Institut für Theoretische Physik
JLU Gießen
C. Fischer, G. Eichmann, C. Popovici

Blatt 2
WiSe 2011/12
03.11.2011

Übungen zur Statistischen Thermodynamik

Aufgabe 4 (Entropie)

Gegeben seien N unabhängige harmonische Oszillatoren, deren quantenmechanischer Zustand durch die Besetzungszahlen $n_1, \ldots, n_N$ gekennzeichnet wird. Die Gesamtenergie beträgt somit

$$E = \frac{N}{2}\hbar\omega + M\hbar\omega$$

mit $M \equiv n_1 + \cdots + n_N$. Zeigen Sie, daß die Zahl der Zustände mit dieser Energie durch

$$\Gamma(N, M) = \frac{(N + M - 1)!}{M!(N - 1)!}$$

gegeben ist, wobei angenommen wurde, daß die Oszillatoren unterscheidbar sind. Betrachten Sie nun den Grenzfall $M \gg 1$, $N \gg 1$ und berechnen Sie

$$\frac{1}{T} = \frac{d}{dE} \ln \Gamma(N, M)$$

als Funktion der Energie E und der Grundzustandsenergie $E_0 = N\hbar\omega/2$.

Aufgabe 5 (Phasenraumvolumen)

Betrachten Sie N (unterscheidbare) Punktteilchen der Masse m, die im Volumen V eingeschlossen sind und nicht miteinander wechselwirken. Zeigen Sie, daß die Zahl der Zustände, deren Energie kleiner als E ist, durch

$$\frac{V^N}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \cdot \frac{(2\pi m E)^{3N/2}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2} + 1\right)}$$

gegeben ist.

Aufgabe 6 (Liouville-Gleichung)

Betrachten Sie ein System von klassischen Teilchen mit insgesamt f Freiheitsgraden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ seien die Teilchen gemäß der Dichte $\rho_0(\vec{q}, \vec{p})$ im Phasenraum verteilt, wobei $\vec{q}, \vec{p}$ die f-dimensionalen (generalisierten) Koordinaten des Systems sind. Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ hat sich die Phasenraumverteilung zu

$$\rho(\vec{q}, \vec{p}, t) = \int d^f q_0 \int d^f p_0 \rho_0(\vec{q}_0, \vec{p}_0) \delta(\vec{q} - \vec{Q}(\vec{p}_0, \vec{q}_0, t)) \delta(\vec{p} - \vec{P}(\vec{p}_0, \vec{q}_0, t))$$

entwickelt, wobei $\vec{Q}(\vec{q}_0, \vec{p}_0, t)$ und $\vec{P}(\vec{q}_0, \vec{p}_0, t)$ die Lösungen der Hamilton'schen Gleichungen $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$ und $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$ zu den Anfangsbedingungen $\vec{q}(0) = \vec{q}_0$ und $\vec{p}(0) = \vec{p}_0$ sind.
Leiten sie aus obigem Ausdruck die Liouville-Gleichung für die Phasenraumdichte $\rho(\vec{q}, \vec{p}, t)$ ab,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \right) = \{\rho, H\}\,.$$

Aufgabe 7 (Scharmittel)

Gegeben sein ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

a. Geben Sie die Trajektorie im Phasenraum als Funktion der Energie E an. Berechnen Sie den Zeitmittelwert

$$\overline{x^2} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} d\tau x(\tau)^2,$$

wobei T die Periodendauer des Oszillators und $x(t)$ seine Bahnkurve ist. Was ergibt sich im Grenzfall $T \to \infty$?

b. Betrachten Sie nun eine sehr große Zahl identischer Oszillatoren, die im Phasenraum gemäß der Dichte

$$\rho(x,p) = N^{-1}\delta(H(x,p) - E), \quad \int \frac{dxdp}{2\pi\hbar}\rho(x,p) = 1$$

auf der Energieschale verteilt sind. Bestimmen Sie die Normierungskonstante N als Vielfaches von $\hbar\omega$ und berechnen Sie den Scharmittelwert

$$<x^2>= \int \frac{dxdp}{2\pi\hbar}x^2\rho(x,p).$$

Gilt Scharmittel gleich Zeitmittel?

