Institut für Theoretische Physik
JLU Gießen
C. Fischer, G. Eichmann, C. Popovici

Blatt 7
WiSe 2011/12
08.12.2011

Übungen zur Statistischen Thermodynamik
(schriftlich)

Aufgabe 20 (Reales Gas)

Betrachten Sie ein reales Gas aus Molekülen der Masse m, die einer Paarwechselwirkung $U(|x_i - x_j|)$ unterliegen. Die Dynamik soll im Folgenden klassisch behandelt werden, wobei Rotationsfreiheitsgrade der Moleküle vernachlässigt werden.

a.(**3p**) Leiten Sie für die kanonische Zustandssumme den Ausdruck

$$Z_N(T,V) = \frac{1}{N!\lambda_T^{3N}} \int_V d^3x_1 \dots d^3x_N \exp\left\{ -\beta \sum_{i<j} U(|x_i - x_j|) \right\}$$

ab, wobei $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi mkT}$ die thermische Wellenlänge ist.

b.(**3p**) Betrachten Sie zur weiteren Auswertung die großkanonische Zustandssumme

$$\mathscr{Z}(T,V,\zeta) = \sum_{N=0}^{\infty} \zeta^N Z_N(T,V),$$

mit der Fugazität $\zeta = e^{\beta\mu}$. Zeigen Sie für das Großkanonische Potential $\Omega(T,V,\mu)$ die folgende Entwicklung nach der Fugazität

$$\Omega(T,V,\mu) = -kT\frac{V}{\lambda_T^3}\left\{ b_1(T,V)\zeta + b_2(T,V)\zeta^2 + \dots \right\},$$

und drücken Sie die ersten beiden Koeffizienten b_1 und b_2 durch die kanonischen Zustandssummen aus.

Hinweis: Betrachten Sie ζ als formalen Parameter und entwickeln Sie $\ln \mathscr{Z} = \ln[1 + \sum_{N=1}^{\infty} \zeta^N Z_N]$ um $\zeta = 0$. Nutzen Sie dafür, dass für $|x| < 1$ gilt $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n/n$.

c.(**1p**) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass für den ersten Koeffizienten gilt $b_1(T,V) = 1$. Was bekommt man für $b_2(T,V)$ für das ideale Gas?

Hinweis: Das großkanonische Potential für das ideale Gas (**Aufgabe 17**) lautet:

$$\Omega(T,V,\zeta) = -kT\frac{V}{\lambda_T^3}\zeta.$$

d.(**2p**) Zeigen Sie, dass für das reale Gas mit der mittleren Teilchendichte $n = \frac{\langle N \rangle}{V}$ gilt

$$n\lambda_T^3 - 2n^2 b_2 \lambda_T^6 + \mathcal{O}(n^3) = \zeta.$$

e.(**1p**) Leiten Sie mit Hilfe von Teilaufgabe d. die *Virialentwicklung* der Zustandsgleichung des realen Gases nach der Teilchendichte n ab,

$$\frac{p}{kT} = n\left\{1 + nB(T) + \mathcal{O}(n^2)\right\},$$

$$\text{wobei} \quad B(T) = -\lambda_T^6 \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V}\left[Z_2(T,V) - \frac{1}{2}Z_1^2(T,V)\right].$$

Aufgabe 21 (Landau Niveaux)

Betrachten Sie ein Gas geladener Teilchen mit Masse m und Ladung q, das in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T und einem Teilchenbad mit chemischem Potential μ steht. Das System befinde sich ferner in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = Be_z$ und sei in z-Richtung auf das Intervall $z \in [0, \Lambda]$ beschränkt; in der xy-Ebene sei das Gas räumlich unbegrenzt.

a.(**5p**) Zeigen Sie, dass der Einteilchen-Hamiltonoperator in Zylinderkoordinaten die Form

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\rho^2 - \omega L_z$$

annimmt, wobei $\omega = qB/2mc$ die Larmor-Frequenz ist, L_z die Drehimpulskomponente in z-Richtung und $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Hinweis: Nutzen Sie für die Hamiltonfunktion die Vorschrift:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$$

zur Beschreibung der Wechselwirkung eines Teilchens mit einem elektromagnetischen Potential ("minimale Substitution").

b.(**5p**) Das zu H gehörige Einteilchenspektrum ist durch

$$E(k,n,l) = \frac{\hbar^2 k^2 \pi^2}{2m\Lambda^2} + 2\hbar\omega\left[n + \frac{1}{2} + \frac{|l| + l}{2}\right], \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{Z}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass für die kanonische Zustandssumme eines einzelnen Teilchen $Z = \sum\limits_{k,n,l} e^{-\beta E(k,n,l)}$ gilt:

$$Z = \frac{1}{4\sinh(\beta\hbar\omega)} \frac{\Lambda}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{\pi\beta}}\left[2M + 1 + \frac{1}{\tanh(\beta\hbar\omega)}\right].$$

Nehmen Sie hierzu $l \geq -M$ an. Berechnen Sie, unter Vernachlässigung der Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Teilchen, die großkanonische Zustandssumme und das thermodynamische Potential $\Omega(T, \Lambda, \mu, B)$.

Bitte geben Sie die Aufgaben (jeder Student seine eigenen Lösungen) bis Do 08.12, 12.00 Uhr, bei Frau Monika Weingärtner, Büro 419, schriftlich ab.