Elektrodynamik

Skript zur Vorlesung von Bunde

Mitgeschrieben und geLaTeXt von Julian Bergmann

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Einführung

1.1 Partielle Ableitung und Vektorprodukt

1.1.1 Partielle Ableitung

$F(x,y,z) \equiv F(\vec{r})$

$\frac{\partial F}{\partial x}|_{x_1,y_1,z_1} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1+\Delta x, y_1, z_1) - F(x_1,y_1,z_1)}{\Delta x}$ (siehe Mechanik 1)

ähnlich $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$

Bsp: $F(\vec{r}) = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{r}$ etc.

$\vec{A}(\vec{r}) = A_x(x,y,z)\vec{e}_x + A_y(x,y,z)\vec{e}_y + A_z(x,y,z)\vec{e}_z$

$\frac{\partial \vec{A}(\vec{r})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} A_x(\vec{r})\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial x} A_y(\vec{r})\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial x} A_z(\vec{r})\vec{e}_z$

1.1.2 Vektoroperator

$\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$

a) *Gradient*: $\vec{\nabla} V(x,y,z) = \vec{e}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z} = (\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial <}, \frac{\partial V}{\partial z})$

b) *Divergenz*: $\vec{\nabla} \vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}$

c) *Rotation*: $\vec{\nabla} \times \vec{A}(x,y,z)$

Wichtige Rechenregeln:

1) $\vec{\nabla}\vec{r} = 3$

2) $\vec{\nabla}(\vec{r} \times \vec{\alpha}) = 0$, wenn α konst

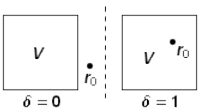
3) $\vec{\nabla} \times (\varphi(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})) = \varphi(\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{\nabla}\varphi) \times \vec{A}$

4) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0$

5) $\vec{\nabla} \times f(\vec{r})\vec{r} = 0$

6) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \Delta\vec{A}, \quad \Delta = \nabla^2$

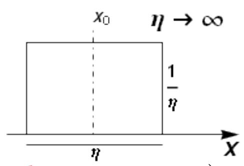
1.2 Delta-Funktion



Dichte von Punktladungen: $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = 0$ für $r \neq \vec{r}_0$, $\int d^3r\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \begin{cases} 1 & falls\ \vec{r}_0\ in\ V \\ 0 & falls\ \vec{r}_0\ nicht\ in\ V \end{cases}$

$\varrho(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$. offensichtlich: $\delta - F$ beliebig schmal und beliebig hoch.

1.2.1 Darstellung der Delta-Funktion in einer Dimension



Einfachste Darstellung in d=1:

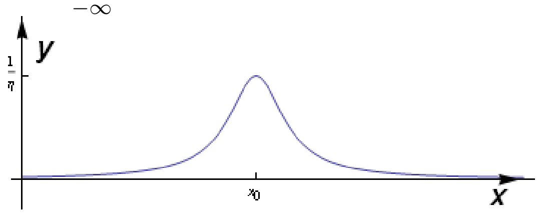
Betr. $L_\eta(x-x_0) = \frac{1}{\pi}\frac{\eta}{\eta^2+(x-x_0)^2} \overset{x=x_0}{\underset{\eta\to 0}{\longrightarrow}} \infty$ (Breite der *Lorenzkurve* $\eta, \eta \to 0$)

$\lim\limits_{\eta\to 0} \int\limits_\alpha^\beta dx \frac{1}{\pi}\frac{\eta}{\eta^2+(x-x_0)^2} = \frac{1}{\pi} \lim\limits_{\eta\to 0} [\arctan(\beta - x_0/\eta) - \arctan(\alpha - x_0/\eta)] = \begin{cases} 1 & ,\alpha < x_0 < \beta \\ 0 & ,sonst \end{cases}$

(genauso Gaußkurve)

Sehr wichtige andere Darstellung: $\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)} dk$

(*Fouriertransformierte* etc.)



Die $\delta - F'$ hat folgende weitere Eigenschaft: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f(x) dx = f(x_0)$
(kann man auch als Def. d. $\delta - F'$ benutzen)

Beweis

$\lim\limits_{\eta \to 0} \int\limits_{\infty}^{\infty} L_\eta(x-x_0) f(x) dx = f(x_0) \int\limits_{\infty}^{\infty} L_\eta(x-x_0) dx = f(x_0)$ □

Wichtige Eigenschaft (Beweis in Übung):

1) $\delta(g(x)) = \sum\limits_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$, x_i: einfache Nullstelle, $\sum\limits_i$: über Nullstellen, $g(x_i) = 0$, $g'(x_i) \neq 0$
$\delta(x/a) = |a| \delta(x)$

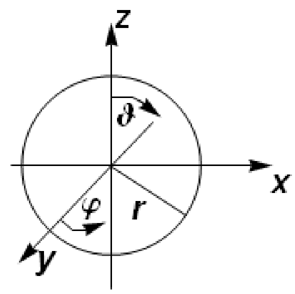
2) $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \delta'(x-x_0) f(x) dx = f'(x_0), \;\; \alpha < x_0 < \beta$

1.2.2 Delta-Funktion in 3 Dimensionen

Karthesische Koordinaten:

$\vec{r} = (x,y,z), \quad \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \int\limits_V = \int \int\limits_V \int dxdydz$
$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) := \gamma(x,y,z) \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0)$
$\Rightarrow \int\limits_V d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = 1 = \int \int\limits_V \int dxdydz \; \gamma(x,y,z) \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0)$
$= \gamma(x,y,z) \int \int\limits_V \int dxdydz \; \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0)$
$= \gamma(x,y,z) \int dx \delta(x-x_0) \int dy \delta(y-y_0) \int dz \delta(z-z_0) = \gamma(x,y,z) = 1$
$\Rightarrow \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0)$

Kugelkoordinaten



$x = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \quad z = r \cos(\vartheta)$
$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin(\vartheta_0)} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$
$\int \int\limits_V \int d^3r = \int \int\limits_V \int r^2 \sin(\vartheta) \; dr d\vartheta d\varphi$

Zylinderkoordinaten

$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\rho_0} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0)$
$\int \int\limits_V \int dr = \int \int\limits_V \int \rho d\rho d\varphi dz$

1.3 Taylorentwicklung skalarer Felder

$\varphi(\vec{r})$ beliebig oft diffbar, $\varphi(\vec{r}), \varphi(\vec{r} + \Delta\vec{r})$?
$d = 1 : \varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n ; \varphi(\vec{r} + \Delta\vec{r})) = \varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$
Trick: $F(t) = \varphi(\underbrace{x_1 + \Delta x_1}_{u_1}, \underbrace{x_2 + \Delta x_2}_{u_2}, \underbrace{x_3 + \Delta x_3}_{u_3})$
Jetzt: F(t) um t=0 entwickeln: $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \underbrace{\frac{du_1}{dt}}_{\Delta x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \underbrace{\frac{du_2}{dt}}_{\Delta x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \underbrace{\frac{du_3}{dt}}_{\Delta x_3}$

$$\begin{aligned}\frac{d^2F}{dt^2} = {} & \Delta x_1\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial u_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\Delta x_2 + \frac{\partial}{\partial u_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\Delta x_3\right)\\ & +\Delta x_2\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial u_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\Delta x_2 + \frac{\partial}{\partial u_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\Delta x_3\right)\\ & +\Delta x_3\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial u_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\Delta x_2 + \frac{\partial}{\partial u_3}\frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\Delta x_3\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\Delta x_i \sum_{j=1}^{3}\Delta x_j \frac{\partial^2}{\partial u_i u_j}\varphi \overset{!}{\equiv} \left(\sum_{i=1}^{3}\Delta x_i \frac{\partial}{\partial u_i}\right)^2 \varphi(u_1,u_2,u_3)$$

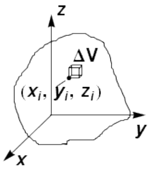
Allgemein: $\frac{d^nF}{dt^2} = \left(\sum_{i=1}^{3}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial u_i}\right)^n \varphi(u_1,u_2,u_3) \Rightarrow \frac{d^nF}{dt^n}|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^{3}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n \varphi(x_1,x_2,x_3)$

$$\Rightarrow F(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)t^n = F(1) \equiv \varphi(\vec r + \Delta\vec r) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{3}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}}_{\Delta\vec r\cdot\vec\nabla}\Big)^n}_{e^{\Delta\vec r\vec\nabla}}\varphi(\vec r)$$

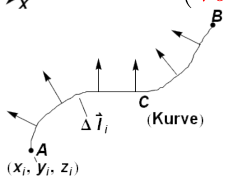
Bsp: $\varphi(\vec r) = \frac{1}{|\vec r - \vec r_0|}$ um $r=0$ nach kleinen $\vec r$ entwickeln.
wichtige Hilfsformel: $\vec\nabla\frac{1}{(|\vec r-\vec r_0|)^n} = -n\frac{1}{(|\vec r-\vec r_0|)^{n-1}}\frac{\vec r-\vec r_0}{|\vec r-\vec r_0|}$
$\varphi(\vec r) = \frac{1}{|\vec r-\vec r_0|} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0^3}\vec r\cdot\vec r_0 + \frac{1}{2}\frac{1}{r_0^5}(3(\vec r\vec r_0)^2 - r^2r_0^2) + \ldots$

1.4 Flächenintegrale

1.4.1 Volumen- und Linienintegrale

a) 

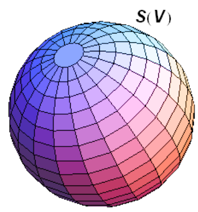
In $V: f(x,y,z) \Rightarrow \int\int_V\int dxdydz f(x,y,z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\Delta V_i}_{\Delta x_i Delta y_i \Delta z_i} f(x_i,y_i,z_i)$
(*Volumenintegral*)

b) 

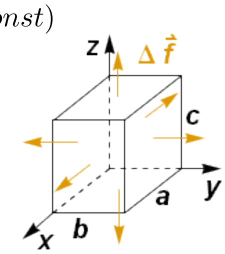
$\int_A^B d\vec l\vec E(x,y,z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta\vec l\vec E(x_i,y_i,z_i)$
(Kurven-/*Linienintegral*)

1.4.2 Flächenintegral

Gegeben: $\vec E(\vec r) = (E_x(\vec r), E_y(\vec r), E_z(\vec r))$ und Volumen V mit *geschlossener Oberfläche* S(V). Zerlege S(V) in N einzelne *Flächenelemente* Δf_i und definiere Vektor $\Delta\vec f_i = \Delta f_u\cdot\vec n(\vec r_i)$ (n:Nach außen gerichteter *Normalenvektor* bei $\vec r_i$).



$I_{S,N} = \sum_{i=1}^{N}\vec E(\vec r)\cdot\Delta\vec f_i (N\to\infty\Rightarrow I_S)$
I_S: Fluss von $\vec E(\vec r)$ durch S. Gilt auch für *nicht-geschlossene Flächen*. Anwendung: E-Statik.
Bsp: Fluss eines homogenen Feldes durch Quader. ($\vec E(E_x,E_y,E_z) = const$)
$\oint_{S(V)}\vec Ed\vec F = -abE_z + abE_z - acE_y + acE_y - bcE_x + bcE_x = 0$
Leicht verallgemeinerbar auf beliebige geschl. Flächen.

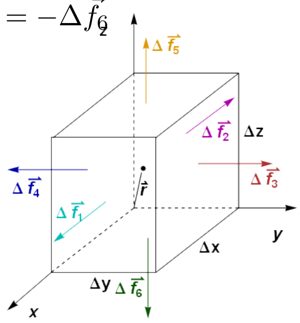


1.5 Integraldarstellung der Divergenz

Betr: kleines Volumenelement ΔV um $\vec{r}_0$

Beh: $\vec{\nabla}\vec{E} = \lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\cdot\oint\limits_{S(\Delta V)}\vec{E}d\vec{f}$

$\Delta\vec{f}_1 = \Delta y\Delta z\vec{e}_x = -\Delta\vec{f}_2,\ \Delta\vec{f}_3 = \Delta x\Delta z\vec{e}_y = -\Delta\vec{f}_4,\ \Delta\vec{f}_5 = \Delta x\Delta y\vec{e}_z = -\Delta\vec{f}_6$



$$\Rightarrow \oint\limits_{S(V)}\vec{E}d\vec{f} = \int\int dydz\,\underbrace{(E_x(x_0+\frac{\Delta x}{2},y,z) - E_x(x_0-\frac{\Delta x}{2},y,z))}_{\frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0,y,z)\Delta x + O((\Delta x)^3)}$$

$$+\int\int dxdz\,\underbrace{(E_y(x,y_0+\frac{\Delta y}{2},z) - E_y(x,y_0-\frac{\Delta y}{2},z))}_{\frac{\partial E_y}{\partial y}(x,y_0,z)\Delta y + O((\Delta y)^3)}$$

$$+\int\int dxdy\,\underbrace{(E_z(x,y,z_0+\frac{\Delta z}{2}) - E_z(x,y,z_0-\frac{\Delta z}{2}))}_{\frac{\partial E_z}{\partial z}(x,y,z_0)\Delta z + O((\Delta z)^3)}$$

Jetzt: $\Delta V\to 0 \Rightarrow \Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0 \Rightarrow x\to x_0, y\to y_0, z\to z_0$

$$\Rightarrow \oint\limits_{S(V)}\vec{E}d\vec{f} = \Delta x\Delta y\Delta z\underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial E_z}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint\limits_{S(\Delta V)}\vec{E}\alpha\vec{F}\ (*)$$

a) $\vec{E} = const$ im Bereich von $\Delta V \Leftrightarrow \vec{E} = 0$

b) $\vec{\nabla}\vec{E}$ beschreibt „*Quelle*“ des Feldes, $\vec{\nabla}E$ ist maximal wenn $\vec{E}$ überall $||d\vec{f}$ ist.

c) Folgerung: $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{a}\varphi(\vec{r}),\ a$: const aber beliebig.