Besprechung: Blatt 2, Theo 5 vom Mittwoch, den 2.10.2011

Aufgabe 4

$E = \frac{N}{2}\hbar w + M\hbar w = \hbar w(\frac{N}{2} + M), \quad N + M = \frac{N}{2} + \frac{M}{2} + M = \frac{E}{\hbar w} + \frac{N}{2} = \frac{E}{\hbar w} + \frac{E_0}{\hbar w}$

$M = \frac{E-E_0}{\hbar w}, \quad N = \frac{2E_0}{\hbar w}$

$\Gamma(N, M) = \frac{(M+N-1)!}{M!(N-1)!} \approx \frac{(M+N)!}{M!N!}$

$\ln(N!) \approx N(\ln(N) - 1)$

$\ln(\Gamma(N, M)) = \ln((N + M)!) - \ln(M!) + \ln(N!)$

$= (N + M)(\ln(M + N) - 1) - M\ln(M - 1) - N(\ln(N) - 1)$

$= (M + N)\ln(M + N) - M - N - M\ln(M) + N = (M + N)\ln(M + N) - M - M\ln(M)$

$= (M+N)\ln(M+N) - M\ln(M) - N\ln(N) = \frac{E+E_0}{\hbar w}\ln(\frac{E+E_0}{\hbar w}) - \frac{E-E_0}{\hbar w}\ln(\frac{E-E_0}{\hbar w}) - \frac{2E_0}{\hbar w}\ln(\frac{2E_0}{\hbar w})$

$= \frac{E+E_0}{\hbar w}\ln(E-E_0) - \frac{E+E_0}{\hbar w}\ln(\hbar w) - \frac{E-E_0}{\hbar w}\ln(E-E_0) + \frac{E-E_0}{\hbar w}\ln(\hbar w) - \frac{2E_0}{\hbar w}\ln(2E_0) + \frac{2E_0}{\hbar w}\ln(\hbar w)$

$= \frac{E+E_0}{\hbar w}\ln(E - E_0) - \frac{E-E_0}{\hbar w}\ln(E - E_0) - \frac{2E_0}{\hbar w}\ln(2E_0)$

$\partial_t\Gamma(E, E_0) = \frac{\ln(E+E_0)}{\hbar w} + \frac{\frac{E+E_0}{\hbar w}}{E+E_0} - \frac{\ln(E-E_0)}{\hbar w} + \frac{\frac{E-E_0}{\hbar w}}{E-E_0}$

$= \frac{1}{\hbar w}(\ln(E + E_0) - \ln(E - E_0)) = kT^{-1}$

Aufgabe 2

N Teilchen in V: $H = \sum\limits_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}$

ununterscheidbar $\Rightarrow$ Faktor $\frac{1}{N!}$

$\Sigma(E) = \frac{1}{N!}\int\limits_{H<E} d\Gamma = \frac{1}{N!}\int\limits_{E} d\Gamma\theta(E - H)$

$\int d\Gamma = \int \prod\limits_{i=1}^{3N} \frac{dp_i dq_i}{2\pi\hbar} = V^N \int \prod\limits_{i=1}^{3N} \frac{dp_i}{2\pi\hbar}$

$$\Rightarrow \Sigma(E) = \frac{1}{N!}V^N \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}} \underbrace{\int\limits_{\infty} \prod_{i=1}^{3N} dp_i\theta(1 - \sum_{n=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2mE})}_{n-dim\ Volumeneiner Kugel}$$

Geschweifte Klammer mit Radius $r = \sqrt{2mE}$ ist $\int ... = r^{3N}\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}$

$\Rightarrow \Sigma(E) = \frac{V^N}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \frac{\sqrt{2mE}^3 \pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}$

Aufgabe 6

$\partial_t\rho = \partial_t \int d^f q_0 \int d^f p_0 \rho_0(\vec{q}_0, \vec{p}_0)\delta(\vec{q} - \vec{Q}(\vec{p}_0, \vec{q}_0, t))\delta(\vec{p} - \vec{P}(\vec{p}_0, \vec{q}_0, t))$

