Übungen zur Statistischen Thermodynamik

Aufgabe 30: Pauli-Paramagnetismus

Wir betrachten noch einmal die Leitungselektronen in einem metallischen Leiter (Aufgabe 26), schalten diesmal aber zusätzlich ein Magnetfeld B_0 ein. Die Elektronenspins wechselwirken mit dem Magnetfeld und bewirken eine Aufspaltung der Ein-Teilchen-Energien:

$$E_\pm = E \pm \mu_B B_0 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \pm \mu_B B_0 \,, \qquad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \,,$$

wobei $(\pm)$ jeweils die Elektronen mit *spin up* bzw. *spin down* bezeichnet. Daraus resultiert die Zustandsdichte

$$g(E) = g_+(E) + g_-(E) \,, \qquad g_\pm(E) = \frac{1}{2}\, g(E \mp \mu_B B_0) \,.$$

(a) Berechnen Sie die Teilchenzahlen $N_\pm$ für ein entartetes Elektronengas (d.h. $T = 0$). **Hinweis:** selbst starke Magnetfelder sind viel kleiner als typische Fermienergien.

(b) Ein magnetisches Gesamtmoment stellt sich für $N_+ \neq N_-$ ein. Berechnen Sie die paramagnetische Suszeptibilität $\chi_p = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B_0}$ im Grenzfall $T = 0$. Dabei ist die Magnetisierung des Systems gegeben durch

$$M = \frac{\mu_B}{V}\,(N_- - N_+) \,.$$

(c) Berechnen Sie den ersten Korrekturterm zu χ_p für kleine Temperaturen (Sommerfeld-Entwicklung). Wie stark ist die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität?

Aufgabe 31: Quark-Gluon-Plasma und Hadronengas

Quarks und Gluonen sind die Grundbausteine der starken Wechselwirkung, die für den Aufbau der Hadronen und die Kräfte in den Atomkernen verantwortlich ist. Unter den extremen Temperaturen des frühen Universums formten sie ein Quark-Gluon-Plasma (QGP), dessen Eigenschaften wir näher untersuchen wollen.

(a) **Quarks:** Betrachten Sie ein ideales, ultrarelativistisches Fermiongas, das N_+ Teilchen und N_- Antiteilchen mit Spin $1/2$ enthält. Die Teilchenzahlen sind nicht konstant, allerdings fixiert Ladungserhaltung deren Differenz: $N_+ - N_- = const.$ Daraus folgt (warum?) $\mu_+ + \mu_- = 0$. Zeigen Sie, dass das großkanonische Potential durch

$$\Omega = -\frac{V}{3\pi^2}\,\frac{1}{(\hbar c)^3} \int_0^\infty dE\, E^3 \left(\frac{1}{e^{\beta(E-\mu_+)}+1} + \frac{1}{e^{\beta(E-\mu_-)}+1} \right)$$

gegeben ist. Berechnen Sie Ω im Spezialfall $\mu_+ = 0$ und bestimmen Sie daraus den Druck P, die Energiedichte $\varepsilon = E/V$ und die Entropiedichte $s = S/V$ des Fermiongases als Funktionen der Temperatur. (**Hinweis:** Setzen Sie für den auftretenden Polylogarithmus den Wert $-g_4(-1) = 7\pi^4/720$ ein.)

(b) **Gluonen:** Betrachten Sie ein ideales Gas aus masselosen, relativistischen Bosonen. Gleich wie im Fall des Photons verschwindet das entsprechende chemische Potential. Bestimmen Sie wiederum $P(T)$, $\varepsilon(T)$ und $s(T)$.

(c) Quarks (Spin 1/2) und Gluonen (Spin 1) können jeweils zwei Polarisationseinstellungen annehmen. Darüber hinaus treten noch weitere Quantenzahlen auf: Quarks und Antiquarks können in zwei *Flavors* (*up* und *down*) sowie drei *Farben* vorliegen; Gluonen tragen 8 Farben. Zeigen Sie daraus, dass die thermische Zustandsgleichung des Quark-Gluon-Plasmas ein Stefan-Boltzmann-Gesetz erfüllt:

$$P(T) = \frac{37\pi^2}{90} \frac{k^4}{(\hbar c)^3} T^4 .$$

(d) **Pionen:** Durch die Abkühlung des Universums kam es zu einem Phasenübergang, infolgedessen das QGP in ein Gas von Hadronen überging. Das Pion ist das leichteste, näherungsweise masselose Hadron: es besteht aus einem Quark und einem Antiquark und ist wiederum ein Boson (Spin 0). Es tritt außerdem in 3 elektrischen Ladungen auf. Wie lautet die thermische Zustandsgleichung für ein ideales Piongas?

(e) Im sogenannten 'Bag-Modell' stellt man fest, dass man vom Druck des Quark-Gluon-Plasmas eigentlich noch den Vakuumsbeitrag $\Lambda^4 \approx (200\,\mathrm{MeV})^4$ subtrahieren muss. Bei welcher kritischen Temperatur T_C stellt sich dann die Gleichgewichtsbedingung $P_{\mathrm{Pion}} = P_{\mathrm{QGP}} - \Lambda^4$ ein? Verwenden Sie Einheiten, in denen $\hbar = c = k = 1$, und geben Sie T_C in MeV an.