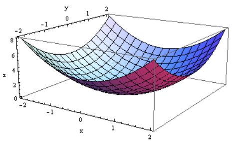
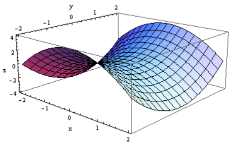
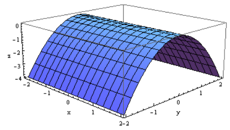
9 Übungsblatt von Analysis 2 zum Mittwoch, den 23.6.2010

9.1





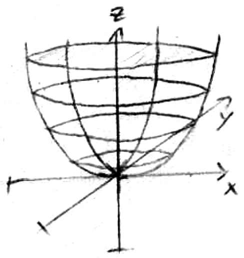


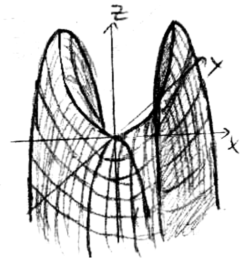
i) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (also positiv definit)

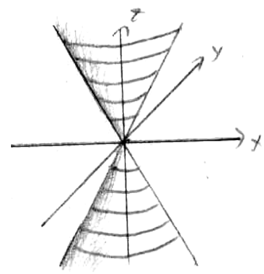
ii) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$ (also indefinit)

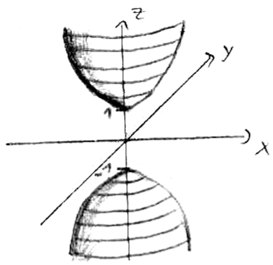
iii) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0. \quad \lambda_2 = -1$
(also negativ semidefinit aber nicht negativ definit)

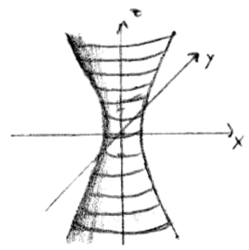
9.2

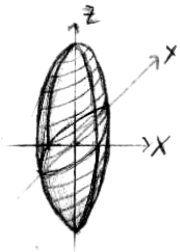
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

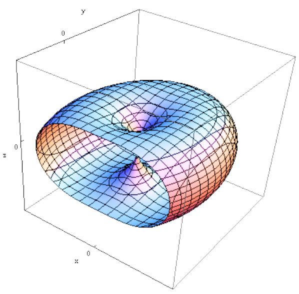
f) 

9.3

a) $g(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 - r$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} (\sqrt{x^2+y^2} - R)\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ (\sqrt{x^2+y^2} - R)\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{z=0, x=y=0, oder } x^2+y^2 = R.$$

$x^2 + y^2 = R$ nicht möglich.
$r^2 < R^2$ und $(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 0$. Also $\nabla g \neq 0$, $(0,0,0) \notin T$
$\forall p \in M \exists$ offene Umgebung W von $p \in \mathbb{R}^n$, mit $f \in C^1(W, \mathbb{R}^{n-k})$, da
M$\cap W = f^{-1}(\{0\})$ und $\nabla f_1(p) ... \nabla fn - k(p)$ l.u.



b) $\nabla g = 0 \Rightarrow x = y = z = 0 \notin T. \Rightarrow \{(x,y,z) | x^2 + y^2 = R\} \not\subset T.$
$\Rightarrow$ ist nicht möglich, da (0,0,0)$\notin T$

