Blatt 7

Aufgabe 20

Für ein Gas für Translationsfreiheitsgraden allein gilt

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \sum_{i<j} U(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$$

a) Die Impulsintegration kann wie üblich durchgeführt werden,

$$Z_N(T,V) = \frac{1}{h^{3N} \cdot N!} \int d^{3N}p \int_V d^{3N}x \; e^{-\beta H} =$$

$$= \frac{1}{h^{3N} N!} \int d^3p_1 \ldots d^3p_N \, e^{-\beta \sum \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m}} \int_V d^3x_1 \ldots d^3x_N \, e^{-\beta \sum U(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{h^{3N} \cdot N!} \left[\frac{2m\pi}{\beta}\right]^{3N/2}}_{\frac{1}{N! \lambda_T^{3N}}} \int_V d^3x_1 \ldots d^3x_N \, e^{-\beta \sum U(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}$$

b) Das großkanonische Potential:

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln \mathcal{Z} = -k_B T \ln \mathcal{Z}.$$

Außerdem gilt:

$$\ln \mathcal{Z} = \ln\left[\sum_l \xi^l Z_l(T,V)\right] = \ln\left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \xi^l Z_l(T,V)\right].$$

Wir entwickeln jetzt $\ln \mathcal{Z}$ um $\xi = 0$. Mit $\ln(1+x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$,

bekommen wir:

$$\ln \mathcal{Z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \xi^l Z_l\right)^n = \sum_{l=1}^{\infty} \xi^l Z_l - \frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{\infty} \xi^l \cdot Z_l\right)^2 + \ldots =$$

$$= \xi Z_1 + \xi^2 Z_2 - \frac{1}{2} \xi^2 Z_1^2 + O(\xi^3) = \xi \cdot Z_1 + \xi^2 \cdot \left(Z_2 - \frac{1}{2} Z_1^2\right) + O(\xi^3)$$

Einsetzen in $\Omega$ liefert:

$$\Omega(T,V,\xi) = -k_B T \cdot \left[\xi a_1(T,V) + \xi^2 a_2(T,V)\right] + O(\xi^3),$$

mit $a_1 = Z_1$, $a_2 = Z_2 - \frac{1}{2} Z_1^2$

Für das ideale Gas gilt:

$$\Omega_0(T,V,\xi) = -k_B T \cdot \frac{V}{\lambda_T^3} \cdot \xi$$

Da wir uns für Abweichungen aus dem idealen Gas interesieren faktorisieren wir diesen Term aus

$$\Omega(T,V,\xi) = -k_B T \cdot \frac{V}{\lambda_T^3} \cdot \left[\xi \cdot b_1(T,V) + \xi^2 b_2(T,V) + \dots\right]$$

mit $\begin{cases} b_1(T,V) = \frac{\lambda_T^3}{V} \cdot Z_1(T,V) \\ b_2(T,V) = \frac{\lambda_T^3}{V} \cdot \left[Z_2(T,V) - \frac{1}{2} Z_1^2(T,V)\right] \end{cases}$

c) $b_1(T,V) = \frac{\lambda_T^3}{V} Z_1(T,V) = \frac{\lambda_T^3}{V} \cdot \frac{1}{\lambda_T^3} \cdot \underbrace{\int d^3x \; e^{-\beta \cdot 0}}_{V} = 1$ (immer)

$$b_2(T,V) = \frac{\lambda_T^3}{V}\left[Z_2(T,V) - \frac{1}{2} Z_1^2(T,V)\right] = \frac{\lambda_T^3}{V} \cdot Z_2(T,V) - \frac{V}{2\lambda_T^3}$$

Es ist einfach zu überprüfen, dass $b_2 = 0$ für das ideale Gas

d) Die mittlere Teilchenzahl kommt aus

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \mu} = -\beta \xi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}$$

