1   2. Klausur Analysis 2   Julian Bergmann   1012877   2

$\boxed{\Sigma\, 32{,}5}$

Nr. 1

a) Es existiert ein Zusammenschluss von endlich vielen Teilüberdeckungen aus (X,d), $(U)_{i\in I}$, sodass $K \subset \bigcup U_i$.   von welcher Überd.?   Nein! −2

Nach Heine Borel außerdem: K kompakt $\Leftrightarrow$ K beschr. & abg.   Nein nur im $\mathbb{R}^n$.

Ist eine Menge kp., dann auch besch. & abg.. Besteht sie weiterhin nur aus isolierten Punkten, so lässt sich für alle Elemente der Menge ein $B(x_i, \varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$ und x_i als der isolierte Pkt. finden, sodass die Menge eine Teilmenge von $\bigcup B(x_i, \varepsilon)$ ist, also endlich.   Nein   ? unklar, bzw. falsch   −2

b) Nach dem Satz über Implizite Funktion existieren nun Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0, $V \subset \mathbb{R}^l$ von y_0, sodass $\forall (x,y) \in U \times V: f(x,y) = 0 \Leftrightarrow g(x) = y$, insbesondere $g(x_0) = y_0$ für $g \in C^1(U,V)$ und $(U \times V) \subset (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l)$.

Außerdem gilt dann $f\, C^1 \Rightarrow g\, C^1$ und

$$Dg(x) = (D_2 f(x, g(x)))^{-1} \circ D_1 f(x, g(x))$$

$g \in C^1(U,V)$! −0.5

c) $f((0,1),(0,1)) = ((\frac{0}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{0}{3}, \frac{1}{3}))$

Da $(0,\frac{1}{2}) \subset (0,1)$ und $(0,\frac{1}{3}) \subset (0,1)$, bildet f Q in sich selbst ab.

Kontraktion: $\exists K \subset [0,1)\ \forall x_1, x_2 \in Q \times Q: d(f(x_1), f(x_2)) \leq K d(x_1, x_2)$ wie ist das gemeint? Lipschitzweite?

Sei nun $K = \frac{9}{10}$, so ist bei $x_1 \leq x_2$ die rechte Seite $(x_2 - x_1) \cdot \frac{9}{10}$, also als maximal möglicher Bereich $((0,1)^2 - (0,1)^2) \cdot \frac{9}{10}$.

Dies soll ~~größer~~ gleich $d(f(x_1), f(x_2))$ sein, also, da $f(x_1) \leq f(x_2)$,   ? (s. Seite)

$((0,\frac{1}{2}) \times (0,\frac{1}{3}) - (0,\frac{1}{2}) \times (0,\frac{1}{3}))$.

Da $(0,\frac{1}{2}) \subset (0,\frac{9}{10})$ und $(0,\frac{1}{3}) \subset (0,\frac{9}{10})$, ist die Funktion also Kontrahierend.

Die Argument ist falsch! −0.5

Der Fixpunktsatz gilt hier nicht, da Q nicht kp, insbesondere abgeschlossen, da der hier richtige Fixpunkt $(0,0)$ nicht mehr in $Q \times Q$ liegt und damit hier nicht existiert.

Dass Q kp. sein muss ist keine Vor. des BFPS! −0.5

d) $\mathrm{Hess}_f(0,0) = \left(\begin{pmatrix} \partial_1^2 f_1 & \cdots & \partial_n^2 f_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1^2 f_n & \cdots & \partial_n^2 f_n \end{pmatrix}\right)(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f_1 & \partial_2^2 f_1 \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\log(1+y^2)(0,0) \\ \sin(x) \cdot \left(\frac{1}{1+y^2} \cdot 2y\right)'(0,0) \end{pmatrix}$ Nein!

$= \begin{pmatrix} -\sin(x)\log(1+y^2)(0,0) & \sin(x) \cdot \frac{2\cdot(1+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+y^2)^2}(0,0) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -0 \cdot 0 & 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = (0,0)$ f −2

zu c): nicht gez.: f hat keinen FP   −0.5

2. Klausur Analysis 2 Julian Bergmann 1012877

8 in SE

Nr. 2

a) $\varphi(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} w+z^2-\sin(2x)-\cos(y) \\ x^2+y^2-z \end{pmatrix}$

Dann $\varphi^{-1}(\{0\}) = M.$ ✓ $\Rightarrow$ Untermannigfaltigkeit

$J_\varphi(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 & \partial_4 f_2 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 & \partial_4 f_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2\cos(2x) & \sin(y) & 2z & 1 \\ 2x & 2y & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ✓ 5

$\Rightarrow \text{Rang}(J_\varphi(x,y,z,w)) = 2$ ✓ $\Rightarrow$ Dimension 2 ✓

b) Zeigen per Einsetzen!

