2 Übungsblatt von Analysis 3 zum Mittwoch, den 10.11.2010

2.1

$$I_{x_0}?, I_{\pi(t, x_0)}?$$

2.2

$$\dot{x}(t) = ax(t) + h(t), \quad x(0) = c(0)$$

Allgemeine Lösung für $\dot{x}(t) = ax(t)$, $x(0) = c(0) \Rightarrow x(t) = c \cdot \exp(at)$

Wäre nun $x(t) = c(t)\exp(at)$ Lösung der DGL, dann gilt:

$$ax(t) + h(t) = \dot{x}(t) = ac(t)\exp(at) + \dot{c}(t)\exp(at)$$

$$\Rightarrow \dot{c}(t) = h(t)\exp(-at)$$

$$\text{Nach HDI: } c(t) = c(0) + \int_0^t \exp(-as)h(s)ds$$

$$\Rightarrow x(t) = c(t)\exp(at) = \exp(at) \left(c(0) + \int_0^t \exp(-as)h(s)ds \right)$$

2.3

$$\text{a) } \ddot{x} = (\dot{x})' = (\dot{r} \cos(\varphi) - r\dot{\varphi} \sin(\varphi))'$$

$$= \ddot{r} \cos(\varphi) - \dot{r}\dot{\varphi} \sin(\varphi) - \dot{r}\dot{\varphi} \sin(\varphi) - r\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - r\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi)$$

$$(1_1) : \ddot{x} + \gamma M \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} \cos(\varphi) - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin(\varphi) - r\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - r\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) + \frac{\gamma M}{r^2} \cos(\varphi) = 0$$

$$\ddot{y} = (\dot{y})' = (\dot{r} \sin(\varphi) + r\dot{\varphi} \cos(\varphi))'$$

$$= \ddot{r} \sin(\varphi) + \dot{r}\dot{\varphi} \cos(\varphi) + \dot{r}\dot{\varphi} \cos(\varphi) + r\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - r\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)$$

$$(1_2) : \ddot{y} + \gamma M \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} \sin(\varphi) + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos(\varphi) + r\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - r\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) + \frac{\gamma M}{r^2} \sin(\varphi) = 0$$

$$(1_1) \cos(\varphi) + (1_2) \sin(\varphi)$$

$$= \ddot{r} \cos^2(\varphi) + \ddot{r} \sin^2(\varphi) - r\dot{\varphi}^2 \cos^2(\varphi) - r\dot{\varphi}^2 \sin^2(\varphi) + \frac{\gamma M}{r^2} \cos^2(\varphi) + \frac{\gamma M}{r^2} \sin^2(\varphi)$$

$$= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{\gamma M}{r^2} = 0$$

$$- (1_1) \sin(\varphi) + (1_2) \cos(\varphi)$$

$$= 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2(\varphi) + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos^2(\varphi) + r\ddot{\varphi} \sin^2(\varphi) + r\ddot{\varphi} \cos^2(\varphi)$$

$$\cos^2(\varphi)$$

$$= 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$$

$$\text{b) Konstant} \Rightarrow \text{Ableitung} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\gamma M}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) =$$

$$\ddot{x} + \ddot{y} + \frac{\gamma M}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} \cdot (2x + 2y) =$$

$$\ddot{x} + \ddot{y} + \frac{\gamma M(x+y)}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} = \ddot{x} + \frac{\gamma M(x)}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} + \ddot{y} + \frac{\gamma M(y)}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} = (1_1) + (1_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 2\dot{r}r\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = (2\dot{r}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi})r = (2_2)r = 0r = 0$$

2.4

$$v_{sg} = v_2 + \frac{x}{l}v_1, \quad l = A + v_1 t, \quad x(0) = 0$$

sg: Schnecke gesamt, 2: Schnecke auf Seil, 1: Pferd gesamt

$$x_{sg}(t) = \int_0^t \left(\text{Exp} \left(\frac{v_1}{A + v_1 t} \right) dt \right) \cdot 0 + \int_0^t \text{Exp} \left(\int_s^t \frac{v_1}{A + v_1 r} dr \right) v_2 ds$$