Mit dem gefundenen Ausdruck für $\Omega$ bekommen wir

$$\langle N \rangle = -\cancel{\beta} \xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left[-\cancel{k_B T} \cdot \frac{V}{\lambda_T^3} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \xi^j b_j(T,V)\right] = \frac{V}{\lambda_T^3} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j \xi^j b_j(T,V)$$

Die mittlere Teilchendichte: $n = \frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{1}{\lambda_T^3} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j \xi^j b_j(T,V)$

Wenn $\xi \to 0$, geht auch $n \to 0$, also lösen wir die Gleichung nach $\xi$: $n \lambda_T^3 = \xi \cdot b_1(T,V) + 2\xi^2 b_2(T,V) + O(\xi^3)$

$$\Rightarrow 2\xi^2 b_2 + \xi - n\lambda_T^3 = 0$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{1}{4b_2}\left[-1 + \sqrt{1+8b_2 n\lambda_T^3}\right] = \frac{1}{4b_2}\left[\cancel{-1}+\cancel{1}+\frac{1}{2}\cdot 8n\lambda_T^3\cdot b_2 - \frac{1}{8}(8n\lambda_T^3 b_2)^2 + \dots\right]$$

$$\Rightarrow \xi = n\lambda_T^3 - 2n^2\lambda_T^6\cdot b_2 + O(n^3)$$

e) Der Druck ist gegeben durch $p = -\frac{\partial \Omega}{\partial V}$. Im Allgemeinen, für homogene Systeme (also die, die $\Omega(T,\lambda V,\mu) = \lambda\,\Omega(T,V,\mu)$ erfüllen) gilt $\Omega = -pV$. Da aber $V$ die einzige extensive Variable ist, muss auch gelten

$$\lim_{V\to\infty}\frac{\Omega(T,V,\mu)}{V} = \text{Konst} = -\lim_{V\to\infty} p(T,V,\mu).$$

Es gilt dann (mit b), c) und d)):

$$\lim_{V\to\infty} p(T,V,\mu) = -\lim_{V\to\infty}\frac{\Omega(T,V,\mu)}{V} = \frac{k_BT}{\lambda_T^3}\left[\xi\, b_1(T,V\to\infty) + \xi^2 b_2(T,V\to\infty)\right]$$

Setzen wir nun für $\xi$ die oben hergeleitete Formel ein, dann folgt (lim weggelassen):

$$p = \frac{k_BT}{\cancel{\lambda_T^3}}\left[n\cancel{\lambda_T^3}(1-2n\lambda_T^3 b_2) + n^2\lambda_T^{\cancel{6}\,3}(1-2n\lambda_T^3 b_2)^2\cdot b_2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{p}{k_BT} = n(1-2n\lambda_T^3 b_2 + n\lambda_T^3 b_2) + O(n^3) =$$

$$= n\left\{1 - n\cdot\lambda_T^3\cdot\frac{\lambda_T^3}{V}\cdot\left[Z_2(T,V) - \frac{1}{2}Z_1(T,V)\right]\right\} + O(n^3)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{k_BT} = n\left\{1 + n\cdot B(T) + O(n^2)\right\},\quad B(T) = -\lambda_T^6\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\left[Z_2(T,V) - \frac{1}{2}Z_1(T,V)\right]$$

Aufgabe 21

a) Die Minimale-Substitution-Vorschrift liefert

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$$

Für ein konstantes Magnetfeld können wir schreiben $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{x}$,

dann

$$H = \frac{1}{2m}\left\{\vec{p}^2 + \frac{q^2}{c^2}\cdot\frac{1}{4}(\vec{B}\times\vec{x})^2 - \frac{q}{2c}\left[\vec{p}(\vec{B}\times\vec{x}) + (\vec{B}\times\vec{x})\cdot\vec{p}\right]\right\} =$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{2m}\left\{\vec{p}^2 + \frac{q^2}{4c^2}(\vec{B}\times\vec{x})^2 - \frac{q}{2c}\left[\vec{B}\cdot(\vec{x}\times\vec{p}) + (\vec{x}\times\vec{p})\cdot\vec{B}\right]\right\} =$$