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{a}\varphi(\vec{r})) = \underbrace{(\vec{\nabla}\vec{a})}_{0}\varphi(\vec{r}) + \vec{a}\underbrace{\vec{\nabla}\varphi}_{grad} = \vec{a}\vec{\nabla}\varphi = \vec{a}\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint\limits_{S(\Delta V)}d\vec{f}\varphi$$

Da $\vec{a}$ beliebig $\Rightarrow \vec{\nabla}\varphi = \lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint\limits_{S(\Delta V)}d\vec{f}\varphi$

(*Integraldarstellung des Gradienten*)

1.6 Integraldarstellung der Rotation

Def. Zirkulation: $I_c = \oint\limits_C\vec{A}(\vec{r}),\quad I_c = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\vec{A}(\vec{r}_i)\Delta\vec{r}_i$

„Maß für *Wirbelstärke*“

Gesucht: Zusammenhang mit $\vec{\nabla}\vec{A}$ Betrachtet: Folge von geschlossenen ebenen Kurven C_n

a) Ebene x-y: $I_{C_n} = \int_{C_u}\vec{A}(\vec{r})d\vec{r} = \int\limits_{x_0-\frac{\Delta x_n}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x_n}{2}}dx\,\underbrace{(A_x(x,y_0-\frac{\Delta y_n}{2}) - A_x(x,y_0+\frac{\Delta y_n}{2}))}_{-\frac{\partial A_x}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y_n + O((\Delta y_n)^3)}$

$$+\int\limits_{y_0-\frac{\Delta y_n}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y_n}{2}}dy\,\underbrace{(A_y(x_0-\frac{\Delta x_n}{2},y) - A_y(x_0+\frac{\Delta x_n}{2},y))}_{-\frac{\partial A_y}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x_n + O((\Delta x_n)^3)}$$

$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\underbrace{\Delta x_n\Delta y_n}_{F_{n,z}}\underbrace{(-\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x})}_{(\vec{\nabla}\times\vec{A})_z}$$

leicht verallgemeinerbar auf x-z-Fläche $(F_{n,y}(\vec{\nabla}\times\vec{A})_y)$ und y-z-Fläche $(F_{n,x}(\vec{\nabla}\times\vec{A})_x)$

$$\Rightarrow \vec{n}\nabla\times\vec{A} = \lim_{F_C\to 0}\frac{1}{F_C}\oint\limits_C\vec{A}(\vec{r})d\vec{r}$$

(*Integraldarstellung der Rotation*)
Rotation: *Flächendichte der Zirkulation*

1.7 Gauß-Satz

$\oint\limits_{S(\Delta V)} \vec{E}d\vec{f} = \Delta V \vec{\nabla} E$, Betrachtet: 2 benachbarte Volumina ΔV_i, ΔV_{i+1}

$\oint \vec{E}d\vec{f} \stackrel{!!}{=} \oint\limits_{S(\Delta V_i)} \vec{E}d\vec{f} + \oint\limits_{S(\Delta V_{i+1})} \vec{E}d\vec{f} = \Delta V_i \vec{\nabla}\vec{E}|_{\vec{r}_i} + \Delta V_{i+1}\vec{\nabla}\vec{E}|_{\vec{r}_{i+1}}$

Allgemeine makroskopische Volumen aufteilen in n Volumina $\Rightarrow \oint\limits_{S(V)} \vec{E}d\vec{f} = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i \vec{\nabla}\vec{E}|_{\vec{r}_i} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}$

$\oint\limits_{S(V)} \vec{E}d\vec{f} = \int\limits_V d^3r \vec{\nabla}\vec{E}$

Triviale Anwendung des *Gauß-Satz*es (*Greenschen Identität*en)

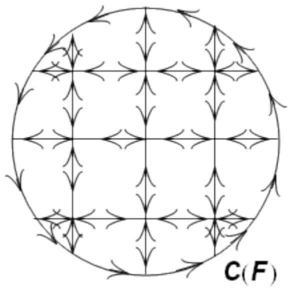
1) $\vec{E} = \varphi(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r}), RS : \vec{\nabla}\vec{E} = \vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\psi + \varphi \underbrace{\vec{\nabla}^2}_{\Delta} \psi,$

LS: $\oint\limits_{S(V)} \varphi(\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{n})d\vec{f}(\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{n} = \frac{\partial\psi}{\partial n}$: Normalableitung von ψ auf S

$\Rightarrow \int\limits_V [\vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\psi + \varphi\Delta\psi]dV = \oint\limits_{S(V)} \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}df$

2) In $\vec{E}$ φ, ψ vertausche; Beide Ergebnisse subtrahieren

(1)$\Rightarrow \int\limits_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV = \oint\limits_{S(V)} (\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n})df$



1.8 Stokes-Satz

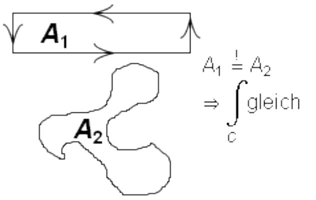
Zirkulation $\Leftrightarrow$ Flächenintegrale

$\int\limits_{C_i} \vec{A}d\vec{r} = \Delta F_i(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}_i))\vec{n}$ (ganz kleine Flächen)

$\int\limits_C = \sum\limits_{i=1}^{N} \oint\limits_{C_i} = \sum\limits_{i=1}^{N} \Delta F_i\vec{n}(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}_i)) = \int\limits_F (\vec{\nabla} \times \vec{A})d\vec{f}$

Also: $\oint\limits_{C(F)} \vec{A}d\vec{r} = \int\limits_F \vec{\nabla} \times \vec{A}d\vec{f}$ (Stokes-Satz)

Zirkulation$\leftrightarrow$*Rotation*



Folgerungen:

$\vec{\nabla}\vec{A} = 0 \Rightarrow \oint\limits_{C(F)} \vec{A}d\vec{r} = 0 \forall$ Kurven $C = \int\limits_{P_1}^{P_2} \vec{A}d\vec{r}$ unabh. vom Weg

$\Rightarrow$ Potentialbestimmung (siehe Mech. 1)

Beispiel zu Folgerung zu 1.8

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}, \quad \vec{B} = const$

$\vec{\nabla}\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = -\frac{1}{2}(\vec{B}\vec{\nabla})\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{B}(\vec{\nabla}\vec{r})$

$= -\frac{1}{2}(B_x\frac{\partial}{\partial x} + B_y\frac{\partial}{\partial y} + B_z\frac{\partial}{\partial z})(x, y, z) + \frac{1}{2}(B_x, B_y, B_z) \cdot 3$

$= -\frac{1}{2}B_x(1, 0, 0) - \frac{1}{2}B_y(0, 1, 0) - \frac{1}{2}B_z(0, 0, 1) + \frac{3}{2}(B_x, B_y, B_z) = (B_x, B_y, B_z) = \vec{B}$

$\Rightarrow \int\limits_F \vec{\nabla} \times \vec{A}d\vec{f} = \int\limits_F \vec{B}d\vec{f} = \vec{B}\vec{F} = \oint\limits_{C(F)} \vec{A}d\vec{r}$ (ebene Fläche)

Dies hängt nur ab von Größe d. Fläche und ist unabh. von der Form d. Fläche.

1.9 Der Zerlegungssatz

Jedes $\vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{A}(x,y,z) = (A_x, A_y, A_z)$ lässt sich schreiben als $\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\vec{A}_l(\vec{r})}_{\vec{\nabla}\times\vec{A}=0} + \underbrace{\vec{A}_l(\vec{r})}_{\vec{\nabla}\vec{A}_t=0}$

Mit $\vec{A}_l(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\alpha(\vec{r})$ (α: *Potential*)
$\alpha(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{A}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$
d.h. wirbelfreier Anteil bestimmt durch $\vec{\nabla}\vec{A}$ (*Elektrostatik*)
$A_t(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{\beta}(\vec{r})$($\vec{\beta}$: *Vektorpotential*)
$\vec{\beta}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'}\times\vec{A}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$
d.h. quellfreier Anteil beschrieben durch $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ (*Magnetostatik*)
$\int\limits_V \vec{\nabla}\vec{A}dV = \oint\limits_{S(V)} d\vec{f}\vec{A}, \quad f\frac{d}{dx}g = \frac{d}{dx}(fg) - g\frac{d}{dx}f$

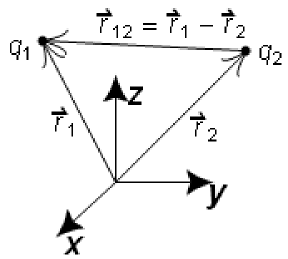
1) $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}a(\vec{r})$

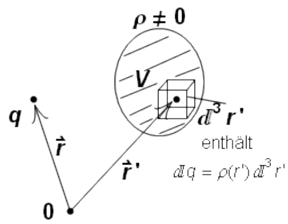
2) $\vec{\nabla}\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{\beta}(\vec{r})$

3) i.A.: $\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\alpha(\vec{r}) + \vec{\nabla}\times\vec{\beta}(\vec{r})$

$\vec{\nabla}| \Rightarrow \Delta\alpha(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\vec{A} \Leftarrow$ *Quellen*
$\vec{\nabla}\times \Rightarrow \Delta\vec{\beta}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\times\vec{A} \Leftarrow$ *Wirbel*
$(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\beta})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{\beta}) - \Delta\vec{\beta}$

2 Elektrostatik: Grundlagen





2.1 Coulomb-Gesetz + el. Feld.

Punktladung q_1, q_2
exp.: $\vec{K}_{12} = k\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}q_1q_2 = -\vec{K}_{21}$ (Kraft von Ladung 2 auf Ladung 1)
Viele Ladungen $q_1, ..., q_n$: Die von $q_2, ..., q_n$ auf q_1 ausgeübten Kräfte addieren sich vektoriell: *Superpositionsprinzip*
$\vec{K}_1 = kq_1\sum_{j=2}^{N} q_j\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_j}{|\vec{r}_1-\vec{r}_j|^3}$
Festlegung der Konstanten K im Volumen:

a) K=1 (cm,gs)$\rightarrow$ [q]=cm$(dym)^{1/2}$

b) MKSA, (M:Meter, K:Kilogramm, S:Sekunde, A:Ampere)
$N = \frac{1}{M^2}[q]^2$, ([q]=1 Coulomb=1AS, N:Newton)

Definition:

Das el. Feld $\vec{E}(\vec{r})$ wird durch eine vorgegebene *Ladungskonfiguration* erzeugt und ist druch die Kraft auf eine (beliebig kleine) Testladung q definiert.

$\vec{E} = \lim\limits_{q\rightarrow 0}\frac{\vec{K}_q}{q}$

N Punktladungen: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N} q_j\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$, MKSA-System

Oft: Ladung kontinuierlich in geg. Volumen V' verteilgt und Dichte $\rho(\vec{r})$

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V'} d^3r'\rho(\vec{r}')\underbrace{\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}_{-\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}), \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V'} d^3r'\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Zerlegungssatz: $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_l(\vec{r}) + \vec{A}_t(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$

$$\vec{A}_l(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\alpha(\vec{r}),\ \ \alpha = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V d^3r'\frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{A}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi}\int d^3r'\frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \overset{!!}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V d^3r'\frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \varphi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

Maxwell-Gl der Elektrostatik in differentieller Form.

$\Delta\varphi = -\vec{\nabla}\vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (Poisson-Gl.)

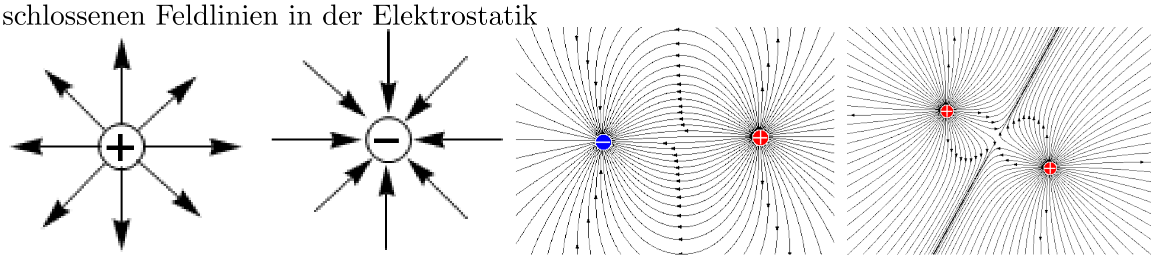
Entsprechende Integralform: $\int\limits_V d^3r\vec{\nabla}\vec{E} = \oint\limits_{S(V)} \vec{E}(\vec{r})d\vec{f} = \frac{q(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ für jedes (!!!) Volumen

Stokes: $\oint\limits_C \vec{E}d\vec{r} = 0$ (*Maxwell in Integralform*)

2.2 Feldlinien + Äquipotentialflächen

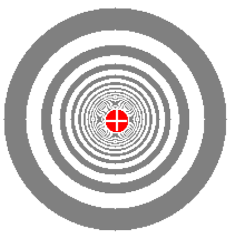
a) Feldlinien: Bahnen auf denen sich ein positiv geladener Körper aufgrund der Coulomb-Kraft Fortbewegen würde.

Aus der Definition folt: Feldlinien schneiden sich nicht, d.h. es gibt keine geschlossenen Feldlinien in der Elektrostatik



b) Äquipotentialflächen: "Höhenlinien", $\varphi(\vec{r}) = konst$, $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\vec{\varphi}$

Nach Mech.1: Feldlinien $\perp$ Äquipotentialflächen



2.3 Beispiele

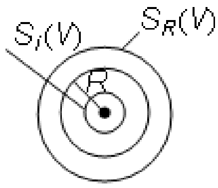
Beispiel zu zu 2.2

1) N Punktladungen: $\rho(\vec{r}) = \sum\limits_{j=1}^{N} q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}$

2) Homogen geladene Kugel: $\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & , |\vec{r}'| < R \\ 0 & , |\vec{r}'| > R \end{cases}$

1. Möglichkeit: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_K d^3r' \frac{\rho}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ (siehe Übung)

2. Möglichkeit: $\oint\limits_{S(V)} \vec{E} d\vec{f} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_V \rho dV$

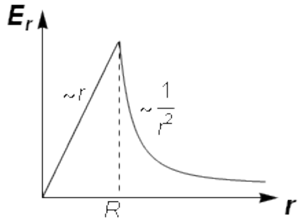


Kugelsymmetrie: nur $|\vec{r}|$-Abh.: $\vec{E}(\vec{r}) \Rightarrow E(r)\vec{e}_r$

LS: $\oint\limits_{S(V)} \vec{E} d\vec{f} = \oint\limits_{S(V)} E_r df \stackrel{!}{=} E_r 4\pi r^2$

RS: $\frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_{V_r} \rho dV = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3 & , r < R \\ 0 & , r > R \end{cases}$

$\Rightarrow E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \begin{cases} \rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3 & , r < R \\ 0 & , r > R \end{cases}$

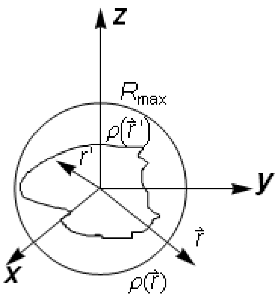


mit $\frac{\rho_0 4\pi}{3} R^3 = Q$, $\frac{\frac{4\pi}{3} r^3}{\frac{4\pi}{3} R^3} = Q(\frac{r}{R})^3$

$\varphi(r) = ?$, $E_r(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr}$

$\Rightarrow \varphi(r) = -\int\limits_{\infty}^{r} E_r(\vec{r}') dr'$

2.4 Multipolentwicklung



R_{max}:maximale Ausdehnung der Ladungsverteilung.

