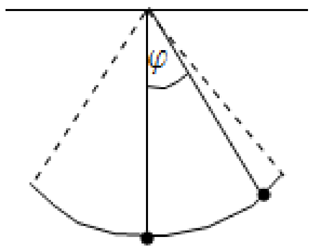
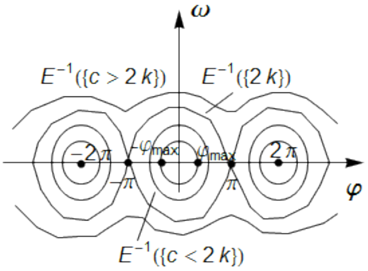
2 Besprechung zu Blatt2 zu Analysis 3

Beispiele zu ersten Integral



Erstes Integral allgemein: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
(P): $\dot{x}(t) = f(x(t))$ gew. DGL.
Erstes Integral: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall x$ ist Lösung von (P) gilt: $x : I \to \mathbb{R}^n, I \in \mathbb{R}$
$F(x(t)) = c \forall t \in I$



Immer erstes Integral: $F(x, y) = c$

$\ddot{\varphi} = -\kappa \sin(\varphi(t))$

$$(P) = \begin{cases} \dot{\varphi}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t) = -\kappa \sin(\varphi(t)) \end{cases}$$

Beh: $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ E(x, y) := \frac{y^2}{2} + \kappa(1 - \cos(x))$ ist ein erstes Integral von (P).
(Nach Frage: Wie kommt man auf E? siehe StudIp, $\ddot{q} = -q^3$)
Brauchen jetzt die Lösungen φ, ω, haben aber leider keine Zeit, um diese zu berechnen

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}, x(t) = x_0 e^{-t},\ y(t) = y_0 e^{2t}$$

Beh: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} F(x, y) := x^2 y$ ist ein erstes Integral von (P)
Bew: $F(x(t), y(t)) = (x_0 e^{-t})^2 (y_0 e^{2t}) = x_0^2 y_0$ konstant
$\Rightarrow$ F ist erstes Integral von (P)
Bem: F ist nicht konstant. Das ist kein Widerspruch zu 2b), da F nicht glm stetig.

2.3

a) $* \begin{cases} \dot{x} = -x \Rightarrow x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x(t) = x_0 \cdot e^{-t} \\ \dot{y} = 2y \Rightarrow y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y(t) = y_0 \cdot e^{2t} \end{cases}$

b) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein erstes Integral von (*) und gleichm stetig.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| < \varepsilon \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $||(x_1, y_1) - (x_2, y_2)||_2 < \delta$
Behauptung: Für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist $|F(x_0, y_0) - F(0, 0)| < \varepsilon$
Beweis: $|\underbrace{F(x_0, y_0)}_{=F(x(t),y(t))} - F(0, 0)| \underbrace{=}_{\forall x \in \mathbb{R}} |F(x(t), y(t)) - F(0, 0)|$
Gilt $x(t) = x_0 e^{-t} \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Es folgt die Existenz eines $t_1 \in \mathbb{R}$ mit $|x(t_1)| < \delta$.
Dann ist $||(x(t_1), y(t_1)) - (0, y(t_1))||_2 = |x(t_1)| < \delta$
$\Rightarrow |F(x(t_1), y(t_1)) - F(0, y(t_1))| < \varepsilon$
$\Rightarrow |F(x_0, y_0) - F(0, 0)| \leq \varepsilon + |F(0, y(t_1)) - F(0, 0)| (F(0, y(t_1)) = F(0, y(t)) \forall t \in \mathbb{R}$, da $(0, y)$ Lös. von (*) ist.
Da $y(t) = y_0 e^{2t} \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ gibt es ein $t_2 \in \mathbb{R}$ mit $|y(t_2)| < \delta$.
Es folgt wie eben $||(0, y(t_2) - (0, 0)||_2 < \delta$ und damit $|F(0, y(t_1)) - F(0, 0)| < \varepsilon$.
Insgesamt erhalten wir $|F(x_0, y_0) - F(0, 0)| < 2\varepsilon$ und damit $F(x_0, y_0) = F(0, 0)$

2.2

$\alpha = \arctan(\sqrt{\kappa})$

2.4

a) $\dot{x}(t) = \underbrace{\lambda}_{a(t)} x(t) + \underbrace{\sin(t)}_{h(t)}, x(0) = 0$

$\Rightarrow x(t) = e^{\lambda(t-t_0)}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{\lambda(t-s)h(s)ds}$

$x(t) = exp(\int\limits_{t_0}^{t} a(r)dr)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} exp(\int\limits_{s}^{t} a(r)dr)h(s)ds$

$\Rightarrow x(t) = 0e^{\lambda t} + \int\limits_{0}^{t} e^{\lambda(t-s)} \sin(s)ds = e^{\lambda t} \int\limits_{0}^{t} e^{-\lambda s} \sin(s)ds$

$\lambda \neq 0 : \int e^{-\lambda s} \sin(s)ds = [\frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda} \sin(s)] - \int \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda} \cos(s)ds$

$= [\frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda} \sin(s)] + [\frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda^2} \cos(s)] - \frac{1}{\lambda^2} \int e^{-\lambda s} \sin(s)ds$

$\underbrace{(1 + \frac{1}{\lambda^2})}_{\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2}} \int e^{-\lambda s} \sin(s)ds = \underbrace{[\frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda} \sin(s) + \frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda^2} \cos(s)]}_{-\frac{e^{-\lambda s}}{\lambda^2}(\lambda \sin(d) + \cos(s))}$

$\int e^{-\lambda s} \sin(s)ds = -\frac{1}{\lambda^2+1}[e^{-\lambda s}(\lambda \sin(s) + \cos(s))]$

$\Rightarrow x(t) = -e^{\lambda t}\frac{1}{\lambda^2+1}[e^{-\lambda s}(\lambda \sin(s) + \cos(s)]_0^t$

$= -e^{\lambda t}\frac{1}{\lambda^2+1}(e^{-\lambda t}(\lambda \sin(t) + \cos(t)) + \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2+1}$

$= -\frac{1}{\lambda^2+1}(\lambda \sin(t) + \cos(t)) + \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2+1}$

b) $\dot{x}(t) = sin(t)x(t), x(0) = 1$

Mit 3.4: $x(t) = exp(\int\limits_{0}^{t} \sin(r)dr)x_0 + \int\limits_{0}^{t} exp(\int\limits_{s}^{t} \sin(r)dr)0ds$

$= exp([-\cos(r)]_0^t) + 0 = exp(1 - \cos(t))$

Andere Möglichkeit (ohne Formel, nur rechnen):

$x(0) = 1 \Rightarrow r$ nahe 0 ist $x(r) \neq 0 \Rightarrow \frac{\dot{x}(r)}{x(r)} = \sin(r)$

$\Rightarrow \int\limits_{0}^{t} \underbrace{\frac{\dot{x}(r)}{x(r)}}_{\frac{d}{dr}ln(x(r))} dr = \int\limits_{0}^{t} \sin(r)dr$

$\Rightarrow \int\limits_{0}^{t} \frac{\dot{x}(r)}{x(r)}dr = ln(x(t)) - \underbrace{ln(x(0))}_{0} = ln(x(t))$

$= \int\limits_{0}^{t} \sin(r)dr = 1 - \cos(t)$

$\Rightarrow ln(x(t)) = 1 - \cos(t) \Rightarrow x(t) = exp(1 - \cos(t))$