übungen zur Statistischen Thermodynamik

Aufgabe 1 (Binomialverteilung)

Ein ideales Gas bestehe aus $N = 10^{23}$ Molekülen, die sich unabhängig voneinander in einem Volumen V bewegen. Man betrachte ein Teilvolumen v:

a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $w_N(n)$, n Moleküle in v zu finden?
   Zeigen Sie, daß $\sum\limits_{n=0}^{N} w_N(n) = 1$.

b. Wie groß ist die mittlere Teilchenzahl $\bar{n} = <n>$ im Volumen v?

c. Berechnen Sie das relative Schwankungsquadrat $<(n-\bar{n})^2> /\bar{n}$. Wie groß ist dies für die Fälle $v = V, v = V/2$ und $v = 10^{-10}V$?

Aufgabe 2 (Besetzungswahrscheinlichkeit)

Betrachten Sie n Teilchen, die auf $N > n$ Zellen mit gleicher Wahrscheinlichkeit verteilt werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß sich genau ein Teilchen in jeder der ersten n Zellen befindet. Die Berechnung soll unter drei verschiedenen Annahmen durchgeführt werden:

a. die Teilchen sind unterscheidbar und in jeder Zelle dürfen sich beliebig viele Teilchen befinden;

b. die Teilchen sind ununterscheidbar und in jeder Zelle dürfen sich beliebig viele Teilchen befinden;

c. die Teilchen sind ununterscheidbar und in jeder Zelle darf sich maximal ein Teilchen befinden.

Aufgabe 3 (Ableitung der Stirling'schen Formel)

a. Die Euler'sche Γ Funktion ist durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t}$$

definiert. Zeigen Sie durch partielle Integration, dass für $x = n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n!\,,\ n \in \mathbb{N}.$$

b. Leiten Sie die Stirling'sche Formel ab:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Nutzen Sie dafür die *Sattelpunktsnäherung*. Dabei wird das Parameterintegral

$$I(\lambda) = \int_{x_1}^{x_2} dx e^{-\lambda f(x)}$$

durch eine Gauß-Kurve approximiert, i.e. wenn die Funktion $f(x)$ bei $x = x_0$ ein Minimum besitzt, gilt (unabhängig von den Integrationsgrenzen x_1, x_2):

$$I(\lambda) \simeq e^{-\lambda f(x_0)} \int_{x_1}^{x_2} dx e^{-\frac{\lambda}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2} = e^{-\lambda f(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{\lambda}{2} f''(x_0) y^2} = e^{-\lambda f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{f''(x_0)\lambda}}.$$

Besprechung: Blatt 1, Theo 5 vom Mittwoch, den 26.10.2011

Aufgabe 1

a) $W_N(n) = \Gamma_N(n) p^n (1-p)^{N-n} = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}, \quad p = \frac{v}{V}, \quad N = 10^{23}$ Teilchen

$\sum_{n=0}^{N} w_N(n) = 1 = (p + (1-p))^N$

b) $< n >= \sum_{n=0}^{N} w_N(n) n = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} n = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} q^{N-n} (\frac{\partial}{\partial p} p^n) p$

$= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} q^{N-1} p^n = p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N = pN1^{N-1} = pN = \frac{v}{V} N$

oder kurz: $E(w_N) = \sum_i E(w_i) = NE(w_i) = Np$

c) kurz:

$Var(w_N) = NVar(w_1)$,

Wert	Wahrscheinlichkeit
0	1-p
1	p

$\Rightarrow Var(w_1) = (0-p)^2(1-p) + (1-p^2)p = p(1-p)[p+q]$

$\Rightarrow Var(w_N) = Np(1-p) =< (n-\bar{n})^2) > \Rightarrow \frac{<(n-\bar{n})^2)>}{\bar{n}} = 1 - p = 1 - \frac{v}{V}$

Vorlesung:

$< (n-\bar{n})^2) >=< (n^2 - 2n\bar{n} + \bar{n}^2) >=< n^2 > - \underbrace{2 < n\bar{n} >}_{\bar{n}<n>} + \underbrace{< \bar{n}^2 >}_{\bar{n}^2} =< n^2 > -2\bar{n}^2 +$

$\bar{n}^2 =< n^2 > - < n >^2$

$v = V \Rightarrow 0, \quad v = \frac{1}{2}V \Rightarrow \frac{1}{2}, \quad v = 10^{-10}V \Rightarrow 1 - 10^{-10}$

Aufgabe 2

a) $\frac{n!}{N^n}$:

N^n Möglichkeiten gesamt, 1 Möglichkeit besetzter Stellen wie gewünscht, besetzende Teilchen können aber Permutieren $\Rightarrow n!$

Beispiel: $N = 3,\ n = 2,\ K = \{A, B\}$ $\Rightarrow$

X	X	O
A	B	O
B	A	O

$\Rightarrow$ 2 Möglichkeiten

b) $\frac{1}{\binom{N}{n}}$:

$\binom{N}{n}$ Möglichkeiten n aus N zu ziehen oder n auf N zu verteilen

1 Möglichkeit wie gewünscht, Permutation nicht bemerkbar $\Rightarrow 1$

Beispiel: $N = 3,\ n = 2,\ K = \{A, A\}$ $\Rightarrow$

X	X	O
A	A	O

$\Rightarrow$ 1 Möglichkeit

c) $\frac{1}{\binom{n+N-1}{n}}$:

$\binom{n+N-1}{n}$ Möglichkeiten n aus N zu ziehen oder n auf N zu verteilen wenn Teilchen unterscheidbar!

Beispiel, Zeichenfolgendarstellung:

|...||| (3 von 3Teilchen in der ersten von 3 Zellen) $\Rightarrow \underbrace{AAA}_{n}\underbrace{BB}_{N-1}$

|..|.|| (2 von 3 Teilchen in der ersten, eines in der 2. von 3 Zellen) $\Rightarrow AABAB$

$\Rightarrow n+N-1$ Plätze, $(n+N-1)!$ Kombinationen

B und A unterscheidbar $\Rightarrow \frac{(n+N-1)!}{n!(N-1)!} = \binom{n+N-1}{n}$

Aufgabe 3

a) Induktion:

$x=1: \quad \Gamma(1) = \int\limits_0^\infty dte^{-t} = [-e^{-t}]_0^\infty = 1 = 0!$

$x \to x+1: \quad \Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty dtt^x e^{-t} = \underbrace{[-t^x e^{-t}]_0^\infty}_{0} + x\int\limits_0^\infty dtt^{x-1}e^{-t} = x\Gamma(x)$

(rek Def. von $x!$)

b) $I(\lambda) = \int\limits_{t_1}^{t_2} dte^{-\lambda f(t)} = \int\limits_0^\infty dtt^x e^{-t} = \int\limits_0^\infty dte^{xln(t)-t} = \Gamma(x+1) = x!$

$\Rightarrow f(t) = t - xln(t) \quad \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{x}{t} \quad \Rightarrow t_0 = x$

$f''(t) = \frac{x}{t^2}, \quad f''(t_0) = \frac{1}{x} > 0$

$\Rightarrow I(\lambda) \approx e^{xln(x)-x}\sqrt{\frac{2\pi}{\frac{x}{x^2}}} = e^{-x}x^x\sqrt{2\pi x} \approx x!$