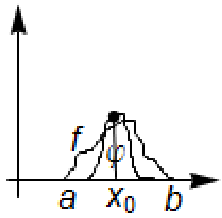
2 Hinweis zu Blatt2 zu Analysis 3



Zu 6.) $\forall \varphi \in C_c^\infty([a,b]) \int\limits_a^b f(\varphi dx) = 0 \overset{!}{\Rightarrow} f = 0$

O.E. $\exists x_0 > 0$ mit $f(x_0) > 0$

Es darf benutzt werden: $\exists \varphi \in C_c^\infty([a,b]), \varphi \neq 0$

m.a.W. $C_c^\infty([a,b]) \setminus \{0\} \neq \emptyset$

Zu 5.) Beispiel 1:

(1) $\quad \dot{x}(t) = e^t x(t)^2$

Die konstante Funktion 0 ist eine Lösung von (1). Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gibt es ein off. Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ von (1) mit $x(0) = x_0$. Nun gibt es $\tilde{I} \subseteq I$ offene Umgebung von 0 mit $x(t) \neq 0 \quad \forall t \in \tilde{I}$, da x C^1 und damit stetig ist. Es folgt für $t \in \tilde{I}$:

$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)^2} = e^t \Rightarrow \int\limits_0^s \frac{\dot{x}(t)}{x(t)^2} dt = \int\limits_0^s e^t dt = e^s - 1$

$\int\limits_0^s \frac{\dot{x}(t)}{x(t)^2} dt = \int\limits_0^s \frac{d}{dt}(-\frac{1}{x(t)}) dt = [-\frac{1}{x(t)}]_0^s = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(s)} \Rightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(s)} = e^s - 1 \Leftrightarrow x(s) = -\frac{1}{e^s - 1 - \frac{1}{x_0}}$

und $s \in \begin{cases} (-\infty, ln(1+\frac{1}{x_0})) & , x_0 < 0 \\ (ln(1+\frac{1}{x_0}), \infty) & , x_0 > 0 \end{cases}$

$e^s - 1 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow e^s = 1 + \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow s = ln(1 + \frac{1}{x_0})$

$x_0 > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_0} > 1 \Rightarrow ln(1 + \frac{1}{x_0}) > 0$

$x_0 < 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_0} < 1 \Rightarrow ln(1 + \frac{1}{x_0}) < 0$

Beispiel 2:

(2) $\quad \dot{x}(t) = 2x(t) + t$

Lsen zuerst $\dot{x}(t) = 2x(t)$:

$x_0 = 0 \Rightarrow 0$ ist gesuchte Lösung.

$x_0 > 0 \Rightarrow x(t) > 0$ für t nahe 0.

$\Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = 2 \Rightarrow \int\limits_0^s \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \int\limits_0^s 2dt = 2s$

$\int\limits_0^s \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \int\limits_0^s \frac{d}{dt}(ln(x(t))) dt = [ln(x(t))]_0^s = ln(x(s)) - ln(x_0) = ln(\frac{x(s)}{x_0}) = 2s$

$\Rightarrow x(s) = x_0 e^{2s}, \; s \in \mathbb{R}$ möglich

$x_0 < 0 \Rightarrow ... \Rightarrow \int\limits_0^s \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \int\limits_0^s \frac{d}{dt}(ln(|x(t)|)) dt = ln(\frac{|x(s)|}{|x_0|}) = ln(\frac{-x(s)}{x_0}) = ln(\frac{x(s)}{x_0})$

$\Rightarrow x(s) = x_0 e^{2s}, s \in \mathbb{R}$

Jetzt mit Variation der Konstanten x_0:

$x(t) = x_0(t) e^{2t}$ lst (2)

$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt}(x_0(t) e^{2t}) = \dot{x}_0(t) e^{2t} + 2x_0(t) e^{2t}$

$\Rightarrow (\dot{x}_0(t) + 2x_0(t)) e^{2t} = \dot{x}(t) = 2x(t) + t = 2x_0(t) e^{2t} + t$

$\Rightarrow \dot{x}_0(t) e^{2t} = t$

$\Rightarrow \dot{x}_0(t) = \frac{t}{e^{2t}} \Rightarrow \int\limits_0^s \dot{x}_0(t) dt = \int\limits_0^s \frac{t}{e^{2t}} dt$

$\int_0^s \dot{x}_0(t)dt = x_0(s) - x_0(0), \quad \int_0^s \frac{t}{e^{2t}}dt = \int_0^s te^{-2t}dt = [t\frac{e^{-2t}}{-2}]_0^s - \int_0^s \frac{e^{-2t}}{-2}dt$