$(*)\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, $r > R_max$ (>>)

In Fernzone gesucht: $\varphi(\vec{r}), \vec{E}(\vec{r})$

$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \stackrel{!}{=} \frac{1}{r} \frac{1}{|\vec{r}/r - \vec{r}'/r|} \stackrel{!}{=} \frac{1}{r}(1 + \frac{\vec{r}'\vec{r}}{rr} + \frac{1}{2}(3(\frac{\vec{r}\vec{r}'}{rr}) - \frac{r'^2}{r}) + ...)$

$\sum\limits_{i,j=1}^{3} x_j x_i r'^2 \delta_{ij} = \sum\limits_{i,j=1}^{3} x_i^2 r'^2 = r^2 r'^2$

$... \Rightarrow [\frac{1}{r^4} \sum\limits_{i,j=1}^{3} (3(x_i' x_i)(x_j' x_j) - x_i'^2 x_j^2)]$

$= \frac{1}{r^4} \sum\limits_{i,j}^{3} x_i x_j (3x_j' x_i' - r'^2 \delta_{ij}) \Rightarrow \varphi(\vec{r})$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{r} \int d^3r(r'\rho(\vec{r}')) \\ +\frac{1}{r^2}(\int d^3r' \rho(\vec{r}')\vec{r}')\frac{\vec{r}}{r} \\ +\frac{1}{r^3}\frac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{3} \frac{x_i x_j}{r^2}(\int d^3r' \rho(\vec{r}')(3x_i' x_j' - \vec{r}'^2 \delta_{ij})) \end{cases}$$

Monopol/Gesamtladung (Feld einer Pktladung)

(...) : Dipolmoment $\vec{P}$ (Feld eines Dipols)

$\int$: Quadropolmoment Q_{ij}, Rest: Feld eines Quadropols

Beispiel zu Multipolentwicklung

Dipol:

$\rho(\vec{r}') = q\delta(\vec{r}' - \vec{a}) - q\delta(\vec{r}'),$

$\vec{p} = q \int d^3r' \vec{r}' (\delta(\vec{r}' - \vec{a}) - \delta(\vec{r}')) = q\vec{a}$

math,. Dipol: $\left.\begin{array}{c} a \to 0 \\ a \to \infty \end{array}\right\} \vec{P}$ konst $\Rightarrow$ höhere Terme in der Entw. $= 0$

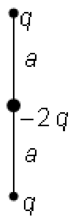
Im Allgemeinen:

a) $\rho(\vec{r}') = \rho(-\vec{r}') \Rightarrow \vec{P} = 0$

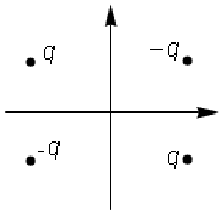
b) $\rho(\vec{r}') = -\rho(\vec{r}') \Rightarrow q = 0$

c) $\rho(\vec{r}') = \rho(|\vec{r}'|) \Rightarrow Qij = 0$

Beispiel1



Beispiel2



2.5 Elektrostatische Feldenergie

Mechanik Die Energie einer auf einen endl. Raumbereich beschränkten Ladungskonfiguration entspricht der Arbeit, die benötigt wird, um die Ladung aus ∞ zu dieser Konfiguration zusammen zu bringen.

Eine Punktladung$A \to B$: $\quad W_{AB} = -\int\limits_A^B \vec{K} d\vec{l} = -q \int\limits_A^B \vec{E} d\vec{l} = q \underbrace{(\varphi(B) - \varphi(A))}_{=:U}$

Ladung q_1 (q_2, q_3 noch nicht da): W_1=0,

2. Ladung (sieht nur $\varphi(A)$): $W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$,

3. Ladung (sieht q_1, q_2): $W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_3 \sum\limits_{j=1}^{2} \frac{q_j}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_j|}$,

$\Rightarrow W = W_1 + W_2 + W_3 + ... + W_N = \sum\limits_{i=1}^{N} W_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum\limits_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$

Jetzt kontinuierliche Ladungsverteilung:

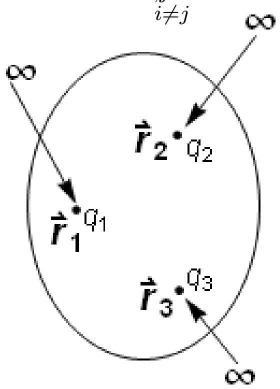
$\rho(\vec{r})$ sei stetig: $\sum q_i ... \to \int d^3r \rho(\vec{r})...$

Also: $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r})$

$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E} = s(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\vec{\nabla}\varphi\varepsilon_0$

$\Rightarrow W = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r (\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi))\varphi \overset{!}{=} \vec{\nabla})(\vec{\nabla}\varphi)\varphi) - \vec{\nabla}\varphi\vec{\nabla}\varphi$

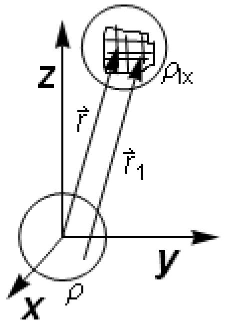
$= \underbrace{-\frac{\varepsilon_0}{2} \oint\limits_{S(V)} d\vec{f}(\varphi\vec{\nabla}\varphi)}_{\overset{V\to 0}{\longrightarrow} 0} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r |\vec{E}(\vec{r})|^2$



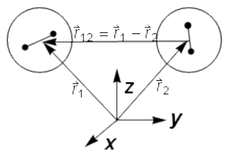
$\Rightarrow W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r|\vec{E}(\vec{r})|^2$
$\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r},\ \vec{\nabla}\varphi \sim \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \varphi\vec{\nabla}\varphi \sim \frac{1}{r^3},\ \int \sim 4\pi r^2$
$\oint\limits_{S(V)} \sim \lim\limits_{r\to\infty} 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{r^3} \sim \lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r} = 0$
Energiedichte: $\omega := \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}(\vec{r})|^2,\quad W = \int d^3r\omega(\vec{r})$

2.6 Wechselwirkung einer Ladungsverteilung im äußeren Feld

Gesucht: *Wechselwirkungsenergie*
Gegeben: *Externe Ladungsvereilung* ρ_{ext} erzeugt äußeres E-Feld, das mit $\rho(\vec{r})$ wechselwirkt.



$\rho\rho + \underline{\rho\rho_{ext} + \rho_{ext}\rho} + \rho_{ext}\rho_{ext}$
$\Rightarrow W_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho_{ext}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ (*Wechselwirkungsenergie*)
$\Rightarrow W_1 = \int d^3r\rho(\vec{r})\varphi_{ext}(\vec{r})$
$\varphi_{ext}(\vec{r}) = \varphi_{ext}(0) + (\vec{r}\vec{\nabla})\varphi_{ext}|_{\vec{r}=0} + ... + \varphi_{ext}(0) - \vec{r}\vec{E}_{ext}(0)$
$\Rightarrow W_1 = q\varphi_{ext}(0) - \vec{p}\vec{E}_{ext}(0)$
Spezialfall: *Wechselwirkungsenergie* zu 2 Dipolen:
Allgemein: *Dipolfeld* $\varphi_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^3}\vec{r}\vec{p}$
Üb: $\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{3(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}]$
$W_1 = W_{12} = W_{21} = -\vec{p}_2\vec{E}_D(\vec{r}_{12}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{r_{12}^3} - \frac{3(\vec{r}_{12}\vec{p}_1)(\vec{r}_{21}\vec{p}_2)}{r_{12}^5}]$

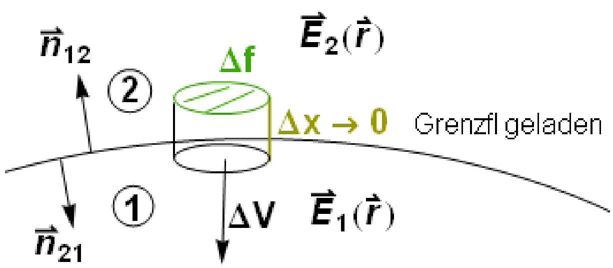


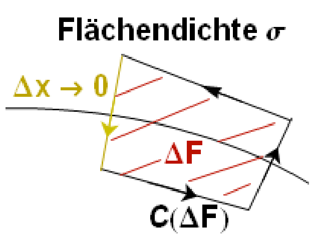
2.7 Elektrische Feldstärke an Grenzflächen

Gesucht: Zusammenhang zu $\vec{E}_1(\vec{r})$ und $\vec{E}_2(\vec{r})$ bei *Grenzfläche*

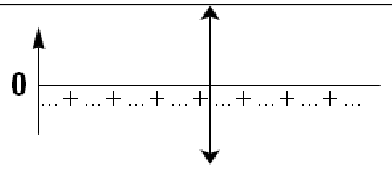
a) Gauß-Satz:
$\int\limits_{\Delta V} d^3r\vec{\nabla}r = \oint\limits_{S(\Delta V)} d\vec{f}\vec{E}(\vec{r}) \overset{\Delta x\to 0}{\longrightarrow} \Delta F\vec{n}_{12}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{\Delta V} d^3r\rho(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\Delta F$
$\Rightarrow \vec{n}_{12}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{1}{\varepsilon_0}r$
$\vec{E}$ normal stetig, falls $\sigma = 0$

b) Stokes-Satz:
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \Rightarrow 0\int\limits_{\Delta F} d\vec{f}\vec{\nabla}\times\vec{E} = \oint\limits_{S(\Delta V)} dr\vec{E} = l\vec{t}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \overset{!}{=} 0$
$\vec{t}$: Tangentialvektor
d.h. $\vec{E}$ *tangential stetig*.





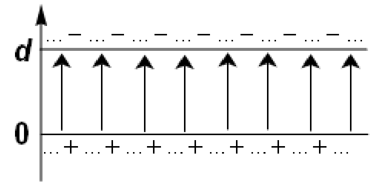
Beispiel zu Grenzflächen



a) ∞ *ausgedehnte geladene Ebene*:

$\sigma = \frac{Q}{F} > 0, \quad \vec{E} = (0, 0, E_z), \quad E_{1z} = -E_{2z}$

$\Rightarrow 2E_{2z} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow e_{2z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|\vec{z}|}\vec{e}_z$



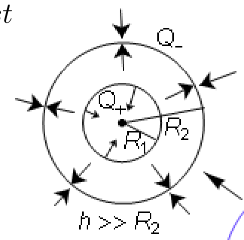
b) *Plattenkondensator*:

$\sigma(z=0) = \pm\frac{Q}{F} > 0, \quad \sigma(z=d) = -\frac{Q}{F} < 0$

$\vec{E}_-(\vec{r}) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z - d/|z-d|\vec{e}_z, \quad \vec{E}_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{|z|}\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_+(\vec{r}) + \vec{E}_-(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z & , 0 < z < d \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & , z \leq 0 \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z & , 0 < z < d \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d & , z \geq d \end{cases}$$



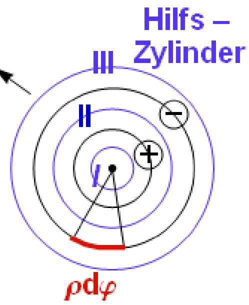
φ stetig bei $z = 0, d$

Spannung: $\varphi(0) - \varphi(d) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q}{\varepsilon_0 F} d = \frac{Q}{C}$

C: *Kapazität*

Energiedichte: $\omega(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}(\vec{r})|^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

$\Rightarrow W = \int d^3 r \omega = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} F d$



b) Zylinderkoordinaten

$h >> R_2$ (Vermeidung von *Randeffekten*) *Achsialsymmetrie*

$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(s)\vec{e}_s, \quad x = \rho\cos(\varphi), \; y = s, \; z = z$

$$\int \vec{E} d\vec{f} \overset{!}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{z_\rho} d^3 r' \rho(\vec{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{cases} 0 & , \rho < R_1 \\ Q & , R_1 < \rho < R_2 = E_\rho \rho 2\pi h \\ 0 & , \rho > R_2 \end{cases}$$

$d\vec{f} = \rho d\varphi dz \vec{e}_z$

$E(\rho) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{1}{\rho}$ für $\rho_1 < \rho < \rho_2$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \begin{cases} const_1 \\ ln(\rho) - const_2 \\ const_3 = 0 \end{cases}$$

Spannung $U = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} ln(\frac{R_2}{R_1}) = \frac{1}{C}$

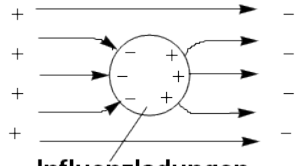
$$\text{Energiedichte: } \omega(\vec{r}) = \frac{R^2}{8\pi^2\varepsilon_0 h^2} \begin{cases} \frac{1}{\rho^2} & , R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

$$\Rightarrow W = \int_z \rho d\rho d\varphi dz \omega(s) = 2\pi h \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 h^2} \underbrace{\int_{R_1}^{R_2} d\rho \frac{1}{\rho}}_{ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

$\Rightarrow W = \frac{1}{2} C U^2$

3 Randwertprobleme

3.1 Problemstellung



Ohne spezielle Randbedingungen: Ladung $\rho(\vec{r})$

$\Delta\varphi = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

In vielen Fällen: Ladungen + Leiter

Beispiel zu Randwertproblemen

Trennung + und - Ladungen, die so ist, dass im Inneren der Kugel $\vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_i = 0$

Auf Kugel: $\varphi = const$ (-Q, falls Kugel geordnet)

Begründung: Solange das Innere eines Leiters noch nicht feldfrei ist, wirkt auf jede Ladung q im Leiter eine Kraft $q\vec{E}$.

Da die Ladungen im Leiter dieser Kraft folgen können, werden sie ihre Position so lange verändern, bis keine Kraft mehr auf sie wirkt., d.h. bis das Innere des leiters feldfrei ist. Gleichnamige Ladungen entfernen sich möglichst weit voneinander $\Rightarrow$ Ansammung am Rand des Leiters.

