Institut für Theoretische Physik
JLU Gießen
C. Fischer, G. Eichmann, C. Popovici

Blatt 1
WiSe 2011/12
27.10.2011

Übungen zur Statistischen Thermodynamik

Aufgabe 1 (Binomialverteilung)

Ein ideales Gas bestehe aus $N = 10^{23}$ Molekülen, die sich unabhängig voneinander in einem Volumen V bewegen. Man betrachte ein Teilvolumen v:

a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $w_N(n)$, n Moleküle in v zu finden?
   Zeigen Sie, daß $\sum\limits_{n=0}^{N} w_N(n) = 1$.

b. Wie groß ist die mittlere Teilchenzahl $\bar{n} = <n>$ im Volumen v?

c. Berechnen Sie das relative Schwankungsquadrat $<(n-\bar{n})^2> /\bar{n}$. Wie groß ist dies für die Fälle $v = V, v = V/2$ und $v = 10^{-10}V$?

Aufgabe 2 (Besetzungswahrscheinlichkeit)

Betrachten Sie n Teilchen, die auf $N > n$ Zellen mit gleicher Wahrscheinlichkeit verteilt werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß sich genau ein Teilchen in jeder der ersten n Zellen befindet. Die Berechnung soll unter drei verschiedenen Annahmen durchgeführt werden:

a. die Teilchen sind unterscheidbar und in jeder Zelle dürfen sich beliebig viele Teilchen befinden;

b. die Teilchen sind ununterscheidbar und in jeder Zelle dürfen sich beliebig viele Teilchen befinden;

c. die Teilchen sind ununterscheidbar und in jeder Zelle darf sich maximal ein Teilchen befinden.

Aufgabe 3 (Ableitung der Stirling'schen Formel)

a. Die Euler'sche Γ Funktion ist durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t}$$

   definiert. Zeigen Sie durch partielle Integration, dass für $x = n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n!\,,\ n \in \mathbb{N}.$$

b. Leiten Sie die Stirling'sche Formel ab:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Nutzen Sie dafür die *Sattelpunktsnäherung*. Dabei wird das Parameterintegral

$$I(\lambda) = \int_{x_1}^{x_2} dx e^{-\lambda f(x)}$$

durch eine Gauß-Kurve approximiert, i.e. wenn die Funktion $f(x)$ bei $x = x_0$ ein Minimum besitzt, gilt (unabhängig von den Integrationsgrenzen x_1, x_2):

$$I(\lambda) \simeq e^{-\lambda f(x_0)} \int_{x_1}^{x_2} dx e^{-\frac{\lambda}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2} = e^{-\lambda f(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{\lambda}{2} f''(x_0) y^2} = e^{-\lambda f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{f''(x_0)\lambda}}.$$