$w = \sin(2x)+\cos(y)-z^2 = \sin(2\cdot 0)+\cos(0)-0^2 = 1 \overset{!}{=} 1$

$\Rightarrow$ 1. Gleichung erfüllt

$z = x^2+y^2 = 0^2+0^2 = 0 \overset{!}{=} 0$ $\Rightarrow$ 2. Gleichung erfüllt!

$\Rightarrow p \in M.$ ✓

i) $T_pM = \{ v \mid \exists\, \varphi: I \to M,\ I \subset \mathbb{R},\ 0 \in I,\ \varphi$ an 0 dbar, $\varphi(0) = p,\ \dot\varphi(0) = v \}$

$\varphi(t) := p + t(\dots)$

Da $J_\varphi(x,y,z,w)$ aus a) k. Immersion gilt

$T_pM = T_{\varphi(p_1)}M = \text{span}\{\partial_1\varphi(p_1), \dots, \partial_n\varphi(p_1)\}$ nicht.

Basis von T_pM?

ii) Für T_pM mit M Umft. gilt:

$(T_pM)^\perp = \text{span}\{\nabla f_1, \dots \nabla f_n\}$

$= \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2\cos(2x) \\ \sin(y) \\ 2z \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 3

(p einsetzen!)

2. Klausur Analysis 2 Julian Beymann 1012877

$\boxed{9\frac{1}{2}/10P}$

Nr 3

a) $\nabla f = \begin{pmatrix} d_1 f_1 \\ d_2 f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2(1-y)(2xe^{-2x} + x^2\cdot(-2)e^{-2x}) \\ x^2 e^{-2x}(2y-3y^2) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y^2(1-y)(2x - 2x^2)e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow y^2(1-y)(2x-2x^2) = 0$

$\Rightarrow x^2 e^{-2x}(2y-3y^2) = 0 \Leftrightarrow x^2(2y-3y^2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0,\ y_1 = 0 \lor 2y = 3y^2 \Leftrightarrow 2 = 3y \Leftrightarrow y_2 = \frac{2}{3}$

$y^2(1-y)(2x-2x^2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Leftrightarrow y^2(1-y)(2-2x) = 0$

$\Rightarrow x_3 = 1, \Leftrightarrow y^2 - y^3 = 0 \Rightarrow y_3 = 0 \Leftrightarrow y - y^2 = 0 \Rightarrow y_4 = 0 \Rightarrow y_5 = 1$

1\. Komp $= 0$ für $y = 0 \lor y = 1 \lor x = 0 \lor x = 1$
2\. Komp $= 0$ für $x = 0 \lor y = 0 \lor y = \frac{2}{3}$

Da f mindesten 0 als Ausgabe erreichen kann, f für $x=0 \lor y=0$ aber 0 ausgibt, sind diese k. Maxima. Auf für $y=1$ gibt f 0 aus., somit muss $y=\frac{2}{3}$, $x=1$ sein, damit $(\nabla f)_1 = 0$ durch $x=1$ und $(\nabla f)_2 = 0$ durch $y = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow f(1, \frac{2}{3}) = \frac{4}{9}(\frac{1}{3})\cdot 1 \cdot e^{-2} = \frac{4}{27e^2}$ ✓ $\Rightarrow \mathrm{Max}\left((1, \frac{2}{3}) \mid \frac{4}{27e^2}\right)$

c) Für NB gilt: $\nabla f = \lambda \nabla g$ $\quad (g = 9x^2 + y^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0)$

$\Rightarrow 2x = \lambda \cdot 18x \quad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{9}$ wenn $x \neq 0$

$1 = \lambda \cdot 2y \quad \Rightarrow y = 4{,}5$ wenn $x \neq 0$

$9x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{9}(1-y^2) = \frac{1}{9}(1 - \frac{81}{4}) = \frac{1}{9}(-\frac{77}{4})$
$= -\frac{77}{36} \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{77}{36}}$

Also wäre $x \in \mathbb{C}$, x jedoch auf $\mathbb{R}$ beschr. $\Rightarrow x = 0$

$9\cdot 0^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

$f(0,1) = 1$, $f(0,-1) = -1$
$\Rightarrow$ Max (gl.) ✓ $\Rightarrow$ Min (gl.) ✓

b) Da f stetig, E vollst, besitzt f auf E Min & Max

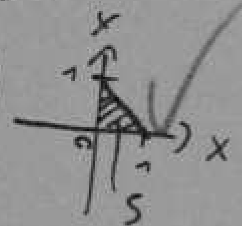
$\boxed{-\frac{1}{2}P}$ „kompakt"