$= \partial_t \int d^f q_0 \int d^f p_0 \rho_0(\vec{q}_0, \vec{p}_0)(\delta'(\vec{q} - \vec{Q}(\vec{p}_0, \vec{q}_0, t))\dot{\vec{Q}}\delta(\vec{p} - \vec{P}(\vec{p}_0, \vec{q}_0, t))$

$+ \delta(\vec{q} - \vec{Q}(\vec{p}_0, \vec{q}_0, t))\dot{\vec{P}}\delta'(\vec{p} - \vec{P}(\vec{p}_0, \vec{q}_0, t)))$

$= \int\int \rho_0\delta'(q - Q)\dot{Q}\delta(p - P) + \int\int \rho_0\delta(q - Q)\dot{P}\delta(p - P)$ (Kurzschreibweise)

$\delta'(q-Q) = \partial_q \delta(q-Q)$

$\Rightarrow ... = \int\int \rho_0 \partial_q \delta(q-Q) \partial_P H \delta(p-P) - \int\int \rho_0 \partial_p \delta(p-P) \partial_Q H \delta(q-Q)$

$= \partial_q \int\int ... - \partial_p \int\int ... = \sum \partial_{q_i} \rho \partial_{p_i} H - \partial_{p_i} \rho \partial_{q_i} H$

Aufgabe 7

a) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{mw^2}{2} x^2 \quad \Rightarrow E \sim, \quad \Rightarrow$ Ellipse (Bewegungsgleichung!)

$\bar{x}^2 = \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} d\tau x(\tau)^2, \quad x(t) = x_0 \cos(wt) + \frac{p_0}{\sqrt{mw}} \sin(wt)$

$= \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} d\tau x_0^2 \cos^2(w\tau) + \frac{p_0^2}{mw^2} \sin^2(wt)$ (sin()cos()=0 für Integral über Periode!)

$= \frac{1}{T} (\int\limits_t^{t+T} d\tau x_0^2 \cos^2(w\tau) + \int\limits_t^{t+T} d\tau \frac{p_0^2}{mw^2} \sin^2(wt)) = \frac{1}{2T}(x_0^2 + \frac{p_0^2}{mw^2})T = \frac{1}{2}(x_0^2 + \frac{p_0^2}{mw^2})$

$\Rightarrow$ zeitunabhängig, identisch für alle T!

b) $1 = \int \frac{dxdp}{2\pi\hbar} \frac{1}{N} \delta(H-E) = \frac{1}{N} \int \frac{dxdp}{2\pi\hbar} \delta(\frac{p^2}{2m} + \frac{mw^2 x^2}{2} - E)$

Substitution: $x' = \sqrt{\frac{m}{2}} wx$, $\quad p' = \frac{p}{\sqrt{2m}}$

$\Rightarrow N = \frac{1}{w\pi\hbar} \int dp' dx' \delta(p'^2 + x'^2 - E) = \frac{1}{w\pi\hbar} \int d\varphi dr r \delta(r^2 - E)$

$= \frac{1}{w\hbar} \int dr \frac{r}{2r} (\delta(r - \sqrt{E}) + \underbrace{\delta(r + \sqrt{E})}_{=0}) = \frac{1}{\hbar w}$

$< x >= \int \frac{dxdp}{2\pi\hbar} x^2 \varrho(x,p) = \frac{\hbar w}{2\pi\hbar} \int dxdp x^2 \delta(\frac{p^2}{2m} + \frac{mw^2 x^2}{2} - E)$

$= \frac{w\hbar}{2\pi\hbar} \frac{2}{w} \frac{2}{mw^2} \int dx' dp' x'^2 \delta(x'^2 + p'^2 - E) = \frac{2}{\pi m w^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\infty} dr r r^2 \cos^2(\varphi) \delta(r^2 - E) = \frac{E}{mw^2}$

$\Rightarrow$ Scharmittel = Zeitmittel