Äußeres Feld $\vec{E}_a$, Gegenfeld $\vec{E}_i$: durch influenzierte Ladungen $\vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_i$, sodass $\vec{E} = 0$ im inneren $\Rightarrow \varphi = const$

$\Rightarrow E^{(n)}_{innen} = E^{(t)}_{innen} = 0 \Rightarrow E^{(t)}_{außen} = 0$

$E^{(n)}_{außen} = E^{(n)}_{innen} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

σ: *influenzierte Flächenladungsdichte*

Problemstellung:

Geg: $\varphi(\vec{r}')$ in V und φ oder $\frac{d\varphi}{dn} = -\vec{E}_n$ auf gewissen Randflächen oder Grenzflächen

Gesucht: $\varphi(\vec{r}')$ in allen Punkten des uns interessierenden Volumens

2 mögl. *Randbedingungen*:

1) φ auf s vorgegeben: *Dirichlet-Randbedingung*

1) $\frac{d\varphi}{n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ auf s vorgegeben *von-Neumann-Randbedingung*

$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$, $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r})$ auf s (oder σ auf s)

Behauptung: Lösung pp ist eindeutig.

Beweis

Annahme: $\varphi_1(\vec{r}), \varphi_2(\vec{r})$ seien beides Lösungen der Poisson-Gleichung

$\Delta\varphi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\Delta\varphi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $mit \varphi_1 \neq \varphi_2 auf S(V)$

z.Z.:$\varphi = \varphi_2$

1. Greenscher Satz $(\varphi = t) : \int d^3r(t\Delta t + (\vec{\nabla}\psi)^2) = \oint\limits_{S(V)} \frac{d\psi}{dn} d\vec{f} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow \int\limits_V (\vec{\nabla}\psi)^2 dr = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\psi = 0$

$\Rightarrow \psi = const = 0$ auf Oberfläche S(V) $\Rightarrow \psi = 0$

□

3.2 Greensfunktion

Lösung mit Grenzfunktion
Dirichlet-Randbedingung: pp=const auf S(V),
Def: $G(\vec{r},\vec{r}'), \Delta_r G(\vec{r},\vec{r}') \overset{!}{=} -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}')$
Poisson-Gl. für Punktladun.
Behauptung: $G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + f(\vec{r},\vec{r}')$ und $\Delta f = 0$

Beweis

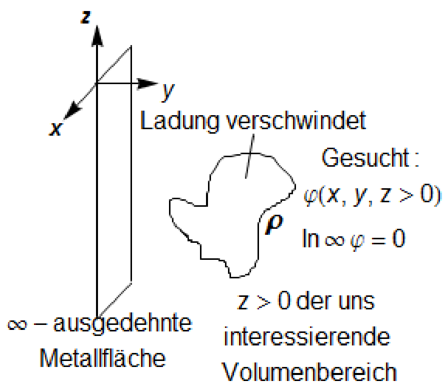
$$\Delta_r G(\vec{r},\vec{r}') = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Delta_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\frac{1}{en}\delta(\vec{r}-\vec{r}')} + \underbrace{\Delta_r f(\vec{r},\vec{r}')}_{=0}$$

(OK, siehe Zerlegungssatz) □

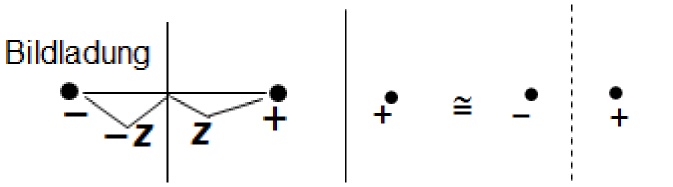
Betr. $\Delta_r G8\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}')$
$\Rightarrow G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + f(\vec{r},\vec{r}'),\ \Delta_r f = 0$
$r \leftrightarrow \vec{r}' : \Delta_{r'} G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}'-\vec{r})$
Gesucht: $\varphi(\vec{r})$ bei vorgeg. Randbed. auf S(V) Betr. 2. Greensche Identität: $\varphi,\ \psi = G(\vec{r},\vec{r}')$

$$\int_V d^3r'[\varphi(\vec{r}')\underbrace{\Delta_{r'}\underbrace{G(\vec{r}',\vec{r})}_{\psi(\vec{r}')}}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}')} - \underbrace{G(\vec{r}',\vec{r})}_{\psi(\vec{r}')}\underbrace{\Delta_r\varphi(\vec{r}')}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r}')}] = \int_{S(V)} df'[\varphi(\vec{r}')\underbrace{\frac{\partial G}{\partial n'}}_{\psi} - \underbrace{G(\vec{r}',\vec{r})}_{\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial n'}]$$

$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G(\vec{r}',\vec{r})\rho(\vec{r}') - \varepsilon_0\int df'[\varphi(\vec{r}')\frac{\partial G}{\partial n'} - G(\vec{r}',\vec{r})\frac{\partial\varphi}{\partial n'}]$
RB: $\varphi(\vec{r})$ auf $S(V)$
Jetzt: Wähle $f(\vec{r}',\vec{r})$ so, dass $G(\vec{r}',\vec{r})$ für $\vec{r}' \in S(V)$ verschwindet
$G(\vec{r}',\vec{r}) = 0,\ r' \in S(V)$
d.h. $f(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|},\ \vec{r} \in S(V)$
$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \int_V d^3r'\rho(\vec{r}')G(\vec{r}',\vec{r}) - \varepsilon_0\int_{S(V)} df'\ \underbrace{\varphi(\vec{r}')}_{bekannt}\ \frac{\partial G}{\partial n'}$
Grenzfläche geerdet: $\varphi = 0$ auf Grenzfläche
$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \int d^3r'\rho(\vec{r}')G(\vec{r}',\vec{r})$
Anwendungsbeispiel:
Gesucht: G



Folge allg. Beschreibung, $z' = 0$: Grenzfläche
$f(\vec{r}',\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2)}}$
Gesucht: $f(\vec{r}',\vec{r})$ das $\Delta_{r'} f(\vec{r}',\vec{r}) = 0$ erfüllt.
Bekannt: $\underbrace{1}_{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'\underbrace{-}_{+}z)^2}}\ \underbrace{erfuellt\ Poissongl.\Delta f = 0}_{und\ erfuellt\ RB}$
Aus Eindeutigkeit $\Rightarrow$ Lösung
Zusammenfassung: $\Rightarrow G(\vec{r}',\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'+z)^2}}\}$
Pot. 2er Punktladungen, eine am Ort x,y,z



Allg. Lösung: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V d^3r'\rho(\vec{r}')\{\frac{1}{\sqrt{\dots}} - \frac{1}{\sqrt{\dots(z+z)^2}}\}$

Methode der Bildladungen:
Man bringt außerhalb von V an von der Geometrie des Problems abhängigen Stellen fiktive Ladungen („*Bildladungen*") an, durch welche die erforderlichen *Randbedingungen* auf $S(V)$ erfüllt werden.

Beispiel zu Punktladungen über geerdete ∞-Metallplatte

$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{1}{\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}} - \frac{q}{|\vec{r}+\vec{r}_0|}\}$

$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{(x,y,z-z_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} - \frac{(x,y,z+z_0)}{|\vec{r}+\vec{r}_0|^3}]$

$z = 0: \ \vec{E}(x,y,z=0) = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\vec{e}_r$ (wie erwartet $\perp$ auf Metalfl.)

Influenzierte Ladungsdichte: $\sigma \equiv \frac{\partial q}{\partial n} = \varepsilon_0 E(x,y,z=0)$

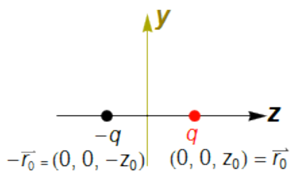
Gesamte *influenzierte Flächenladung*: $\overline{q} = -q$

Beweis

$\overline{q} = \int\limits_{z=0}\sigma df = -\frac{qz_0}{2\pi}\int\limits_{z=0} df\frac{1}{(x^2+y^2+z_0^2)^{3/2}}$

$x = r\cos(\varphi),\ y = r\sin(\varphi),\ df = rdrd\varphi$

$$\Rightarrow \overline{q} = -\frac{q}{2\pi}2\pi z_0\int\limits_0^\infty dr\, r\underbrace{\frac{1}{(r^2+z_0^2)^{3/2}}}_{-\frac{d}{dr}\frac{1}{(r^2+z_0^2)^{1/2}}} = -q$$



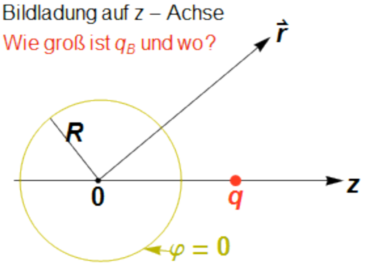
Bildkraft: Kraft die auf Ladung q ausgeübt wird.

Schwieriger Teil gelöst
Rest einfach!

□

Beispiel zu Punktladung über geerdeter Metallkugel

1. Symmetrie betrachten!
Bildladung auf z – Achse
Wie groß ist q_B und wo?



3.3 Entwicklung nach orthog. Funktionen

$U_n(x)$, $n = 1, 2, 3$, rell oder komplex

quadratintegrierbar auf relevanten Intervall $a \leq x \leq b = [a, b]$

Orthonormal: $\int\limits_a^b dx U_n^*(x) U_m(x) = \delta nm$

f(x) quadratintegrierbar

Entwicklung: $f_N(x)$ quadratintegrierbar Entwicklung: $f_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n U_n(x)$ optional: c_n, so dass $\int\limits_a^b dx |f(x) - f_n(x)|^2 = Min$ Einsetzen: $\int\limits_a^b dx |f(x) - f_N(x)|^2 = \left[\int\limits_a^b dx f^*(x) f(x) - \sum\limits_{n=1}^{N} c_n^* \int\limits_a^b dx U_n^*(x) f(x) - \sum\limits_{n=1}^{N} c_n \int\limits_a^b dx U_n(x) f^*(x) + \sum\limits_{n=1}^{N} c_n^* c_N\right]$

$$\left.\begin{aligned} Min: \ \frac{\partial}{\partial c_l}[\,] &= -\int\limits_a^b dx U_l(x) f^*(x) + c_l * \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial}{\partial c_l^*}[\,] &= -\int\limits_a^b dx U_l^*(x) f(x) + c_l \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} * : \ c_l = \int\limits_a^b dx U_l^*(x) f(x) \text{ beste Wahl!}$$

Das System $\{U_n(x)\}$ heißt *vollständig*, falls $f_N(x)$ im Mittel gegen f(x) konvergiert.

$(\lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_a^b |f(x) - f_N(x)|^2 = 0)$

$\Rightarrow ** : \ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x)$

Bedingung dafür [(*) in (**)]: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \{\int\limits_a^b dy f(y) U_n^*(y)\} U_n(x)$

LS=RS, falls: $f(x) = \int\limits_a^b dy f(y) \delta(x - y)$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) U_n^*(y) = \delta(x - y)}$$

Beispiel zu Fourier-Reihe

Intervall $[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}]$

$U_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{2\pi nx}{a}), \sqrt{\frac{2}{a}} \cos(\frac{2\pi nx}{2}), n = 0, 1, 2, ...$

$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\frac{2\pi nx}{a} + B_n \frac{2\pi nx}{a}]$

$A_l = \frac{2}{a} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} f(x) \cos(\frac{2\pi lx}{a}) dx,$

$B_l = \frac{2}{a} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} f(x) \sin(\frac{2\pi lx}{a}) dx$

Beispiel zu Fourier-Integral

komplexe $U_n : U_n = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i\frac{2\pi n x}{a}}$, n=0,1,2,...

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\frac{2\pi n x}{a}} \\ A_n(komplex) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-a/2}^{a/2} e^{i\frac{2\pi n x}{a}} f(x) dx \end{aligned}}$$

einfachere, schönere schreibweise der Fourier-Reiche.

1) $a \to \infty :\to \int_{-a}^{a} dx \to \int_{-\infty}^{\infty} dx$

2) $\frac{2\pi n}{a} \to k : \sum_n \to \int_{\infty}^{\infty} dn ... = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk ...$

3) $A_n \to \sqrt{\frac{2\pi}{a}} A(k) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{a} \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} A(k) e^{ikx} dx$

$\boxed{(***):\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{ikx}}$ mit $A(k)\sqrt{\frac{2\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx'$

$\Rightarrow \boxed{(***):\ A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx'}$

Fouriertransformatierte Entwicklung nach $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$

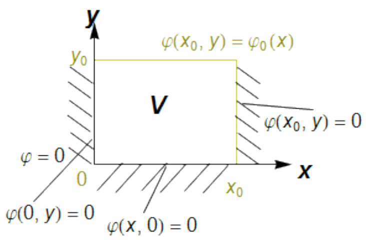
Beweis

Vollständigkeit: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{ik(xx')}$

$$\stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \{ \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')} }_{\delta(x-x')}\} \stackrel{!}{=} f(x)$$

□

3.4 Trennung der Variablen



[A] Laplace Gl. in karth. Koord

Gesucht: $\varphi(x, y)$ in V

$\Delta\varphi = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y})\varphi(x, y) = 0$

Seperationsansatz: $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$

$\Rightarrow g\frac{d^2}{dx^2} f + f\frac{d^2}{dy^2} g = 0 \ | \cdot \frac{1}{fg}$

$\frac{1}{f(x)} \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \frac{1}{g(y)} \frac{d^2}{dy^2} g(y) = 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \frac{d^2}{dx^2} f \stackrel{!}{=} -\frac{1}{g} \frac{d^2}{dx^2} g = -\alpha^2$ (wg. Symm. der RB)

Lösg. sehr leicht: $g(y) = a_1 e^{\alpha y} + a_2 e^{-\alpha y}$, $\quad f(x) = b_1 \sin(\alpha x) + b_2 \cos(\alpha x)$

Aus Randbedingung Kraft a_1, a_2, b_1, b_2 bestimmen:

$\varphi(0, y) = 0 \quad (f(0) = 0 \Rightarrow b_2 = 0)$

$\varphi(x, 0) = 0 \quad (g(0) = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1)$

$\varphi(x_0, y) = 0 \Rightarrow b_1 \sin(\alpha x_0) = 0 \Rightarrow \alpha \equiv \alpha_n = \frac{n\pi}{x_0}$

$\Rightarrow$ spezielle Lösg: $\varphi_n(x,y) = \sin(\alpha_n x)\sinh(\alpha_n y)$

$\Rightarrow$ allg. Lösung: $\varphi(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x,y)$

Also: $\varphi(x,y_0) = \varphi_0(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi}{x_0}x)\sinh(\frac{n\pi}{x_0}y) \quad | \cdot \sin(\frac{m\pi}{x_0}x), \frac{2}{x_0}\int\limits_0^x dx$

$\Rightarrow \frac{2}{x_0}\int\limits_0^{x_0} dx\varphi_0(x)\sin(\frac{m\pi}{x_0}x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\delta_{m,n}\sinh(\frac{n\pi}{x}y_0) \stackrel{!}{=} c_m\sinh(\frac{m\pi}{x_0}y_0) \Rightarrow c_m$

[B]Kugelkoordinaten (d=3)

$x = r\cos(\varphi)\sin(\vartheta)$

$y = r\sin(\varphi)\sin(\vartheta)$

$x = r\cos(\vartheta)$

Δ in Kugekoord (Mech. 1)

Jetzt kurzfristig (solange Kugelkoord) $\phi(r,\vartheta,\varphi)$ Potential

$\Delta\varphi = (\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi})\phi$

$\Delta_{\vartheta,\varphi} = \frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\phi) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\phi$

$\Delta\phi = 0$

Seperationsansatz: $\phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{R(r)}{r}P(\vartheta)Q(\varphi)$

$0 = \frac{1}{r}\{PQ\frac{d^2}{d^2r}R + \frac{R}{r^2\sin(\vartheta)}[Q\frac{d}{d\vartheta}(\sin(\vartheta)\frac{dP}{d\vartheta}) + \frac{P}{\sin(\vartheta)}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}]\} \quad | \cdot \frac{r^3\sin^2(\vartheta)}{RPQ}$

$\Rightarrow (*): \; r^2\sin^2(\vartheta)[\frac{1}{R}\frac{d^2}{dr^2}R + \frac{1}{r^2\sin(\vartheta)}\frac{d}{d\vartheta}(\sin(\vartheta)\frac{dP}{dQ})] = -\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} \stackrel{!}{=} -m^2$

$\varphi \to \varphi + 2\pi \Rightarrow Q(\varphi) \stackrel{!}{=} Q(\varphi+2\pi)$ (period. Lösg!)

