Institut für Theoretische Physik
JLU Gießen
C. Fischer, G. Eichmann, C. Popovici

Blatt 11
WiSe 2011/12
26. 01. 2012

Übungen zur Statistischen Thermodynamik

Aufgabe 30: Pauli-Paramagnetismus

Wir betrachten noch einmal die Leitungselektronen in einem metallischen Leiter (Aufgabe 26), schalten diesmal aber zusätzlich ein Magnetfeld B_0 ein. Die Elektronenspins wechselwirken mit dem Magnetfeld und bewirken eine Aufspaltung der Ein-Teilchen-Energien:

$$E_\pm = E \pm \mu_B B_0 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \pm \mu_B B_0 \,, \qquad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \,,$$

wobei ($\pm$) jeweils die Elektronen mit *spin up* bzw. *spin down* bezeichnet. Daraus resultiert die Zustandsdichte

$$g(E) = g_+(E) + g_-(E) \,, \qquad g_\pm(E) = \frac{1}{2}\, g(E \mp \mu_B B_0) \,.$$

(a) Berechnen Sie die Teilchenzahlen $N_\pm$ für ein entartetes Elektronengas (d.h. $T = 0$). **Hinweis:** selbst starke Magnetfelder sind viel kleiner als typische Fermienergien.

(b) Ein magnetisches Gesamtmoment stellt sich für $N_+ \neq N_-$ ein. Berechnen Sie die paramagnetische Suszeptibilität $\chi_p = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B_0}$ im Grenzfall $T = 0$. Dabei ist die Magnetisierung des Systems gegeben durch

$$M = \frac{\mu_B}{V}\,(N_- - N_+) \,.$$

(c) Berechnen Sie den ersten Korrekturterm zu χ_p für kleine Temperaturen (Sommerfeld-Entwicklung). Wie stark ist die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität?

Aufgabe 31: Quark-Gluon-Plasma und Hadronengas

Quarks und Gluonen sind die Grundbausteine der starken Wechselwirkung, die für den Aufbau der Hadronen und die Kräfte in den Atomkernen verantwortlich ist. Unter den extremen Temperaturen des frühen Universums formten sie ein Quark-Gluon-Plasma (QGP), dessen Eigenschaften wir näher untersuchen wollen.

(a) **Quarks:** Betrachten Sie ein ideales, ultrarelativistisches Fermiongas, das N_+ Teilchen und N_- Antiteilchen mit Spin $1/2$ enthält. Die Teilchenzahlen sind nicht konstant, allerdings fixiert Ladungserhaltung deren Differenz: $N_+ - N_- = const.$ Daraus folgt (warum?) $\mu_+ + \mu_- = 0$. Zeigen Sie, dass das großkanonische Potential durch

$$\Omega = -\frac{V}{3\pi^2}\,\frac{1}{(\hbar c)^3} \int_0^\infty dE\, E^3 \left(\frac{1}{e^{\beta(E-\mu_+)} + 1} + \frac{1}{e^{\beta(E-\mu_-)} + 1} \right)$$

gegeben ist. Berechnen Sie Ω im Spezialfall $\mu_+ = 0$ und bestimmen Sie daraus den Druck P, die Energiedichte $\varepsilon = E/V$ und die Entropiedichte $s = S/V$ des Fermiongases als Funktionen der Temperatur. (**Hinweis:** Setzen Sie für den auftretenden Polylogarithmus den Wert $-g_4(-1) = 7\pi^4/720$ ein.)

Besprechung:
Blatt 11, Theo 5 vom Mittwoch, den 26.12.2011

Aufgabe 30

a) $$\begin{aligned} N_\pm &= \int_0^\infty dE f_-(E) g_\pm(E) \quad , \qquad g_\pm(E) = \tfrac{1}{2} g(E \mp \mu_B B_0) \\ &= \tfrac{1}{2} \int_{\mu_B B_0}^\infty dE f_-(E)\, g(E \mp \mu_B B_0) \quad , \quad y = E \mp \mu_B B_0 \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^\infty dy f_-(y \pm \mu_B B_0)\, g(y) \end{aligned}$$

Taylor von $f_-(x \pm \mu_B B_0)$ um $f_-(x)$:

$$f_-(y \pm \mu_B B_0) \approx f_-(y) \pm \mu_0 B_0 \tfrac{\partial f_-}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow N_\pm &\approx \int_0^\infty dy \left(f(y) \pm \mu_B B_0 \tfrac{\partial f_-}{\partial y} \right) g(y) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_{y_0}^\infty dy f_-(y)\, g(y)}_{A} \underbrace{\pm \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu_B B_0 \frac{\partial f_-}{\partial y} g(y)\, dy}_{B} \end{aligned}$$

$$A \overset{Sommerfeld}{=} \tfrac{1}{2} \int_{y_0}^{\mu = E_f} dy g(y) + \underbrace{\frac{\pi^2}{6} (kT)^2 g'(\mu)}_{=0} \quad , \quad mit\ g(E) = \tfrac{3N}{2E_f^{\frac{3}{2}}\sqrt{E}}$$

$$A = \tfrac{1}{2} \int_0^{\mu_B} dy \tfrac{3N}{2E_f^{\frac{3}{2}}} \sqrt{y} = \tfrac{2}{3} E_F^{\frac{3}{2}} \tfrac{3N}{2E^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{N}{2}$$

$$\begin{aligned} B &= -\tfrac{1}{2} \mu_B B_0 \left(\int_0^{\mu = E_f} dy g'(y) + \underbrace{\frac{\pi^2}{6} (kT)^2 g''(\mu)}_{=0} \right) \quad , \quad mit\ g'(y) = \tfrac{3N}{4E_f^{\frac{3}{2}}} \tfrac{1}{\sqrt{\mu}} \\ &= -\tfrac{1}{2} \mu_B B_0 \tfrac{3N}{2E_f} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_\pm = N \mp \tfrac{3}{4} \mu_B B_0 \tfrac{N}{E_f}$$