$= -\frac{1}{2}se^{-2s} - \frac{1}{4}e^{-2s} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}e^{-2s}(2s+1) + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow x_0(s) = -\frac{1}{4}e^{-2s}(2s+1) + x_0(0) + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow x(t) = (-\frac{1}{4}e^{-2t}(2t+1) + x_0 + \frac{1}{4})e^{2t} = -\frac{1}{4}(2t+1) + (x_0 + \frac{1}{4})e^{2t}$

Probe: $x(t) = -\frac{1}{4}(2t+1) + (x_0 + \frac{1}{4})e^{2t}$

$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{2} + 2(x_0 + \frac{1}{4})e^{2t}$

$2x(t) + t = -\frac{1}{2}(2t+1) + 2(x_0 + \frac{1}{4})e^{2t} + t = -\frac{1}{2} + 2(x_0 + \frac{1}{4})e^{2t} = \dot{x}(t)$

$x_0 \stackrel{!}{=} x(0) = -\frac{1}{4} + (x_0 + \frac{1}{4}) = x_0 \Rightarrow$ Richtig

Zu 3.) Setze Lösung von $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$ in F ein und betrachte $F(x(t), y(t))$.

F heit erstes Integral zu einer GDG $\dot{x} = f(x) \Leftrightarrow$, wenn $[\dot{x} = f(x) \Rightarrow t \mapsto F(x(t))$ konstant$]$

$\dot{x} = -x, \dot{y} = 2y$

$(b) F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erstes Int. gleichm stetig. $\Rightarrow F$ konstant

$\Rightarrow \forall$ Lösungen (x, y) gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F(x(t), y(t)) = c \forall t \in \mathbb{R}$

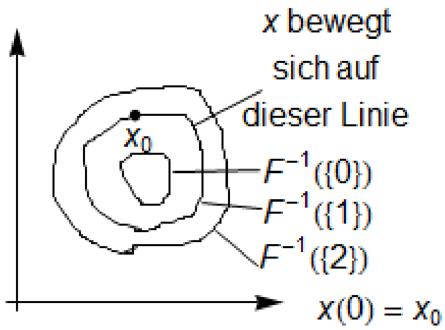
$|\underbrace{F(x_0, y_0)}_{=F(x(t),y(t))=c} - F(0)| \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists t \in \mathbb{R}$ mit

$|F(x(t), y(t)) - F(0, y(t))| < \varepsilon$ (nutze glm. Stetig. von F)

$|\underbrace{F(0, y(t))}_{=F(0,y(s))\forall s \in \mathbb{R}} - F(0)|$

$y(s) \stackrel{s \to -\infty}{\to} 0$

nochmal gl. Stetigkeit von F liefert für ein $s \in \mathbb{R} |F(0, y(s)) - F(0)| < \varepsilon$



$x(0) = x_0$
$F(x_0) = 1$

Zu 1.) $\bigcup_{i=1}^{6} S_i = \partial Q$

$z.B. S_3 : \psi : [0, 1] \times [0, \pi] \to S^3$

$\psi(y, z) := (0, y, z)$

$\partial_y \psi(y, z) = (0, 1, 0),\ \partial_z \psi(y, z) = (0, 0, 1),\ g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sqrt{det(g_{ij})} = 1, \quad \nu : S^3 \to \mathbb{R}^3,\ \nu(p) = (1, 0, 0),\ p \in S^3 \Rightarrow p_1 = 0$

$\int_{S^3} < v, \nu > ds = \int_0^1 \int_0^\pi v_1(\psi(y, z)) \cdot \sqrt{det(g_{ij})} dz dy = \int_0^1 \int_0^\pi z^2 \cdot 1 dz dy = \frac{\pi^3}{3}$

Zu 4.) Bsp: $\ddot{q} = -q^3$,

$p := \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = p \stackrel{!}{=} \partial_y F(q, p)$,

$\dot{p} = -q^3 \stackrel{!}{=} -\partial_x F(q, p)$

Z.B. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F(x, y) := \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}F(q, p) = \partial_x F(q, p)\dot{q} + \partial_y F(q, p)\dot{p}$

$= \partial_x F(q, p) \cdot p + \partial_y F(q, p)(-q^3)$

$= \partial_x F(q, p) \cdot \partial_y F(q, p) + \partial_y F(q, p) \cdot (-\partial_x F(q, p)) = 0$

$F^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$\Rightarrow 0$ stationär/Gleichgewicht

$F^{-1}(\{1\}) = \{(x, y) | \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} = 1\}$