$\Rightarrow Q = e^{\pm im\varphi}, \quad e^{im\varphi+2\pi} = e^{im\varphi} \Rightarrow e^{im2\pi} = 1 \Rightarrow m = 0,1,2,\ldots$

$\ldots \cdot \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \Rightarrow \frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} = -\underbrace{(\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{1}{P}\frac{d}{d\vartheta}(\sin(\vartheta)\frac{dP}{d\vartheta}) - \frac{m^2}{\sin^2(\vartheta)})}_{\stackrel{!}{=}-l(l+1)\ reell}$

$\boxed{\frac{d^2R}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}R = 0}$

Beh. $\boxed{R = Ar^{l+1} + Br^{-l}}$

Beweis

Durch Einsetzen:

$(l+1)lAr^{l-1} - l(-l-1)Br^{-l-2}$

$-l(l+1)Ar^{l+1-2} - l(l+1)Br^{-l-2} = 0$

□

$x = \cos(\vartheta) \Rightarrow \frac{dx}{d\vartheta} = -\sin(\vartheta) \Rightarrow dx = -\sin(\vartheta)d\vartheta \Rightarrow \frac{1}{dx} = -\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{1}{d\vartheta}$

$x^2 = \cos^2(\vartheta) = 1 - \sin^2(\vartheta) \Rightarrow \sin^2(\vartheta) = 1 - x^2$

$\sin^2(\vartheta)\frac{dP}{dx} = -\sin^2(\vartheta)\frac{1}{\sin(\vartheta)}\frac{dP}{d\vartheta} = -\sin(vartheta)\frac{dP}{d\vartheta}$

$\Rightarrow \frac{1}{P}\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP}{dx} - \frac{m^2}{1-x^2} + l(l+1) = 0$

$\boxed{\Rightarrow \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP}{dx} + (-\frac{m^2}{1-x^2} + l(l+1))P(x) = 0}(*)$

verallgemeinerte *Legendre* Gl.

$P(x) \equiv P_l^m(x) \equiv P_l^m(\cos\vartheta)$ („zugeordnete Legende-Polynome“)

Wichtiger Spezielfall *Azimuthalsymmetrie* , Q unabh. von $\varphi Q(\varphi) = const \Rightarrow m \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP}{dx} + l(l+1)P = 0}$ (**)

Lösg: $\boxed{P_l(x) = \frac{1}{l!}\frac{1}{2^l}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l}$ (***)

$l = 0, 1, 2, ...$

Für andere l-Werte gibt es keine im ganzen Wertebereich gültige Lösg.

$l = 0 : P_0(x) = 1, \quad l = 1 : P_1(x) = x, \quad l = 2 : P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

Man kann zeigen $\int\limits_{-1}^{1} dx P_l(x) P_k(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{lk}$ (orthogonal!)

$\sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(x) P_l(x') = \delta(x-x')$ (Vollständigkeit)

Die allgemeine Lösung ist damit $\boxed{\phi(r,\vartheta) = \sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)[A_l r^2 + B_l r^{-(l+1)}]P_l(\cos(\vartheta))}$ (****)

Ausgangspunkt für Beispiele mit *Azimuthalsymmetrie*.

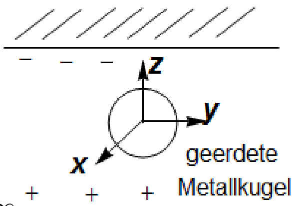
Beispiel zu Pot. einer Kugel mit azimuthalsymmetrischer Flächenladungsdichte

$\sigma(\vartheta) = \sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sigma_l P_l(\cos(\vartheta))$

$\sigma_l = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} d(\cos(\vartheta))\sigma(\vartheta)P_l(\cos(\vartheta))$

Gesucht: $\phi(r,\vartheta)$

A_l, B_l gesucht, Bedingungen für ϕ



1) ϕ_i *regulär* (d.bar) bei $r = 0 \Rightarrow B_l^{(i)} = 0 \Rightarrow \phi_i(r,\vartheta) = \sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)A_l^{(i)} r^l P_l(\cos(\vartheta)$

2) $\phi_a \to 0$ für $r \to \infty \Rightarrow \phi_a(r,\vartheta) = \sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)B_l^{(a)} r^{-l-1}P_l(\cos(\vartheta))$

3) ϕ stetig auf Kugeloberfläche: $\phi_i(R,\varphi) \stackrel{!}{=} \phi_a(R,\vartheta) \Rightarrow B_l^{(a)} = A_l^i R^{2l+1}$

4) E_n unstetig

$\Rightarrow \sigma(\vartheta) = -\varepsilon_0(\frac{\partial\phi_a}{\partial r} - \frac{\partial\phi_i}{\partial r})|_{r=R} \; = -\varepsilon_0\sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos(\vartheta))[-(l+1)B_l^{(a)}R^{-l-2} -$

$lA_l^{(i)}Rl-1]$

$= \varepsilon_0\sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)^2 A_l^{(i)}R^{l-1}P_l(\cos(\vartheta))$

$\stackrel{!}{=} \sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sigma_l P_l(\cos(\vartheta))$

$\Rightarrow \sigma_l = \varepsilon_0(2l+1)A_l^{(i)}R^{l-1} \Rightarrow A_l^{(1)} = \frac{\sigma_l}{\varepsilon_0(2l+r)R^{l-1}}$

$\Rightarrow \phi_i(r,\vartheta) = \frac{R}{\varepsilon_0}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\sigma_l(\frac{r}{R})^l P_l(\cos(\vartheta))$

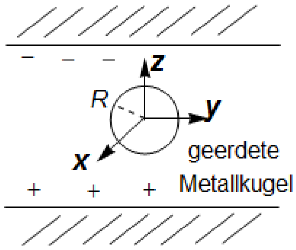
$\phi_a(r,\vartheta) = \frac{R}{\varepsilon_0}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\sigma_l(\frac{R}{r})^{l+1}P_l(\cos(\vartheta))$

Anwendung:

Geg. $\sigma(0) = a_0 + a_1\cos(\vartheta) \stackrel{!}{=} \sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sigma_l P_l(\cos(\vartheta))$

$\Rightarrow a_0 = \sigma_0, \; a_1 = 3\sigma_1, \qquad \sigma_2, \sigma_3, ... = 0$

Beispiel zu geerdete Metallkugel im hom. el Feld.



$\vec{E} = E_0\vec{e}_z$

gesucht: ϕ, σ

$\phi(r, \vartheta) = ...A_l, B_l$

$\phi(R, \vartheta) = 0 \Rightarrow A_l R^l = -B_l R^{-(l+1)} \Rightarrow B_l = -A_l R^{2l+1}$

1) ϕ_i: reg. bei $\vec{r} = 0 \Rightarrow B_l^{(i)} = 0 \Rightarrow A_l(i) = 0 \Rightarrow \phi_i = 0$

2) $\phi_a \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} -E_0 z = -E_0 r\cos(\vartheta) = -E_0 r P_1(\cos(\vartheta))$

$\Rightarrow \sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)(A_l r^l + B_l r^{-l-1})P_l(\cos(\vartheta)) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} -E_0 r P_1(\cos(\vartheta))$

vergl. $A_1 = -\frac{1}{3}E_0,\ \ A_2 = A_3 = ... = 0$

$B_1 = -A_1 R^3 = \frac{1}{3}E_0 R^3, B2 = B3 = ... = 0$

$(****) \Rightarrow \phi_a(r, \vartheta) = -E_0 R(\frac{r}{R} - \frac{R^2}{r^2})\cos(\vartheta)$

$\Rightarrow \sigma(\vartheta) = -\varepsilon_0 \frac{\partial\phi_a}{\partial r} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos(\vartheta)$

3.5 Kugelflächenfunktionen

Lösung von (*) gesucht mit *Potenzreihenansatz*.

Man erhält, dass Konvergenz der Potenzreihe erfordert: $l = 0, 1, 2...,\ m = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm l$

Lösung: $P(x) = P_l^m(x)$

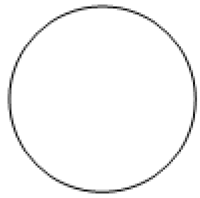
$m > 0 : P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}\underbrace{P_l(x)}_{bekannt}$

$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)$

Allgemeine Lösung: $P_l^m(\cos(\vartheta))e^{im\varphi}$

$\boxed{Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos(\vartheta))e^{im\varphi}}$ (*Kugelflächenfunktion*)

$\Rightarrow \boxed{\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum\limits_{l=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-l}^{+l}(a_{lm}r^l + b_{lm}r^{-l-1})Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}$



Allg. Lösg von $\Delta_{r,\vartheta,\varphi}\phi = 0$.

Y_{lm} orthonormal

$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-1}^{1}(d\cos(\vartheta))Y_{l'm}^*(\vartheta, \varphi)Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$

Allg. Lösung setzt keine Symmetrien voraus.

Problem: Bestimmung von a_{lm} und b_{lm}

Azimuthalsymmetrie: Unabh. von φ (siehe voriger Abschnitt)

$\phi = const$ für $r \to \infty$

$a_{lm} = 0$ für $l \geq 1$

$\phi = const$ für $\vec{r} = 0 \Rightarrow b_{lm} = 0$

Y_{lm} vollständig: $\sum\limits_{l=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi')Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta(\cos(\vartheta) - \cos(\vartheta'))\delta(\varphi, \varphi')$

Y_{lm}: zentrale Rolle in der QM bei Lösung der Schrödingergleichung, Potential $\frac{1}{r}$

l:Drehimpulsquantenzahl, m: Quantenzahl der z-Komp des Drehimpulses

4 Elektrostatik der Dielektrika

4.1 Übersicht

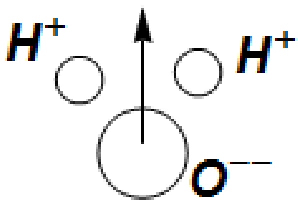
Dielektrika, Paraelekrika, Ferroelektrika

Dielektrika: Moleküle, positive und negative Ladungen (gebunden)
Elektr. Feld verschiebt + und - Ladungen relativ zueinander, d.h. durch Einfluss des Feldes werden lokale elektr. Dipole erzeugt und im Feld ausgerichtet. (Verschiebungspolarisation)

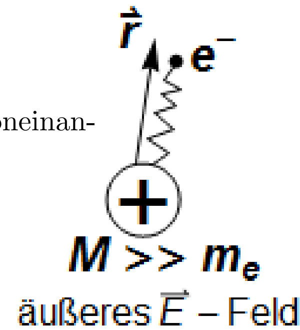
Paraelektrika: Materie enthält bereits Permamente Dipole, z.B. auf Grund der Molekülstruktur (H_2O)
Diese Dipole werden im Feld ausgerichtet (Orientierungspolarisation)

Ferroelektrika: permamente Dipole (Seignette Satz, Bariumdikanat)
richten sich auf Grund der Dipol-Dipol-Wechselwirkung bereits ohne Feld in geordneter Weise unterhalb einer kritischen Temperatur T_c spontan aus.
Weit oberhalb T_c: Paraelektrika

Einfache mikroskopische Behandlung:



a) Verschiebungspolarisation:
isoliertes Atom, $\underbrace{Kern}_{fest} + \underbrace{Elektronen}_{harmonisch\ an\ Kern\ gebunden}$
$m_e\ddot{x}_i = -m\omega_0^2 x_i + qE_i (i = 1, 2, 3)$
$x_i(t) = x_{i0}\cos(\omega_0 t - \beta_i) + \frac{q}{m_e\omega_0^2 E_i}$
Dipolmoment: $p_i = qx_i$
N Atome, unabh. voneinander
Jetzt: räuml. Mittelung über alle ~~Atome~~ Elektronen, die alle unabh. voneinander schwingen:
$< \vec{x}_i >= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(...)$
$\Rightarrow$ Zeitabh. Terme mitteln sich raus
$< \vec{p} >= \frac{q^2}{m_e\omega_0^2}\vec{E}($ für $1e^-)$
Z Elektronen: $\vec{p} = \sum_{l=1}^{Z}\frac{q^2}{m_e\omega_{0,l}^2}\vec{E} = \varepsilon_0\alpha\vec{E}$



b) Orientierungspolarisation:
N Dipole, p_i permament
Temperatur (Entropie) steht völliger Ausrichtung entgegen, wichtig bei $T > 0$
Wärmelehre: $< \vec{p} >= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \frac{p^2}{3kT}\vec{E} = \varepsilon_0\alpha\vec{E}$

4.2 Elektrische Polarisation und dielektrische Verschiebung

Materie besitzt Dipolmomente (entweder durch Feldeinwirkung oder schon vorhanden)