Alternativer Weg :

über $g_\pm \approx \frac{1}{2}(g(E) \mp g'(E)\mu_B B_0) = \frac{g_0}{2}(\sqrt{E} \mp \frac{\mu_B B_0}{2\sqrt{E}})$

$g_0 = \frac{3}{2} N E_f^{(} - \frac{3}{2})$

b) $M = \frac{\mu_B}{V}(N_- - N_+) = \frac{\mu_B}{V}(\frac{3}{2}\mu_B B_0 \frac{N}{\epsilon_f})$

$\chi_p = \mu_0 \frac{\partial}{\partial B} M = \frac{\mu_o \mu_B^2}{V} \frac{3}{2} \frac{N}{\epsilon_f}$

c) $\chi_p = \frac{1}{V}\mu_0\mu_B^2 \int\limits_0^\infty dy f_-(y) g'(y) \qquad f\ddot{u}r\ T \neq 0 \quad , \quad g'(y) = \frac{3N}{4E_f^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{y}}$

$= \frac{1}{V}\mu_0\mu_B^2 \left(\int\limits_0^\mu dy g'(y) + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 g''(\mu) \right) \quad , \quad g''(\mu) = -\frac{3}{8}\frac{N}{E_f^{\frac{3}{2}}}\mu^{-\frac{3}{2}}$

$= \frac{1}{V}\mu_0\mu_B^2 \left(\frac{3}{2}N\sqrt{\mu}\frac{1}{E_f^{\frac{3}{2}}} - \frac{\pi^2}{16}(kT)^2 \frac{N}{E_f^2} \right)$

$= \frac{3}{2}\frac{N}{V}\mu_0\mu_B^2 \frac{1}{E_f}\left(1 - \frac{\pi^2}{24}(kT)^2 \frac{1}{E_f}\right)$

Aufgabe 31

a) $N_+ - N_- = c \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial N_+} = +\mu_+ \quad , \quad \mu_- = \frac{\partial F}{\partial N_-} = \frac{\partial F}{\partial N_+}\frac{\partial N_+}{\partial N_-} = -\frac{\partial F}{\partial N_+} = \mu_+$

$\Rightarrow \mu_+ + \mu_- = 0$

$-\beta\Omega = \ln(Z) = \int\limits_0^\infty dE g(E)\left(\ln\left(1+e^{-\beta(E-\mu_+)}\right) + \ln\left(1+e^{-\beta(E-\mu_-)}\right)\right)$

$g(E) = g_0 E^2 = 2\frac{V}{2\pi^2}\frac{E^2}{(\hbar c)^3} \ , \quad \frac{\partial}{\partial E}\ln\left(1+e^{-\beta(E-\mu)}\right) = -\beta\frac{e^{-\beta(E-\mu)}}{1+e^{-\beta(E-\mu)}} = \beta\frac{1}{1+e^{\beta(E-\mu)}}$

$\Rightarrow -\beta\Omega = g_0\frac{1}{3}\left(\underbrace{E^3\ln(...)|_0^\infty}_{=0} - \beta\int\limits_0^\infty dE E^3\left(\frac{1}{1+e^{\beta(E-\mu_+)}} + \frac{1}{1+e^{\beta(E-\mu_-)}}\right)\right)$

$\Rightarrow \Omega = -\frac{V}{3\pi^2}\frac{1}{(\hbar c)^3}\int\limits_0^\infty dE E^3\left(\frac{1}{1+e^{\beta(E-\mu_+)}} + \frac{1}{1+e^{\beta(E-\mu_-)}}\right)$

$$\Omega(\mu_+ = 0) = -\frac{2V}{3\pi^2}\frac{1}{(\hbar c)^3}\underbrace{\int\limits_0^\infty dE\frac{E^3}{1+e^{\beta E}}}_{=\frac{7\pi^4}{120\beta^4}} = -\frac{7V}{180\beta^4(\hbar c)^3} = -pV$$

$\Rightarrow p = 2\frac{7}{4}\frac{\pi^2}{90}\frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3}$

$\Rightarrow p = \frac{1}{3}\frac{U}{V} = \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow \epsilon = 3p$

$\Rightarrow \frac{S}{V} = -\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\Omega}{V}\right) = \frac{4p}{T}$

b) Gluonen:

$\beta\Omega = -\ln(Z) = \int dE g(E)\ln\left(1-e^{-\beta E}\right)$

$g(E) = g_0 E^2 = \frac{V}{2\pi^2}\frac{1}{(\hbar c)^3}$

$\Rightarrow \beta\Omega = -\frac{g_0\pi^4}{45\beta^3} \ \Rightarrow \ -pV = \Omega = -V\frac{\pi^2}{90}\frac{\beta^4}{(\hbar c)^3}$

$\epsilon = 3p \quad , \quad \frac{S}{V} = \frac{4p}{T}$

c) $P_{QGP} = \frac{\pi^2}{90}\frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3}\Big(\underbrace{2*2*3*\frac{7}{4}}_{\substack{Quarks \\ Spin*Flavour*Farbe}} + \underbrace{2*8}_{Gluonen} \Big)$

d) $P_\pi = \frac{\pi^2}{90}\frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} * 3$

e) $P_\pi = PQGP - \Lambda^4$

$\Rightarrow T = 144 MeV$