$$\overset{**}{=} \frac{1}{2m}\left\{\vec{p}^2 + \frac{q^2}{4c^2}(\vec{B}\times\vec{x})^2 - \frac{q}{c}\vec{B}\cdot\vec{L}\right\} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{q^2B^2}{8mc^2}\cdot\left[\vec{x}^2 - (\hat{e}_z\cdot\vec{x})^2\right] - \frac{qB}{2mc}\hat{n}\cdot\vec{L}$$

wo wir $\vec{B} = \hat{e}_z\cdot B$ eingesetzt haben, weiter haben wir.

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\rho^2 - \omega L_z, \quad \omega = \frac{qB}{2mc}, \quad \rho^2 = \vec{x}^2 - (\hat{e}_z\cdot\vec{x})^2 = x^2 + y^2$$

* wegen Vektorprodukt gilt zyklische Invarianz.

** $\vec{B}$ ist Konstante Vektor, vertauscht mit allem.

b) Angegeben ist $E(k,n,l) = \frac{\hbar^2 k^2 \pi^2}{2m\Lambda^2} + 2\hbar\omega\left[n + \frac{1}{2} + \frac{|l|+l}{2}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{Z}$, $l\geq -$

Die kanonische Zustandssumme eines einzelnen Teilchen lautet:

$$Z = \sum_{k,l,n} e^{-\beta E(k,n,l)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\beta\frac{\hbar^2k^2\pi^2}{2m\Lambda^2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\beta\hbar\omega n} \sum_{l} e^{-\beta\hbar\omega(|l|+l)} \cdot e^{-\beta\hbar\omega}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta\hbar^2\pi^2}{2m\Lambda^2}\cdot k^2} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-\frac{\beta\hbar^2\pi^2}{2m\Lambda^2}k^2} = \sqrt{\frac{\pi\cdot 2m\Lambda^2}{\beta\hbar^2\pi^2}} = \frac{\Lambda}{\hbar}\cdot\sqrt{\frac{2m}{\beta\pi}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\beta\hbar\omega n} = \frac{1}{1-e^{-2\beta\hbar\omega}}$$

$$\sum_{l} e^{-\beta\hbar\omega(|l|+l)} = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-2\beta\hbar\omega l} + \sum_{l=-M}^{-1} 1 = M + \frac{1}{1-e^{-2\beta\hbar\omega}}.$$

Dann bekommen wir:

$$Z = \underbrace{e^{-\beta\hbar\omega}\cdot\frac{1}{1-e^{-2\beta\hbar\omega}}}_{\frac{1}{2\sinh(\beta\hbar\omega)}}\cdot\frac{\Lambda}{\hbar}\cdot\sqrt{\frac{2m}{\beta\pi}}\cdot\underbrace{\left[M+\frac{1}{1-e^{-2\beta\hbar\omega}}\right]}_{M+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\tanh(\beta\hbar\omega)}} =$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{4\sinh(\beta\hbar\omega)}\cdot\frac{\Lambda}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{\beta\pi}}\cdot\left[2M+1+\frac{1}{\tanh(\beta\hbar\omega)}\right]$$

Die großkanonische Zustandssumme (die Teilchen wechselwirken nicht miteinand

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}e^{\beta\mu N}\cdot Z^N = \exp\{Z\cdot e^{\beta\mu}\}.$$

und das großkanonische Potential:

$$\Omega = -\frac{1}{\beta}\ln\mathcal{Z} = -\frac{1}{\beta}\cdot Z e^{\beta\mu} = -\frac{\Lambda e^{\beta\mu}}{4\hbar\beta}\sqrt{\frac{2m}{\pi\beta}}\cdot\frac{1}{\sinh(\beta\hbar\omega)}\left\{2M+1+\frac{1}{\tanh}\right.$$