$\varphi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

$\vec{P}(\vec{r}'): \sum\limits_{\text{alle p in } d^3r} \vec{p} = \vec{P}(\vec{r}')d^3r'$ (*el. Polarisation*)

Jetzt: „Σ“ über alle kleinen Volumina d^3r':

$\Rightarrow \varphi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\vec{P}(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

$\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \equiv \vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$\vec{P}(\vec{r}')\vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{\vec{r}-\vec{r}'} = \vec{\nabla}_{r'}[\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}] - \frac{1}{\vec{r}-\vec{r}'}\vec{\nabla}_{r'}\vec{P}(\vec{r}')$

$$einsetzen: \varphi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\underbrace{\int\limits_V d^3r'\vec{\nabla}_{r'}[\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}]}_{\underbrace{\int\limits_{S(V)}\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{f}}_{\substack{=0,\ da\ \vec{P}\ auf\ S(V)\\ (V\ viel\ größer\ als\ Materievol.)}}} - \int\limits_V d^3r'\frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\Big)$$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V d^3r'\frac{-\vec{\nabla}_{r'}\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$

außerdem: freie Ladungen mit Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$

$\varphi_a(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V d^3r'\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$\varphi(\vec{r}) = \varphi_p(\vec{r}) + \varphi_a(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V d^3r'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\rho(\vec{r}') - \vec{\nabla}_{\vec{r}'}\vec{P}(\vec{r}))$

$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_V d^3r'\frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (\vec{E} = \vec{\nabla}\varphi)$

Also $\boxed{\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho(\vec{r}) - \vec{\nabla}\vec{P}(\vec{r}))}$

(ganz allgemein; noch keine Aussage, wie $\vec{P}$ von $\vec{E}$ abhängt)

Auf 2 Arten interpretierbar:

a) $\vec{\nabla}(\underbrace{\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}) = \rho$ (*freie Ladungsdirchte*)

$\vec{D}$: *dielektrische Verschiebung*

$\Rightarrow \boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P},\ \vec{\nabla}\vec{D} = \rho,\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$ (Maxwellgl., der Elektrostatik)

$\vec{D}$ unabh. von betrachteten Diel. hängt nur ab von ρ, Hilfsgröße

$\vec{E}$: eigentliche Messgröße, über $\vec{K}$ hängt über $\vec{P}$ vom Medium ab.

$\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \vec{E}_a \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_p = \vec{E}_a - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$

$\vec{P}$ wirkt wie inneres Zusatzfeld, das sich dem durch die freien Ladungen erzeugten Feld $\vec{E}_a = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}$ überlagert.

b) $\rho_p(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\vec{P}(\vec{r}) \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho(\vec{r}) + \rho_p(\vec{r}))}$

$\boxed{\vec{P}: \vec{\nabla}\vec{P}}$ wichtig

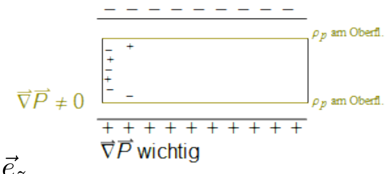
$\vec{P}(\vec{E}),\quad \vec{P}(0) = 0$ entwickeln von $\vec{P}$ nach $\vec{E}$

$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0\vec{E} = \underbrace{(1+\chi_e)}_{\varepsilon_r}\varepsilon_0\vec{E}\varepsilon_r$ relativer Dielektrizitätskonst. $P_i = en\sum\limits_{j=1}^{3}\xi_{ij}E_j,\ i,j = 1,2,3\ (x,y,z)$

χ_{ij}: Suszeptibilitätstensor

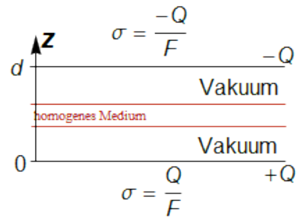
Falls Medium isotrop: $\chi_{ij}\chi_e\delta_{ij} \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0\xi_e\vec{E}$

$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}}$



(∞ groß)
Unterscheiden $\vec{E}$ im Medium und Vakuum.
Wir wissen aus Symmetriegründen $\boxed{\vec{E} = E(z)\vec{e}_r} \Rightarrow D(z)\vec{e}_z$

$$1)\ \vec{D}:\quad \vec{\nabla}\vec{D} = \rho \overset{Kap.2.5}{\longrightarrow} \vec{D} = \begin{cases} \sigma\vec{e}_z & ,\ innen \\ 0 & ,\ außen \end{cases}$$



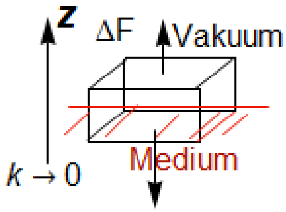
$$2)\ \vec{E}:\quad \vec{E} = \begin{cases} \vec{D}/\varepsilon_0 & ,\ im\ Vakuum \\ \vec{D}/\varepsilon_0\varepsilon_r & ,\ im\ Medium \end{cases}$$

$$2)\ \vec{P} = \begin{cases} 0 & ,\ im\ Vakuum \\ vecD - \varepsilon_0\vec{E} = \vec{D} - \frac{\vec{D}}{\varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_r}{\varepsilon_r}\vec{D} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma\vec{e}_z & ,\ im\ Medium \end{cases}$$

$\vec{\nabla}\vec{P} = -\rho_p$
$\int\limits_V d^3r\vec{\nabla}\vec{P} = \int\limits_{S(V)} \vec{P}d\vec{f} = \Delta F(-P_z) = -\Delta F\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma$

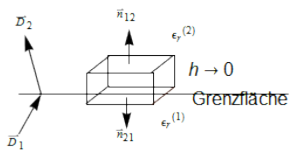
$\overset{!}{=} -\int\limits_V d^3r\rho_p \overset{!}{=} -\Delta F\sigma_p \Rightarrow \boxed{\sigma_p = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma}$

Kapazität:
$U = E_z d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d = \frac{d}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{F}$
$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{F}{d} = \varepsilon_r C_0$



4.3 Randwertprobleme und Dielektrika

$\vec{D}, \vec{E}$ an Grenzfläche Stetigkeitsbedingunen?
Alles wie in Kap 2.7
$\vec{\nabla}\vec{D} = \rho \Rightarrow \vec{n}_{12}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$ (Gauss)
σ: Flächenladungsdichte der freien Ladung
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow E_1 + E_2$ (Stokes)
Falls $\sigma = 0$ auf Grenzfläche: $D_{1,n} = D_{2,n}$, $\vec{D}$ normal stetig $\Rightarrow E_{1,n} = \frac{\varepsilon_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(1)}}E_{2n}$
sowieso: $E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow D_{1t} = \frac{\varepsilon_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(2)}}D_{2t}$



4.4 Elektrostatische Energie

Vakuum: $W = \frac{1}{2}\int d^3r\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})$
Dieser Ausdruck kann nicht direkt übernommen werden, da ein Dielektrikum der Aufbau der olarisationsladungen ebenfalls Energie erfordert.
Betr. kleine Änderung der Energie δW, die durch Änderung $\delta\rho$ der Ladungsdichte ρ.
Die bei der Änderung aufzubringende Arbeit ist $\delta W = \int d^3r\phi(\vec{r})\delta\rho(\vec{r})$
$\vec{\nabla}\vec{D} = \rho \Rightarrow \vec{\nabla}\delta\vec{D} = \delta\rho$
$\phi\delta\rho = \phi\vec{\nabla}\delta\vec{D} = \vec{\nabla}(\varphi\delta\vec{D})\underbrace{-\vec{\nabla}\varphi}_{\vec{E}}\delta\vec{D}$

$\Rightarrow \delta W = \int d^3r \vec{E}\delta\vec{D} + \int\limits_{S(V)} d\vec{f}(\varphi\delta\vec{D})$

$\xrightarrow{v\to\infty} 0$, da $\varphi(\infty) = 0$

Isotropes Medium:

$\vec{E}\delta\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r \underbrace{\vec{E}\delta\vec{E}}_{\frac{1}{2}(\vec{E}\delta\vec{E}+\delta\vec{E}\vec{E})} = \frac{1}{2}\delta(\vec{E}\vec{D})$

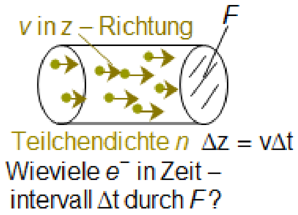
$\Rightarrow \delta W = \int d^3r\delta(\vec{E}\vec{D}) \Rightarrow \delta(W) = \delta(\frac{1}{2}\int d^3r\vec{E}\vec{D})$

$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\int d^3r\vec{E}\vec{D}}$

5 Magnetostatik

Bisher: ruhende el. Ladungen üben Kraft auf andere el. Ladungen aus $\Rightarrow$ $\vec{E}$-Feld
Jetzt: stationärer Strom el. Ladungen
Exp: Stromdurchflossene Leiter übt Kraft auf andere stromdurfl. Leiter aus
neues Feld: *Magnetfeld* (Biot-Savart)

5.1 Elektrischer Stromg



el. Stromg: geordnete Bewegung el. Ladungen (wie Wasserstrom)
Erzeugung:

1) Verschiebung der Ladung im Raum (*Konvektion*)
2) Erzeugen einer Potentialdifferenz U zwischen den Enden eines metallischen Leiters $\Rightarrow$ Kraft auf (quasi-)freie Ladungen im Draht $\Rightarrow$Strom

Ladungsmene ΔQ durch Fläche:

$\Delta Q = F\Delta znq = Fv\Delta tnq$

Stromstärke $I = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{I = Fnvq}$

Einheit: Ampere $A = \frac{C}{s}$

Verallgemeinerung:

Stromdichte $\vec{j} = \frac{I}{\Delta F}\vec{e}_v$

$\vec{e}_v$: EInheitsvektor in Richtung der Geschw. der Ladungen.

Dünner Draht: $\vec{v}$ in Drahtrichtung

$\vec{e}_v \to \vec{e}_l$

$\vec{j} = \frac{I}{\Delta F}\vec{e}_l$

$d^3r = \Delta F dl = \Delta V$

$\Rightarrow \vec{j}d^3r = \frac{I}{\cancel{\Delta F}}\cancel{\Delta F}dl\vec{e}_l = Idl\vec{e}_l$

$\vec{j}(\vec{r},t)d^3r = I(\vec{r},t)dl\vec{e}_l$

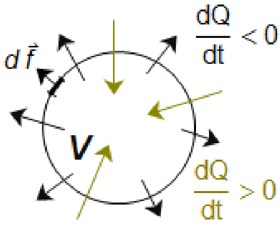
Allgemein:

$\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)$ klar.

$I = \int\limits_F \vec{j}d\vec{f}$

Allgemeiner Zusammenhang zwischen $\rho(\vec{r},t)$ und $\vec{j}(\vec{r},t)$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho(\vec{r},t)d^3r}_{Ladung\ Q\ in\ V} \overset{!}{=} \underbrace{-\int\limits_{S(V)} \vec{j}d\vec{f}}_{Ladungsstr.\ durch\ Oberfl.} = -\int\limits_V \vec{\nabla}\vec{j}d^3r$$



$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{r},t) = 0}$ *Kontinuitätsgleichung*

(Nicht beschränkt auf E-Dynamik!)

Magnetostatik: $\boxed{\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = 0}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla}\vec{j} = 0}$

Ohmische Gerade:

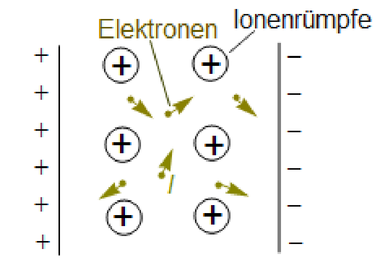
$I = \frac{U}{R} = U\Sigma$ lokal: $\vec{j}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})$ (σ: *spezifische Leitfähigkeit*) *Materialgleichung*

Mit $\vec{E}$-Feld

e^- werden beschleunigt, bis sie mit anderen e^- oder den Ionenrümpfen zusammenstoßen

Dann wird $\vec{v}_{Feld}$ gleich Null und Beschleunigung durch Feld beginnt aufs neue Geschwindigkeit des l-ten Elektrons

$$\boxed{\vec{v}_l = \underbrace{\vec{v}_l(0)}_{ohne\ Feld} + \underbrace{\frac{q}{m}\vec{E}}_{Beschl} \underbrace{t_l}_{Zeit\ nach\ letzten\ Zus.stoß}}$$



Ohne $\vec{E}$: Geschwindigkeit zufällig

Def: *Mittlere Geschw.*:

$\overline{\vec{v}} = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} \vec{v}_l$

$\tau = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} \vec{v}t_l$ (mittlere Zeit nach letzem Stoß „*mittlere Stoßzeit*“)

$\Rightarrow \overline{\vec{v}} = \underbrace{\overline{\vec{v}}(0)}_{=0} = -nev$

$\Rightarrow \vec{j} = -ne\overline{\vec{v}} = \frac{e^2n\tau}{m}\vec{E} = \sigma\vec{E}$

$\boxed{\sigma = \frac{e^2n}{m}\tau}$ Drude-Formel

Eektr. Leistung:

Ladung q wird im $\vec{E}$-Feld um $\vec{r}$ verschoben.

geleistete Arbeit: $dW = \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = q\vec{E}(\vec{r})d\vec{r}$

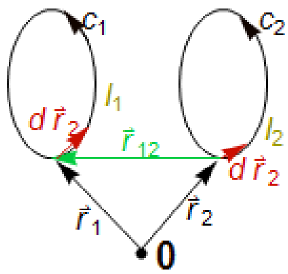
Verschiebung in Zeit dt

Leistung: $\frac{dW}{dt} = q\vec{E}(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{dt} = q\vec{E}(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$

$\rho(\vec{r})d^3r\vec{E}(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \overset{!}{=} \vec{E}(\vec{r})\vec{j}(\vec{r})d^3r$

Alle Ladungen in V $\Rightarrow$ $\boxed{P = \int\limits_V d^3r\vec{E}(\vec{r})\vec{j}(\vec{r})}$

5.2 Biot-Savart Gesetz



Experimentell (Ampere)

Kraft von 2 auf 1: $\vec{K}_{12}$

$\boxed{\vec{K}_{12} = I_1\oint\limits_{c_1} d\vec{r}_1 x\frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint\limits_{c_2}\frac{d\vec{r}_2 x(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_!-\vec{r}_2|^3}}$ Biot-Savart

μ_0: magnetische Feldkonstante

$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}$ $(\varepsilon_0\mu_c^2 = 1)$

$\frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint\limits_{c_2}\frac{d\vec{r}_2 x(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_! - \vec{r}_2|^3}$: $\vec{B}_2(\vec{r}_1)$ magn. Induktion

Verallgemeinerung auf beliebige Stromdichte

$\int\limits_c I d\vec{r}' \rightarrow \int\limits_V d^3r'\vec{j}(\vec{r}')$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V d^3r'\vec{j}(\vec{r})\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$

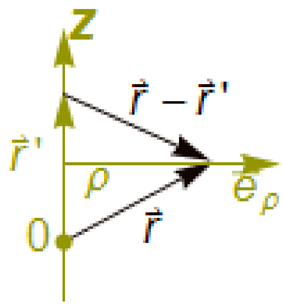
Elektrostatik $\vec{E}$: $\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')$

Magnetostatik $\vec{B}$: $\vec{j}(\vec{r}')x(\vec{r}-\vec{r}')$

Beispiel zu Feld eines geraden Leiters

Leiter ∞ lang.