Julian Bergmann

Florian Greiner

Timo Grosch

Julia Welsch

Dennis Getzkow

8. November 2010

1/2

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \text{Exp}(\text{Ln}(A + v_1 t) - \text{Ln}(A + v_1 s)) v_2 ds = \int_0^t (\text{Ln}(A + v_1 t) - \text{Ln}(A + v_1 s)) v_2 ds = \\
&= ([s \text{Ln}(A + v_1 t)]_0^t + [-\text{Ln}(A + v_1 s) + \frac{A \text{Ln}(A + v_1 S)}{v_1} + x \text{Ln}(A + v_1 S)]_0^t) v_2 \\
&= (\frac{A(\text{Ln}(A + tv_1) - \text{Ln}(A))}{v_1} + t) v_2 \\
v_{sg} &= (1 + \frac{A}{(A + tv_1)}) v_2 \sim (1 + \frac{1}{t}) v_2, \text{ also w\u00e4chst die Geschwindigkeit mit der Zeit, die} \\
&\text{des Pferdes bleibt aber konstant. Damit holt die Schnecke das Pferd ein.}
\end{aligned}$$

2.5

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= x(1 - x) \Leftrightarrow \frac{\dot{x}}{x} = 1 - x \Leftrightarrow \frac{\dot{x}}{x^2} = (-\frac{1}{x})' = \frac{1}{x} - 1 \\
\Rightarrow (\frac{1}{x})' + \frac{1}{x} &= 1 \Rightarrow (\frac{1}{x}) = a_0 e^{-t} + 1 \\
\Rightarrow x(t) &= \frac{1}{a_0 e^{-t} + 1} \\
x_0 &= \frac{1}{a_0 + 1} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{x_0} - 1 \\
\Rightarrow x(t) &= \frac{1}{(\frac{1}{x_0} - 1)e^{-t} + 1} = \frac{x_0}{(1 - x_0)e^{-t} + x_0}
\end{aligned}$$

Das Intervall schließt das t aus, für das der Nenner 0 wird, also

$$(1 - x_0)e^{-t_0} + x_0 = 0 \Rightarrow \frac{-x_0}{1 - x_0} = e^{-t_0} \Rightarrow t_0 = -\text{Ln}(\frac{-x_0}{1 - x_0})$$

Nähert man sich diesem t_0 , so gleicht das Verhalten dem von $\frac{1}{1 - e^{-t}}$, geht also von t von oben gegen t_0^+ gegen ∞ , für t von unten gegen t_0^- gegen $-\infty$.

2.6

Für $r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ wäre $\varphi(t) = 0$ eine Lösung.

Damit ergibt sich für $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{\gamma M}{r^2} = 0$ dann $\ddot{r} = -\frac{\gamma M}{r^2}$.

Damit schließt das Existenzintervall den Fall $r = 0$ aus, da dann $\ddot{r} \rightarrow \infty$

Da die Anfangsbedingung $r(0) = 1$, ist $\ddot{r}(0) = -\gamma M$, also negativ.

Da $\dot{r}(0) = 0$ negative Ableitung hat, wird es für steigende t geringer (negativ steigend).

Durch negative Ableitung $r'(t)$ mit $t > 0$ wird auch $r(t)$ mit steigendem t geringer (vom Betrag kleiner), wodurch $\ddot{r}(t)$ immer negativer wird, bis der Grenzfall $r = 0$ erreicht ist. Daher ist diese Lösung zu den genannten Anfangsbedingungen nur zeitlich nach oben beschränkt möglich.

Physikalisches Phänomen: Planet st\u00fctzt in anderen (grob) bzw. Raketenabsturz (genauer) bzw. senkrechter Wurf ab Umkehrpunkt (eher realistisch)