Institut für Theoretische Physik
JLU Gießen
C. Fischer, G. Eichmann, C. Popovici

Blatt 9
WiSe 2011/12
12. 01. 2012

Übungen zur Statistischen Thermodynamik

Aufgabe 25 (Sommerfeld-Entwicklung):

Wir wollen das folgende Faltungsintegral I mit der Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion $f(E)$ bei niedrigen Temperaturen auswerten:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dE\, g(E) f(E)\,, \qquad f(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}+1}\,. \tag{1}$$

Dabei soll $g(E)$ eine beliebige glatte Funktion sein, die für $E \to -\infty$ verschwindet und für $E \gg 1$ höchstens polynomial ansteigt.

(a) Zeigen Sie mit der Stammfunktion $p(E) = \int_{-\infty}^{E} dE'\, g(E')$ zunächst:

$$I = -\int_{-\infty}^{\infty} dE\, p(E) \frac{\partial f}{\partial E}\,.$$

(b) Skizzieren Sie die Ableitung $\partial f/\partial E$. Wo liegen ihre dominanten Beiträge? Entwickeln Sie $p(E)$ um die Stelle $E = \mu$ und beweisen Sie folgende Relation:

$$I = \int_{-\infty}^{\mu} dE\, g(E) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{\beta^{2n}} \left(\frac{d^{2n-1}g}{dE^{2n-1}} \right)_{E=\mu}, \qquad a_n = \int_0^{\infty} dz\, \frac{z^{2n}}{(2n)!}\, \frac{e^z}{(1+e^z)^2}\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass der Sommerfeld-Koeffizient a_n folgendermaßen geschrieben werden kann (Hinweis: geometrische Reihe...):

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2n}} = \left(1 - 2^{1-2n}\right) \zeta(2n)\,, \qquad \zeta(n) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}\,.$$

(c) Werten Sie die Korrekturen niedrigster Ordnung für das Integral I aus, indem Sie die Werte $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$ für die Riemannsche $\zeta-$Funktion einsetzen. Vergleichen Sie mit dem in der Vorlesung angegebenen Ausdruck.

Besprechung: Blatt 9, Theo 5 vom Mittwoch, den 12.12.2011

Aufgabe 25

a) $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dEg(E)f(E) = \underbrace{p(E)f(E)|_{-\infty}^{\infty}}_{=0\cdot f(-\infty)-p(\infty)\cdot\frac{1}{e^{\infty}}} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} dEp(E)\partial_E f(E) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} dEp(E)\partial_E f(E)$

b) $\partial_E f(E) = -\frac{\beta e^{-\beta(E-\mu)}}{(e^{-\beta(E-\mu)})^2}$

Taylor-Entwicklung: $p(E) = p(\mu) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(E-\mu)^n}{n!}\partial_E^n p(E)|_{E=\mu}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE \left(p\left(E\right) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(E-\mu)^n}{n!}\partial_E^n p\left(E\right)|_{E=\mu}\right)\partial_E f\left(E\right)\\
&= \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dEp\left(\mu\right)\partial_E f\left(E\right)}_{=p(\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\mu} dEg(E)} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\partial_E^n g(E)|_{E-\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE(E-\mu)^n \qquad \underbrace{\partial_E^n p\left(E\right)}_{\substack{gerade\ um\ \mu\\ \Rightarrow (E-\mu)^n \to (E-\mu)^{2n}}}\\
&= \int\limits_{-\infty}^{\mu} dEg(E) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\partial_E^{2n-1} g(E)|_{E=\mu} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dE(E-\mu)^{2n}\partial_E f(E)\\
&= \int\limits_{-\infty}^{\mu} dEg(E) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\partial_E^{2n-1} g(E)|_{E=\mu} \cdot 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{2n}} dz z^{2n} \frac{e^z}{(1+e^z)^2}
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
a_n &= -\int\limits_{d}^{z} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\partial_z\left(\frac{1}{1+e^z}\right) = -\int\limits_{d}^{z} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\partial_z\left(\frac{e^{-z}}{e^{-z}+1}\right) = -\int\limits_{d}^{z} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\partial_z\left(e^{-z}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-e^{-z}\right)^k\right)\\
&= -\int\limits_{d}^{z} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\partial_z\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k e^{-(k+1)z}\right) = -\int\limits_{d}^{z} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\left(k+1\right)e^{-(k+1)z}\\
&= -\int\limits_{d}^{z} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^k ke^{-kz} = -\frac{1}{(2n)!}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n k\int dze^{-kz}z^{2n}\\
&= -\frac{1}{(2n)!}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n k\frac{1}{k^{2n+1}}\int dz'e^{-z'}z'^{2n} = -\frac{1}{(2n)!}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n \frac{1}{k^{2n}}\Gamma\left(2n+1\right) = \sum\frac{(-1)^{k+1}}{k^{2n}}
\end{aligned}$$

d) $I = \int\limits_{-\infty}^{\mu} dEg\left(E\right) + \frac{\pi^2}{6\beta^2}\partial_E g\left(E\right) + \frac{7\pi^4}{360\beta^4}\partial_E^3 g\left(E\right)$