Zylindersymmetrie $\Rightarrow$ Zylinderkoord sinnvoll.



ρ, φ, z

$\vec{r}' = z' e_z$

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_c d\vec{r}'\frac{x(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

$\vec{r}-\vec{r}' = \rho\vec{e}_\rho + (z-z')\vec{e}_z$

$\Rightarrow d\vec{r}'x(\vec{r}-\vec{r}') = \rho dz' \underbrace{(\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho)}_{\vec{e}_\varphi}$

$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\frac{I}{4\pi}\rho\vec{e}_\varphi\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz'\frac{1}{(\rho^2+(z-z')^2)^{3/2}}$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dz'\frac{1}{(\rho^2+(z-z')^2)^{3/2}} = \frac{2}{\rho^2}$

$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi$

$\boxed{\vec{K} = \int\limits_V d^3r(\vec{j}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r}))}$

Bsp.: $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ Punktladung am Ort $\vec{r}_0$

$\vec{\ }(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r})q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$

$\boxed{\Rightarrow \vec{K} = qv(\vec{r}_0)\times\vec{B}(\vec{r}_0)}$ Lorentzkraft

5.3 Maxwellgleichungen und Vektorpotential

Umformung von $\vec{B}$

(*) Es gilt: $\vec{\nabla}_\varphi\times\vec{a} = \vec{\nabla}\times(\varphi\vec{a}) - \underbrace{\cancel{\varphi(\vec{\nabla}\times\vec{a})}}_{\vec{a}\ const}$

$\vec{j}(\vec{r}')\times\underbrace{\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}_{-\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} = +\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\times\vec{j}(\vec{r}') \stackrel{*}{=} \vec{\nabla}_r\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) \text{ mit } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{(Vektorpotential)}}$

$\vec{B}$: reines Wirbelfeld

$\boxed{\vec{\nabla}\vec{B} = 0}$ homogene Maxwellgl. der Magnetostatik (Differentialform)

$\Rightarrow$ $\boxed{\oint\limits_{S(V)} \vec{B}(\vec{r})d\vec{f}}$ (Integralform)

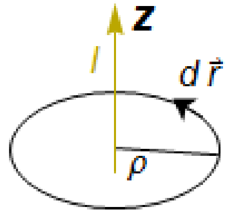
Aus Zerlegungssatz folgt, da $\vec{B}(\vec{r})$ reines Wirbelfeld:
$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'}\times\vec{B}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$
$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}}$ inhomogene Maxwelgl. der Magnetostatik

Stokes: $\oint\limits_{S(C)} \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{B})}_{\mu_0\vec{j}} d\vec{f} = \boxed{\oint\limits_{S(C)} \vec{B}d\vec{r} = \mu_0 I}$

(*Ampere-Durchflutungsgesetz* für praktische Anwendungen (sehr wichtig))

Beispiel zu 5.3

$\vec{B} = \vec{B}(\rho)$
$\int\limits_C \vec{B}d\vec{r} = \mu_0 I = B_\varphi(\rho)\int\limits_C dr = \mu_0 I$
$\Rightarrow \boxed{B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}}$



Zurück zu $\vec{A}(\vec{r})$
$A(\vec{r})$ Hilfsgröße, legt $\vec{B}$ nicht eindeutig fest
$A(\vec{r}) \to A(\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi \quad (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\chi = 0) \quad$ (kein Beitrag zu $\vec{B}$)
χ frei verfügbar, χ, so dass wählbar dass
$\boxed{\vec{\nabla}\vec{A} = 0}$ (Coulomb-Eichung)

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times A) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) \boxed{-\Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j}}$ (Poissongleichung)

(siehe Elektrostatik)
d.h.: in der Elektrostatik anwendbar auf entsprechende Randprobleme in der Magnetostatik

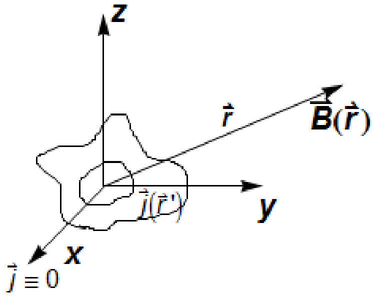
5.4 Magnetostatisches Moment

Magnet. Moment ist genauso wichtig für Magnetostatik wie el. Ladung in der Elektrostatik.

Betr.: $\vec{A}(\vec{r})$:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \underbrace{\frac{1}{r}}_{Monopol} + \underbrace{\frac{\vec{r}'\vec{r}}{r^3}}_{Dipol} + \ldots$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r}\underbrace{\int\limits_V V d^3r'\vec{j}(\vec{r}')}_{=0}}_{keine\ magn.\ Monop.} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int d^3r'(\vec{r}\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}')}_{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}} + \ldots$$



Mit $\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}\int\limits_V d^3r'(\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}'))}$

(*) $\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}}$

Beweis

Hilfssatz:

Beh.: $\hat{I} = \int d^3r' \left[f(\vec{r}')(\vec{j}(\vec{r}')\vec{\nabla}g(\vec{r}')) + g(\vec{r}')\vec{j}(\vec{r}')\vec{\nabla}f(\vec{r}') \right] \stackrel{!}{=} 0$

f,g stetig differenzierbar

Beweis

$\vec{\nabla}gf\vec{j} = gf\vec{\nabla}\underbrace{\vec{j}}_{\stackrel{!}{=}0} + \vec{j}\vec{\nabla}(gf) = \underbrace{f(\vec{j}\vec{\nabla}g) + g(\vec{j}\vec{\nabla}f)}_{Integrand}$

Also $\hat{I} = \int\limits_V d^3r'\vec{\nabla}gf\vec{j} \stackrel{**}{=} \oint\limits_{S(V)} d\vec{f}'gf\vec{j} = 0$

mit (**) üblicher Trick mittels Gauß

□

Spezialfälle:

a) $f = 1,\ g = x'_i \Rightarrow \vec{\nabla}x'_i = \vec{e}_i$

$\Rightarrow \int d^3r'\vec{j}(\vec{r}') \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \int d^3r\vec{j}_i = 0$

$\Rightarrow \int d^3r\vec{j} = 0$

b) $f = x'_i,\ g = x'_l \Rightarrow \int d^3r'(x'_i j_l + x'_l j_i) = 0$

$\Rightarrow \int d^3r' x'_l j_i = -\int d^3r' x'_i j_l$

Weiter in Übung. (Nolting)

□

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}\frac{\mu_0}{4\pi}$ (Nolting)

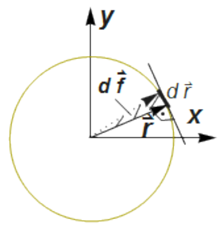
$\Rightarrow \vec{B} \stackrel{!}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$

dieselbe Gestalt wie in der Elektrostatik ($\vec{m} \leftrightarrow \vec{p}$)

Beispiel zu Geschlossener Stromkreis

$\boxed{d^3r\vec{j}(\vec{r}) \rightarrow Id\vec{r}}$ entlang Draht

$\vec{m} = \frac{1}{2}I\int\limits_C(\vec{r}\times d\vec{r})\vec{r}\times d\vec{r} = |\vec{r}\times d\vec{r}|\vec{e}_z \Rightarrow \vec{m} = IF\vec{e}_z$



Beispiel zu N Punktladungen

Wir betrachten: N Punktladungen der Ladung q und Masse M_0

$\Rightarrow \vec{j}(\vec{r}) = q\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{v}_i\delta(\vec{r}-\vec{R}_i(t))$

$\Rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})) \overset{!}{=} \frac{1}{2}q\sum\limits_{i=1}^{N}(\vec{R}_i(t)\times\vec{v}_i)\frac{M_0}{M_0}$

$\Rightarrow (\vec{R}_i(t)\times\vec{v}_i)M_0 = \vec{l}_i$: Bahndrehimpuls des i-ten Teilchens

$\Rightarrow \sum$...: gesamter Impuls

$\vec{m} = \frac{q}{2M_0}\vec{L}$

mit $\frac{q}{2M_0}$: Pyromagnet. Verhältnis

Kraftwirkung eines externes Magnetfeldes auf Stromerteilung

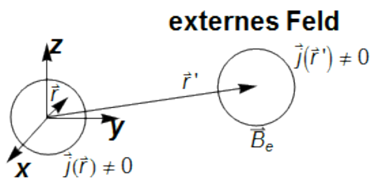
$\vec{B}_e(\vec{r})$ um $\vec{r}=0$ entwickeln:

$\vec{B}_e(\vec{r}) = \vec{B}_e(0) + \vec{r}\vec{\nabla}\vec{B}_e(\vec{r})|_0 + ...$

$\Rightarrow \vec{K} = \int d^3r(\vec{j}(\vec{r})\times\vec{B}_e(\vec{r})) = \underbrace{-\vec{B}_e(0)\times\int d^3r\vec{j}}_{=0} + \int d^3r[\vec{j}\times(\vec{r}\vec{\nabla})\vec{B}_e(\vec{r})|_0]$

Man kann zeigen:

$\vec{K} = (\vec{m}\times\vec{\nabla})\times\vec{B}_e(\vec{r})|_0 = \vec{\nabla}(\vec{m}\vec{B}_e) - \vec{m}\underbrace{(\vec{\nabla}\vec{B}_e|_0)}_{=0}$



$\vec{K} = -\vec{\nabla}V$

$V = -\vec{m}\vec{B}_e(0) = -mB_e(0)\cos(\vartheta)$

$\vartheta = 0:\ V$ Minimum $\Rightarrow \vec{m}||vecB$

Anwendungen:

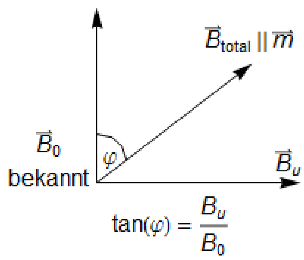
1) Kompassnadel: $\vec{m}$ in Richtung $\vec{B}_e$ (Nordrichtung bei Erdfeld)

2) Bestimmung eines unbekannten Magnetfeldes $\vec{B}_u$ mit Kompass

3) Wechselwirkungsenergie 2er magnetdipole $\vec{m}_1, \vec{m}_2$

   $V_{12} = -\vec{m}_1\vec{B}_e(\vec{m}_2), \vec{r}_{12}$ Abstandsvektor

   $= -\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}_1\vec{r}_{12})(\vec{m}_2\vec{r}_{12})}{r_{12}^5} - \frac{\vec{m}_1\vec{m}_2}{r_{12}^3}\right]$ identische Formel wie bei Dipolen



5.5 Magnetostatik in Materie

Einteilung der magnet. Stoffe:

a)Diamagnetismus: keine permamentmagnet. Dipole. Eingeschaltetes Magnetfeld induziert Dipole. Diese sind dem Magnetfeld entgegengerichtet (Lenz-Regel)

b)Paramagnetismus: permamene magn. Dipole entstehen. Diese werde im Magnetfeld ausgerichtet.

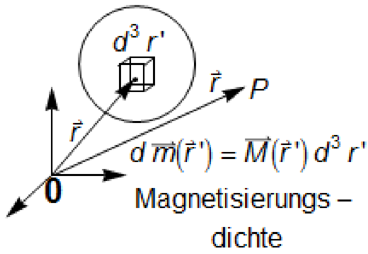
$\chi_m(T) = \frac{c}{T}$

c)Ferromagnetismus, Antiferromagnetismus: magnet. Dipole ausgerichtetn

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Magnetisierung} & (T < T_C) \\ \text{Paramagnet.} & (T > T_C) \end{cases}$$

Gesucht: mikroskop. Beschreibung in Analogie zum Vorgehen bei Dielektrika.

$d\vec{A}_{mag}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$



Über das gesamte Vol. integrieren.

$\Rightarrow vecA_{mag}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V d^3r' \frac{\vec{M}'|x(\vec{r}-\vec{r}')|}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

$\frac{|(\vec{r}-\vec{r}')|}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Außerdem $\vec{A}_{frei}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V d^3r' \frac{\vec{j}_{frei}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$\Rightarrow \vec{A} = \vec{A}_{mag} + \vec{A}_{frei}$

$$\underbrace{\vec{M}(\vec{r}')}_{\vec{a}} \times \vec{\nabla}_{r'} \underbrace{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\varphi} = -(\vec{\nabla}_r, \varphi) \times \vec{a} = -\vec{\nabla}_{r'} \times (\varphi \vec{a}) + \varphi \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{a}$$

$\Rightarrow \vec{A}_{mag}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V d^3r'(-\vec{\nabla}'_r \times \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|})$

Übungen:

$\int\limits_V d^3r'(\vec{\nabla} \times \vec{b}) = \int\limits_{S(V)} d\vec{f} \times \vec{b}$

$\vec{b} = \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\vec{j}_{frei} + \vec{\nabla}_{r'} \times \vec{M}(\vec{r}'))$

$\stackrel{!}{=} \frac{1}{4\pi} \int\limits_V d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{B}(\vec{r}'))$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{gesamt} = \mu_0 \vec{j}_{frei} + \mu_0(\vec{\nabla} \times \vec{M})}$$

Ab jetzt genauso weiter wie in Elektrostatik

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\underbrace{\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}}_{\vec{H}\ (Magnetfeld}) = \vec{j}_{frei}$$

$\vec{B}$: magnetische Induktion $\hat{=}\vec{E}$ mag. Kraftwirkung

$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{frei} \Rightarrow \vec{H}$ entspricht $\vec{D}$!

Lineares isotropes Medium:

$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0\underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu_r}\vec{H}$

χ_m: magnetische Suszeptibilität.

