8 Besprechung in Analysis 2 zum Blatt 10, zum 30.6.2010

8.1

a,b) Sei p nicht konstant, $p(z) = \sum_{j=0}^{n} b_j(z-z^*)^j, \quad b_n \neq 0, \quad n \geq 1$

Sei $b_0 \neq 0$. Sei $j_0 \in \{1, ..., n\}$ minimal mit $b_{j_0} \neq 0$.

Dann $p(z) = b_0 + b_{j_0}(z-z^*)^{j_0} + \sum_{j=j_0+1}^{n} b_j(z-z^*)^j$.

$u := -\frac{b_0}{b_{j_0}} \neq 0$, und es ex $\varphi \in (0, 2\pi)$ mit $u = |u| \cdot e^{i\varphi}$.

Setze $w := |u|^{1/j_0} \cdot e^{i\varphi/j_0}$, also $w^{j_0} = u$

Betr. $f : \mathbb{R} \ni r \mapsto |p(z^* + rw)| \in \mathbb{R}, \quad f(0) = p(z^*)| = |b_0| \neq 0$

$f(r) = |b_0 + b_{j_0} \cdot (\underbrace{rw}_{r^{j_0}u})^{j_0} + \sum_{j=j_0+1}^{n} b_j(rw)^j| = |b_0 + b_{j_0}(-\frac{b_0}{b_{j_0}})r^{j_0} + ...|$

$= |b_0(1 - r^{j_0}) + r^{j_0+1} \underbrace{\sum_{j \geq j_0+1} b_j w^j r^{j-(j_0+1)}}_{=:q(r),\text{ beschr. etwa durch c für } r\in[0,1]}$

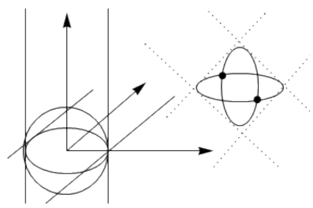
Für r klein genug ist $|r^{j_0+1}, \sum ...| \leq r^{j_0+1} \cdot c \leq \frac{|b_0|}{2} r^{j_0}$

Für solche r: $f(r) \leq |b_0|(1 - r^{j_0}) + \frac{|b_0|}{2} r^{j_0} = |b_0| - \frac{|b_0|}{2} r^{j_0} < |b_0| = f(0) = |p(z^*)|$

Somit, falls $|p(.)|$ bei z^* Minimum hat, notwendig $b_0 = 0$, also $p(z*) = 0$

Nach Blatt 8 ex. z^* globales Minimum von $|p(.)|$, also $p(z^*) = 0$

8.2



$M = g^{-1}(\{0\} \in \mathbb{R}^2)$, wobei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$

Sei $(x,y,z) \in M$. Falls $z \neq 0$, so wegen $(x,y) \neq 0$:

$rang(J_g(x,y,z)) = 2$, M lokal bei (x,y,z) 1-dim Umft.

Falls $z = 0 : x = \pm 1, \ y = 0, \ rang(J_g(x,y,z)) = 1$

Betrachte $\gamma_{\pm}(y) := (\sqrt{1-y^2}, y, \pm y)$ für y nahe 0

$\forall y : \gamma_{\pm}(y) \in M, \ \gamma_{\pm}(0) = (1,0,0), \quad \dot{\gamma}_+(0) = (0,1,1), \quad \dot{\gamma}_-(0) = (0,1,-1)$

Also $T_{1,0,0}$ kein 1-im Uraum von $\mathbb{R}^3$, also hier lokal M nicht 1-dim Umft.

8.3

Beh. folgt aus IFT, falls $\underbrace{\partial_3 f(0,0,1)}_{2\cdot 1(1+0)=2} \neq 0$.

8.4

a) $f(a,b) = (a-b)^2 + (a^2+1-b)^2$

$f(a,b) = (2(a-b) + 2(a^2+1-b) \cdot 2a, -2(a-b) - 2(a^2+1-b))$

$= 2(2a(a^2+1-b) + a - b, -(a^2+1-b) - (a-b))$

$\Leftrightarrow (a-b) = -(...)2a, \wedge (a-b) = (...)$

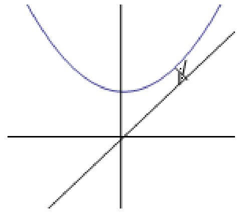
notw. $a = \frac{1}{2}$ oder $(...) = 0$

Falls $(...) = 0$, so $a = b$, $a^2 + 1 - a = 0$, nicht mögl für $a \in \mathbb{R}$

Also $a = \frac{1}{2}, \ -(\frac{1}{4} + 1 - b) - (\frac{1}{2} - b) = 0, \ b = \frac{7}{8}$

Es ex. Min (!) dies bei $a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{7}{8}$

$\Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{5}{4}) \in P; \quad (\frac{7}{8}, \frac{7}{8}) \in G$



b) $f(a,b,c,d) = (a-c)^2 + (b-d)^2$, Nebenbd: $g_1(a,b,c,d) = b - a^2 - 1 = 0$, $g_2(...) = c - d = 0$
(stets $\nabla g_1()$,$\nabla g_2()$ l.u.)
Notw. für Min nach Lagrange: $\nabla f(a,b,c,d) = \lambda_1 \nabla g_1() + \lambda_2 \nabla g_2()$
$\Leftrightarrow (2(a-c), 2(b-a), 2(c-a), 2(d-b)) = \lambda_1(-2a, 1, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, 1, -1) = (-2\lambda_1 a, \lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2)$
Also $2\lambda_1 a = \lambda_2$, $\quad \lambda_2 = \lambda_1 \Rightarrow 2\lambda_1 a = \lambda_1$, damit $a = \frac{1}{2}$ oder $\lambda_1 = 0$
Bei $\lambda_1 = 0$ wäre $a = c$, $b = d$, unmöglich, da $G \cap P = \emptyset$
Also $a = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{4}$
Weiter: $-1 = -\frac{2a}{1} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{\frac{1}{2}-c}{\frac{5}{4}-d} = \frac{\frac{1}{2}-c}{\frac{5}{4}-c} \Rightarrow c = \frac{7}{8} = d$

8.5

$$\int_0^{\pi/2} (z \int_0^{\pi/2} (e^y \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)dx}_{\pi/4})dy)dz$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} (e^{\pi/2} - 1) z dz$$
$$= \frac{\pi}{4}(e^{\pi/2} - 1) \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^3}{32}(e^{\pi/2} - 1)$$

Hinweise Blatt 11

1) b) richtig einsetzen, j darstellen als integral über dessen Ableitung.
2) $J(t) = J(a) + \int_a^t J'(s)ds$ (in Klammer von j vorstellen als $\varphi(t,y) \Rightarrow J = \int_c^d (\int_a^t ...dx)dy$
Danach nur 1 anwenden.
3) wenn EW und EV ex und algebraisch, dann alles schöne glatte funktionenvon Matrix, wenn Matrix variieren. Einfach Satz implizierte Fu'n anwenden (nach EW), Zusatzbedingung: EW-Länge 1, damit EW eindeutig! (part nach μ und x invertierbar!)
4) Abl von EW durch Matrix nehmen und $< v_0, A'(0)v_0 >$ bestimmen.
5) wenn Matrix sym. dann quadratische Form $q_A(x) =< x, Ax >$, EInheits-EV durch Minimierung in Einheitssphäre, Tangentialraum senkrecht. Punkte wo quadr. Form kritisch mögliche Extrema, genau EV von A.