Institut für Theoretische Physik
JLU Gießen
C. Fischer, G. Eichmann, C. Popovici

Blatt 2
WiSe 2011/12
03.11.2011

Übungen zur Statistischen Thermodynamik

Aufgabe 4 (Entropie)

Gegeben seien N unabhängige harmonische Oszillatoren, deren quantenmechanischer Zustand durch die Besetzungszahlen $n_1, \ldots, n_N$ gekennzeichnet wird. Die Gesamtenergie beträgt somit

$$E = \frac{N}{2}\hbar\omega + M\hbar\omega$$

mit $M \equiv n_1 + \cdots + n_N$. Zeigen Sie, daß die Zahl der Zustände mit dieser Energie durch

$$\Gamma(N, M) = \frac{(N+M-1)!}{M!(N-1)!}$$

gegeben ist, wobei angenommen wurde, daß die Oszillatoren unterscheidbar sind. Betrachten Sie nun den Grenzfall $M \gg 1$, $N \gg 1$ und berechnen Sie

$$\frac{1}{T} = \frac{d}{dE}\ln\Gamma(N, M)$$

als Funktion der Energie E und der Grundzustandsenergie $E_0 = N\hbar\omega/2$.

Aufgabe 5 (Phasenraumvolumen)

Betrachten Sie N (unterscheidbare) Punktteilchen der Masse m, die im Volumen V eingeschlossen sind und nicht miteinander wechselwirken. Zeigen Sie, daß die Zahl der Zustände, deren Energie kleiner als E ist, durch

$$\frac{V^N}{(2\pi\hbar)^{3N}N!} \cdot \frac{(2\pi m E)^{3N/2}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+1\right)}$$

gegeben ist.

Aufgabe 6 (Liouville-Gleichung)

Betrachten Sie ein System von klassischen Teilchen mit insgesamt f Freiheitsgraden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ seien die Teilchen gemäß der Dichte $\rho_0(\vec{q}, \vec{p})$ im Phasenraum verteilt, wobei $\vec{q}, \vec{p}$ die f-dimensionalen (generalisierten) Koordinaten des Systems sind. Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ hat sich die Phasenraumverteilung zu

$$\rho(\vec{q}, \vec{p}, t) = \int d^f q_0 \int d^f p_0 \rho_0(\vec{q}_0, \vec{p}_0)\delta(\vec{q} - \vec{Q}(\vec{p}_0, \vec{q}_0, t))\delta(\vec{p} - \vec{P}(\vec{p}_0, \vec{q}_0, t))$$

entwickelt, wobei $\vec{Q}(\vec{q}_0, \vec{p}_0, t)$ und $\vec{P}(\vec{q}_0, \vec{p}_0, t)$ die Lösungen der Hamilton'schen Gleichungen $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$ und $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$ zu den Anfangsbedingungen $\vec{q}(0) = \vec{q}_0$ und $\vec{p}(0) = \vec{p}_0$ sind.
Leiten sie aus obigem Ausdruck die Liouville-Gleichung für die Phasenraumdichte $\rho(\vec{q}, \vec{p}, t)$ ab,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial\rho}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial\rho}{\partial q_i}\right) = \{\rho, H\}\,.$$

Aufgabe 7 (Scharmittel)

Gegeben sein ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

a. Geben Sie die Trajektorie im Phasenraum als Funktion der Energie E an. Berechnen Sie den Zeitmittelwert

$$\overline{x^2} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} d\tau x(\tau)^2,$$

wobei T die Periodendauer des Oszillators und $x(t)$ seine Bahnkurve ist. Was ergibt sich im Grenzfall $T \to \infty$?

b. Betrachten Sie nun eine sehr große Zahl identischer Oszillatoren, die im Phasenraum gemäß der Dichte

$$\rho(x,p) = N^{-1}\delta(H(x,p) - E), \quad \int \frac{dxdp}{2\pi\hbar}\rho(x,p) = 1$$

auf der Energieschale verteilt sind. Bestimmen Sie die Normierungskonstante N als Vielfaches von $\hbar\omega$ und berechnen Sie den Scharmittelwert

$$<x^2>= \int \frac{dxdp}{2\pi\hbar}x^2\rho(x,p).$$

Gilt Scharmittel gleich Zeitmittel?