Beispiel zu Kugel, homogen magnetisiert

$\vec{M}(\vec{r}) = M_0 \vec{e}_z$

$\vec{j}_{frei} = 0$

$\vec{j}_{frei} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{=}0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla}_{\varphi_m}$

φ_m: magnetisches Potential

$0?\vec{\nabla}\vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla}(\vec{H} + \vec{M})$

$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi_m = \vec{\nabla}\vec{M} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

Keine Randbedingungen:

Elektrostatik $\Rightarrow \varphi_m = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{M}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

übl. Trick: $\int\limits_V d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'}\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int\limits_V d^3r' \vec{\nabla}_{r'} \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underbrace{-\vec{M}(\vec{r}')\vec{\nabla}_{r'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{+M(\vec{r}')\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$

$\int\limits_V d^3r' \vec{\nabla}_{r'} \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \oint\limits_{S(V)} \frac{\vec{M}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{f}$

$\Rightarrow \varphi_m(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_r \int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

speziell Kugel, homogen, magnetisiert, $\vec{M} = M_0\vec{e}_z$:

$\Rightarrow \varphi_m(\vec{r}) = -\frac{M_0}{4\pi}\frac{d}{dz}\int\limits_{V_{Kugel}} d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

5.6 Verhalten an Grenzflächen

völlig analog zur ELektrostatik!

a) $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$

$\Rightarrow B_{2n} = B_{1n}$ normalstetig

$\Rightarrow H_{2n} = \frac{\mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(2)}} H_{1n}$ unstetig

b) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{frei}$

$\Rightarrow H_{2t} = H_{1t}$, falls $\vec{j}_{frei} = 0$

$\Rightarrow B_{2t} = \frac{\mu_r^{(2)}}{\mu_r^{(1)}} B_{1t}$

6 Elektrodynamik

Zeitunabhängige Felder:

- Elektrostatische Gl: $\vec{\nabla}\vec{D} = \rho$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, $\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$
- Magnetostatische Gl: $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$, $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$

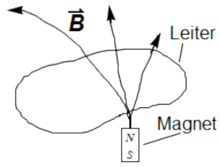
Ab jetzt: zeitabhängig Felder

6.1 Faradaysches Induktionsgesetz und Maxwell'sche Ergänzung

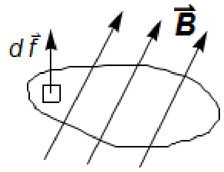
a) *Faradaysches Induktionsgesetz*

α) Entdeckung Faradays:

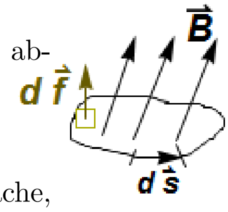
In einem Leiter ensteht ein Strom, wenn ein in der Nähe befindlicher Magnet bewegt wird oder wenn der Leiter im Magnetfeld bewegt wird.
Änderung des Induktionsfeldes induziert ein elektrisches Feld.



β) Definition des Induktionsflusses oder des magnetischen Flusses
$\phi = \int\limits_F \vec{B} d\vec{f}$
Dimension von $\phi : [\phi] = [\vec{B}][d\vec{f}] = \frac{Vs}{m^2} m^2 = Vs$
1Vs=1Wb (Weber)
geschlossene Flächen verschwindet der Induktionsfluss:
$\int\limits_{F(V)} \vec{B} d\vec{f} = \int\limits_V (div(\vec{B}))dV = 0$



γ) Faradaysches Induktionsgesetz:
Man findet experimentell: $\oint\limits_{R(F)} \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int\limits_F \vec{B} d\vec{f} = -\frac{d}{dt}\phi$
Umlaufrichtung um Rand der Fläche und Richtung der differenziellen Flächennormalen sind durch ein Rechtssystem festgelegt.
Faradaysches Induktionsgesetz
F. Induktionsgesetz bei Veränderung der Fläche kann aus Lorentzkraft abgeleitet werde.



δ) Induktionsgesetz in differentieller Form
Annahme: keine zeitliche Änderung der Fläche, ruhender Rand der Fläche, bzw. ruhende Leiter
$\frac{d\phi}{dt} = \int\limits_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{f}$
$\oint\limits_{S(F)} \vec{E} d\vec{s} = \int\limits_F rot(\vec{E}) d\vec{f} = -\int\limits_F \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{f}$
$\int\limits_F (rot(\vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d)\vec{f} = 0$
$\Rightarrow \boxed{rot(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$
Differentielle Form des Induktionsgesetzes

b) Maxwellsche Ergänzung:
Magnetostatik *Oerstedsches Gesetz in Differentialform* $rot(\vec{H}) = \vec{j}$
$div(rot(\vec{H})) = div(\vec{j}) \to div(\vec{j}) = 0$ (gilt bei *stationären Strömen*)
nichtstationäre Ströme $div(j) = -\frac{\partial p}{\partial t}$
$0 = div(rot(\vec{H})) = div(\vec{j}) + \frac{\partial p}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} div(\vec{D}) = div(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$
$\Rightarrow 0 = div(j + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$
$div(rot(\vec{H})) = div(j + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$
$\Rightarrow \boxed{rot(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$
$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ heißt *Verschiebungsstromdichte*, *Maxwellsche Ergänzung*

c) *Grundgleichungen der Elektrodynamik* in differentieller Form gelten nur für ruhende Medien und ruhende Leiter.

α) Die elektrische Ladung als Quelle des elektrischen Verschiebungsvektors

β) Quellfreiheit des magnetischen Induktionsfeldet
$div(\vec{D}) = 0$ (Nichtexistenz von magn. Monopolen)

γ *Erweitertes Oerstetisches Gesetz*:
$rot(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ =Verschiebungsstromdichte, von Maxwell eingeführt

δ) Faradaysches Induktionsgesetz:
$rot(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ gültig für nicht-bewegte Leiter

ϵ) *Materialgleichungen* (*Verbindungsgleichungen*)
$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$, ε : Dielektrizitätskonstante
$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}$, μ : Permeabilitätskonstante
Im Vakuum: ε_0, μ_0
$\vec{j} = \sigma \vec{E}$, σ: Leitfähigkeit

ζ) Kraft auf Ladung
$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$
kontinuierliche Ladungsverteilung,
$\frac{d\vec{F}}{dV} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$
$\vec{j} = \rho \vec{v}$, $\rho = \frac{dq}{dV}$

6.2 Elektrodynamische Potentiale

Maxwell-Gl:

(1) $rot(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

(2) $rot(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(3) $div(\vec{D}) = \rho$

(4) $div(\vec{B}) = 0$

Gegeben: Ladungs- und Stromverteilung $\rho, \vec{j}$
Gesucht:Felder $\vec{E}, \vec{B}$

a) Das *Vektorpotential* und das *skalare Potential*:
wegen $div(\vec{B}) = 0 \ \Rightarrow \ \vec{B} = rot(\vec{A})$
$rot(\vec{E}) = -dtrot(\vec{A}) \ \Rightarrow \ rot(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$
wird allgemein gelöst durch $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -grad(\varphi)$
$\vec{E} = -grad(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{B} = rot(\vec{A}) \\ &\vec{E} = -grad(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}}$$

lösen Gleichung 2 und 4 für beliebige Potential $\vec{A}$ und φ
φ: skalares Potential
$\vec{A}$: Vektorpotential

b) *Eichtransformation*
$\vec{A}' = \vec{A} + grad(\psi)$, $\vec{B} = rot(\vec{A}') = rot(\vec{A})$, Induktionsfeld ändert sich nicht!
ψ ist willkürliches Potential
zu $\vec{A}'$ gehöre φ'
$\vec{E} = -grad(\varphi') - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -grad(\varphi') - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad(\frac{\partial \psi}{\partial t}) = -grad(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
$\varphi = \varphi' + \frac{\partial \psi}{\partial t}$, $\boxed{\phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + grad(\psi)}$

Eine solche Transformation lässt $\vec{E}$ und $\vec{B}$ invariant.

Man nennt eine solche Transformation Eichtransformation

c) Differentialgleichungen für $\vec{A}$ und φ $\vec{A}$ und φ wird durch die beiden restlichen Maxwellgleichungen bestimmt:
$rot(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $div(\vec{D}) = \rho$
μ und ε seien orts- und zeitunabhängig
$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

1) $rot(\frac{1}{\mu} rot(\vec{A})) = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}((\varepsilon)(-grad(\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})))$
$\frac{1}{\mu}(grad(div(\vec{A})) - \Delta \vec{A}) = \vec{j} - \varepsilon grad(\frac{\partial \varphi}{\partial t}) - \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$

$$\boxed{-\Delta \vec{A} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + grad(div(\vec{A}) + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = \mu \vec{j}}$$

2) $div(\varepsilon(-grad(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})) = \rho$

$$\boxed{-\Delta \rho - \frac{\partial}{\partial t} div(\vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon}}$$

d) *Eichung*:

α) *Coulombeichung*:
$div(\vec{A}) = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$ (Poisson-Gleichung)
Daher Name: Coulombeichung (heißt auch *Transversale Eichung*)
$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \int \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$
$\vec{A}$ bestimmt sich aus $\Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu j + \varepsilon \mu grad(\frac{\partial \varphi}{\partial t})$
(*inhomogene Wellengleichung*)

β) *Lorentzeichung*:
$div(\vec{A}) + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta A - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu j \\ \Delta \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial t^2} &= \frac{-\rho}{\varepsilon} \end{aligned}}$$

Entkopplung der beiden Potentiale $\vec{A}$ und φ
Wichtig für spezielle Relativitästheorie.
(Sind invariant gegen Lorentztransformation)

6.3 Die Energiebilanz

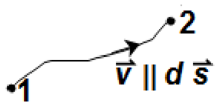
a) Arbeit und Leistung beim Verschieben von Ladungen im elektromagnetischen Feld
$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} + q \int_1^2 (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s}$
Leistung $P = \frac{dA}{dt} \vec{F} \vec{v} = q \vec{E} \vec{v} + q(\vec{v} \times \vec{B}) \vec{v} = q \vec{E} \vec{v}$
Leistungsdichte: $\frac{dP}{dV} = \frac{dq}{dV} \vec{E} \vec{v} = \rho \vec{v} \vec{E} = \vec{j} \vec{E}$
Einheit: $[\frac{dP}{dV}] = [\frac{W}{m^3}]$

b) *Energiesatz der Elektrodynamik*:
$\vec{j} \vec{E} = (rot(\vec{H}) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \vec{E}$

$$div(\vec E \times \vec H) = \vec H rot(\vec E) - \vec E rot(\vec H)$$
$$(rot(\vec H))\vec E = \vec H rot \vec E - div(\vec E \times \vec H) = -\vec H \frac{\partial \vec B}{\partial t} - div(\vec E \times \vec H)$$
$$\vec j \vec E = -(\vec H \frac{\partial \vec B}{\partial t} \vec E \frac{\partial \vec D}{\partial t}) - div(\vec E \times \vec H)$$
$$\int_V \vec j \vec E dV = -\int_V (\vec H \frac{\partial \vec B}{\partial t} + \vec E \frac{\partial \vec D}{\partial t}) dV - \underbrace{\int_V div(\vec E \times \vec H) dV}_{\int_{F(V)} (\vec F \times \vec H) d\vec f}$$

$$\boxed{\int_V \vec j \vec E dV + \int_{F(V)} (\vec E \times \vec H) d\vec f = -\int_V (\vec H \frac{\partial \vec B}{\partial t} + \vec E \frac{\partial \vec D}{\partial t}) dV}$$

$$A = q \int_1^2 \vec E d\vec s + q \underbrace{\int_1^2 (\vec v \times \vec B) d\vec s}_{=0}$$



1. Term: Leistung des Feldes an Ladungsträgern
2. Term: $[\vec E \times \vec H] = [\frac{V}{m}\frac{A}{m}] = [\frac{Ws}{m^2 s}] = [\frac{J}{m^2 s}]$

Dimension ist die Energie pro Zeit und pro Flächeneinheit

$\vec S = \vec E \times \vec H$=*Pointingscher Vektor*

$$\int_{F(V)} (\vec E \times \vec H) d\vec f = \int_{F(V)} \vec S d\vec f$$

Energie, die pro Zeit aus dem Volumen heraustritt.

$$[\vec E \frac{\partial \vec D}{\partial t}] = [\frac{V}{m}\frac{A}{m^2}\frac{s}{s}] = [\frac{J}{m^3 s}]$$
$$[\vec H \frac{\partial \vec B}{\partial t}] = [\frac{A}{m}\frac{V}{m^2}\frac{s}{s}] = [\frac{J}{m^3 s}]$$
$$\int_V \vec j \vec E dV = \frac{dA}{dt}$$

Leistung des Feldes am Ladungsträgern wird umgewandelt in mechanische Energie, Wärmeenergie, falls Leiter mit Widerstand vorhanden ist.

$$\int_V (\vec E \frac{\partial \vec B}{\partial t} + \vec H \frac{\partial \vec B}{\partial t}) dV = \frac{dW}{dt}$$

W=Energie des elektromagnetischen Feldes in V.

$$\boxed{\frac{dA}{dt} + \frac{dW}{dt} = -\int_{F(V)} (\vec E \times \vec H) d\vec f}$$

Energie-Erhaltungssatz, wenn keine Teilchenströme aus dem Volumen heraustreten.

c) *Energiedichte* des elektromagnetischn Feldes

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\vec E \frac{\partial \vec D}{\partial t} + \vec H \frac{\partial \vec B}{\partial t}) dV$$
$$W = \int_t \int_V (\vec E \frac{\partial \vec D}{\partial t} + \vec H \frac{\partial \vec B}{\partial t}) dV dt$$

$\frac{dW}{dV}$= Energiedichte

$$\frac{dW}{dV} = \int_t (\vec E \frac{\partial \vec D}{\partial t} + \vec H \frac{\partial \vec B}{\partial t}) dt = u$$

Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$du_{el} = \vec E d\vec D, \quad du_{magn} = \vec H d\vec B$

Lineare Medien:$\vec D = \varepsilon \vec E, \ \vec B = \mu \vec H$ ε und μ sind konstant

$$du_{el} = \vec E \varepsilon d\vec E = \frac{\varepsilon}{2} d\vec E^2 = \frac{1}{2} d(\vec E \vec D)$$
$$du_{ag} = \vec H \mu d\vec H = \frac{\mu}{2} d\vec H^2 = \frac{1}{2} d(\vec H \vec B)$$

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\vec E \vec D + \frac{1}{2}\vec H \vec B}$$

Lineare anisotrope Medien: ε und μ sind Matrizen

Dies gilt auch für lineare anisotrope Medien

Stichwortverzeichnis