2. Klausur Analysis II · Julian Bergmann 1012877

10/10

Nr. 4

a)



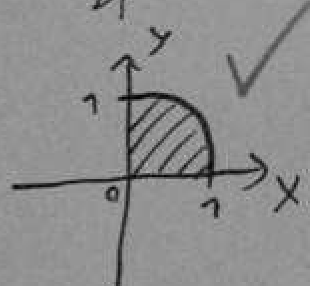
$$\int_S \cos(x+y)\,d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \cos(x+y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left([\sin(x+y)]_0^{1-x}\right)dx = \int_0^1 (\sin(1) - \sin(x))\,dx$$

$$= [x\sin(1)]_0^1 - [-\cos(x)]_0^1$$

$$= \sin(1) + \cos(1) - \cos(0) = \sin(1) + \cos(1) - 1$$

b)



$$S_x = \frac{1}{|D|}\int_D x \left(\frac{1}{|D|}\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\sqrt{\det(g_{ij})}\,dy\,dx\right)$$

$$\int_D y = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \tfrac{1}{2}(1-x^2)\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{6}x^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{3}$$

$$\cancel{S_y = \frac{1}{|D|}\int_D} \quad |D| = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad S_y = \frac{4}{3\pi}$$

$$\int_D x = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^1 \tfrac{1}{2}(1-y^2)\,dy$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{6}y^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad S_x = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3\pi}$$

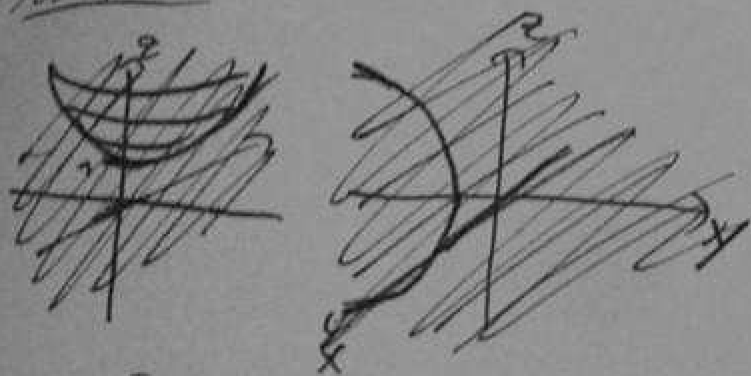
$$\Rightarrow S = \left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right)$$

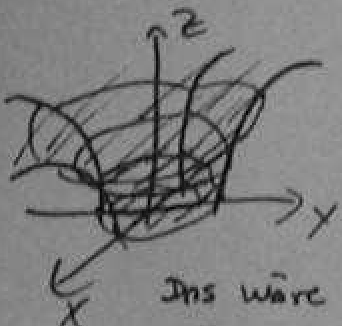
2. Klausur Analysis II Julian Bergmann 1012877

Nr. 5

3P

Do 07.08.





Das wäre richtig gewesen! −2P

a) $\int_K dV = \cancel{\iint_{0}^{1\sqrt{\cosh^2(z)-x^2}}}$

$$\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\cosh^2(z)} dr \cdot (1\cdot r)$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} \left[r^2\right]_1^{\cosh^2(z)} d\varphi\, dz = \cancel{2\pi(\cosh^4(1)-1)}$$

$$= 2\pi \int_0^1 (\cosh^4(z)-1)\,dz$$

$$= 2\pi\int_0^1 \left(\left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2 - 1\right)dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{e^{2z}+2e^{z}e^{-z}+e^{-2z}}{4}\right)dz - 1$$

$$= \frac{1}{2}\pi \left[\frac{1}{2}e^{2z} - \frac{1}{2}e^{-2z}\right]_0^1 + 1$$

$$= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+1$$

$$= \frac{1}{2}\pi\, \frac{e^4-1}{2e^2}+1$$

b) $\int_D f = \int_K \sqrt{\det(g_{ij})}\cdot 1$, $g_{ij} = \begin{pmatrix} (\partial_1 f)(\partial_1 f) & \cdots & (\partial_n f)(\partial_1 f) \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial_1 f)(\partial_n f) & \cdots & (\partial_n f)(\partial_n f) \end{pmatrix}$

Boden: $\pi\cdot(\cosh^2(0))^2 = \pi$

Deckel: $\pi(\cosh^2(1))^2 = \pi\left(\left(\frac{e+\frac{1}{e}}{2}\right)^2\right)^2 = \pi\left(\frac{e+\frac{1}{e}}{2}\right)^4$ +1P

$2\pi \int_0^1 \sqrt{\cosh^2(z)-x^2}\, d\varphi\, dz$

?!