9.4

Sei $p \in M$, γ Kurve in M mit $\gamma(0) = (0,0,0)$, γ dbar. bei 0.
Falls $p = (0,0,0)$ und $\dot\gamma(0) = (\dot{\gamma_x}(0), \dot{\gamma_y}(0), \dot{\gamma_z}(0))$, so für $\lim\limits_{t \to 0} \gamma(t) \notin M \Rightarrow T_{(0,0,0)}M \subset M$.
Sei nun $p = (x,y,z) \neq (0,0,0)$ in der Nähe von p ist M 2-dim-Mft. von $\mathbb{R}^3$, also $T_pM \subset$ Unterraum von $\mathbb{R}^3$, $dim(T_pM) = 2$,
mit $\gamma_0(t) = (1+t)p \subset M$, $\dot\gamma_0(0) = p \subset T_pM$
Ist $x = |z|\cos(\varphi)$, $\quad y = |z|\sin(\varphi)$, so ist mit $\gamma_1(t) = (|z|\cos(\varphi+t), |z|\sin(\varphi+t), |z|) \in M$:
$\gamma_1(0) = p, \quad \dot\gamma_2(0) = (-y, x, 0) \in T_pM \Rightarrow T_pM = \mathbb{R} \times \oplus \mathbb{R} \times (-y, x, 0)$

Julian Bergmann
Florian Greiner
Timo Grosch
Julia Welsch

9.5

a) Sei (a_n) Nullfolge in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dann $E_0 + \frac{M\gamma}{||a_n||_2} > 0$.
Sei nun b_n in $\mathbb{R}^3$. so, dass $||b_n||_2 = \sqrt{(\frac{E_0}{m} + \frac{M\gamma}{m}\frac{1}{||x_n||_2})^2}$.
Dann $(a_n, b_n) \in F_{E_0}$, aber $a_n \to 0$, $||b_n||_2 \to \infty$
Also F_{E_0} für kein $E_0 \in \mathbb{R}$ kompakt.

b) Nach Heine-Borel: $\tilde{F}_{E_0}$ $kp. \Leftrightarrow \tilde{F}_{E_0}$ beschr. ung abg.
$(a_n, b_n) \subset \tilde{F}_{E_0}, (a_n, b_n) \to (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$, also $||\tilde{x}||_2 \geq R$ und $\frac{1}{2}m||\tilde{v}||_2^2 - mM\gamma\frac{1}{||\tilde{x}||_2} = \lim \frac{1}{2}m||b_n||_2^2 - mM\gamma\frac{1}{||b_n||_2} = E_0$, also $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{F}_{E_0}$. Daher $\tilde{F}_{E_0}$ abg.
$\forall E_0 \geq 0: \quad \forall x, ||x||_2 \geq R \exists v: \frac{1}{2}m||v||_2^2 = E_0 + \frac{mM\gamma}{||x||_2}$
$\Rightarrow \tilde{F}_{E_0}$ nicht kp.
$\forall E_0 < 0: \quad \forall x \forall v \in F_{E_0}: \frac{mM\gamma}{||x||_2} = \frac{1}{2}m||v||_2^2 + |E_0| \geq |E_0|$
$\Rightarrow R \leq ||x||_2 < \frac{mM\gamma}{|E_0|}: \tilde{F}_{E_0}$ kp.
Also F_{E_0} kp für alle E_0 kleiner 0

9.6

$E(x, v) = \frac{v^2}{2} - x^2 + x^4$
$E(x, y) = c \Rightarrow v = \pm\sqrt{2(c + x^2 - x^4)}$ (für c=0 also $v = \pm\sqrt{2x^2 - 2x^4}$)
Für $c = -\frac{1}{4}$ ist $M_c = \{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$, also keine C^1-Umft
Für $c \in (-\frac{1}{4}, 0)$ ist $(x, v) \in M_c$, also $\frac{v^2}{2} - x^2 + x^4 = c$
Dann $\nabla E(x, v) = (-2x + 4x^3, v)$. Ist c=0, dann $(0,0) \in M_0$ und M_0 in Umgebung von (0,0). Dort kreutzt sich allerdings der Graph, also ist dieser für x oder v nicht umsetzbar. Daher kein Umft.
Ist $c > 0$, so ist $(x, v) \in M_c$, also Umft.
Also ist M_c für alle $c \in (-\frac{1}{4}, 0) \cup (0, \infty)$ eine Umft. von $\mathbb{R}^2$