Aufgabe 26

$$g(E) = \left(\left(\frac{6\pi}{2s+1}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{2m}n^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{E}Vb = \frac{3}{2}\sqrt{E}E_f^{-\frac{3}{2}}N$$

$$U = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dEg\left(E\right)Ef\left(E\right) = \frac{3}{2}E_f^{-\frac{3}{2}}N\int\limits_{-\infty}^{\infty} E^{\frac{3}{2}}f\left(E\right)dE$$

$$= \frac{3}{2}E_f^{-\frac{3}{2}}N\left(\int\limits_{0}^{\mu} dEE^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi^2}{6}\left(kT\right)^2\left(E^{\frac{3}{2}}\right)'\Big|_{E=\mu} + \frac{7\pi^4}{360}\left(kT\right)^4\left(E^{\frac{3}{2}}\right)'''\Big|_{E=\mu}\right)$$

$$= \frac{3}{2}E_f^{-\frac{3}{2}}N\left(\frac{2}{5}\mu^{\frac{5}{2}} + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2\frac{3}{2}\sqrt{\mu} + ...\right) = \frac{3}{5}E_f N\left(\left(\frac{\mu}{E_f}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{E_f}\right)^2\left(\frac{\mu}{E_f}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$(\frac{\mu}{E_f})^n = 1 - n\frac{\pi^2}{12}(\frac{kT}{E_f})^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{3}{5}E_f N\left(1 - \frac{5}{12}\pi^2\left(\frac{kT}{E_f}\right)^2\right)$$

$$\partial_E \ln\left(1 + e^{-\beta(E-\mu)}\right) = \frac{e^{-\beta(E-\mu)}}{1+e^{-\beta(E-\mu)}} = -\frac{\beta}{e^{\beta(E-\mu)+1}} = -\beta f(E)$$

$$\Omega = -\frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty} dEg(E)\ln\left(1 + e^{-\beta(E-\mu)}\right) = \underbrace{p(E)\ln(...)|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \left(-\frac{1}{\beta}\right)(-\beta)\int_{-\infty}^{\infty} dEp(E)f(E)$$

$$= -\frac{3}{2}E_f^{-\frac{3}{2}}N\left(\int_{-\infty}^{\mu} dE\frac{2}{3}E^{\frac{2}{3}} + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2\frac{3}{2}\left(E^{\frac{3}{2}}\right)'|_{E=\mu}\right) = -\frac{5}{2}E_f N\left(\left(\frac{\mu}{E_f}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2\left(\frac{\mu}{E_f}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -\frac{5}{2}E_f N\left(1 - \frac{5}{12}\pi^2\left(\frac{kT}{E_f}\right)^2\right) = \frac{5}{3}U$$

Aufgabe 27

$$p_f = (\frac{6\pi^2}{2s+1})^{(\frac{1}{3})}\hbar n^{\frac{1}{3}}$$

$$E_f = cp_f = \hbar c(\frac{6\pi^2}{25+1})^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$$

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} dEg(E)f(E)E$$

$$g(E) = (2s+1)\frac{V}{(2\pi^3)}\frac{d}{dE}\frac{4\pi}{3}k^3 \quad , \quad k = \frac{E}{\hbar c}$$

$$\Rightarrow g(E) = (2s+1)\frac{V}{2\pi^2}\frac{E^2}{(\hbar c)^3}$$

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} dE(2s+1)\frac{V}{2\pi^3}\frac{E^3}{(\hbar x)^3}\underbrace{\theta(E-E_f)}_{f(T=0)} = (2s+1)\frac{V}{8\pi^2}\frac{E_f^4}{(\hbar c)^3} = \frac{6^{\frac{4}{3}}}{8}(\frac{\pi^2}{2s+1})^{\frac{1}{3}}\hbar cn^{\frac{4}{3}}V \;\; U = \frac{3}{2}pV \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2}{3}\frac{U}{V} = \frac{6^{\frac{4}{3}}}{12}(\frac{\pi^2}{2s+1})^{\frac{1}{3}}\hbar cn^{\frac{4}{3}}$$