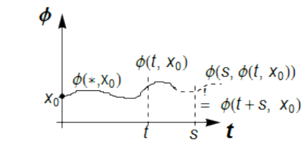
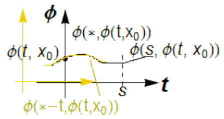
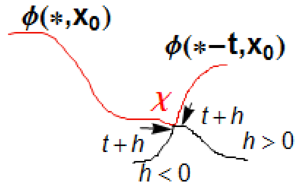
# 1 Besprechung zu Blatt3 zu Analysis 3




## Aufgabe 1

Sei $t \in I_{x_0}$
Z.z. $\forall s \in I_{\phi(t,x_0)}, s \geq 0$ gilt $s+t \in I_{x_0}$ und $\phi(s+t,x_0) = \phi(s,\phi(t,x_0))$
Beh. $\chi$ ist eine Lösung von $\dot{x} = f(x), \chi(0) = x_0$
$J_t = \{s \in I_{x_0} | s \geq t\} \cup \{s \in \mathbb{R} | s > t, s-t \in I_{\phi(t,x_0)}\}$
$\chi : J_t \to \mathbb{R}^n$

$$\chi(s) = \begin{cases} \phi(s,x_0) & , s \leq t \\ \phi(s-t,\phi(t,x_0)) & , s > t \end{cases}$$

Für $s \neq t,\ s \in J_t$ gil:
$s < t:\ \dot{\chi} = \dot{\phi}(s,x_0) = f(\phi(s,x_0)) = f(\chi(s))$
$s > t:\ \dot{\chi}(s) = \frac{d}{ds}(\phi(s-t,\phi(t,x_0))) = \dot{\phi}(s-t,\phi(t,x_0)) = f(\phi(s-t,\phi(t,x_0))) = f(\chi(s))$
Sei $h > 0$: $\frac{1}{h}(\chi(t+h) - \chi(t)) = \frac{1}{h}(\phi(\underbrace{t+h}_{>t(*)} - t, \phi(t,x_0)) - \phi(t,x_0))$
(*) da h klein ist, $t+h \in I_{\phi(t,x_0)}$
$= \frac{1}{h}(\phi(h,\phi(t,x_0)) - \phi(0,\phi(t,x_0))) \overset{0<h\to 0}{\longrightarrow} \dot{\phi}(0,\phi(t,x_0)) = f(\phi(0,\phi(t,x_0))) = f(\phi(t,x_0))$
Sei h¡0: $\frac{1}{h}(\chi(t+h) - \chi(t)) = \frac{1}{h}(\phi(t+h,x_0) - \phi(t,x_0)) \overset{0>h\to 0}{\longrightarrow} \dot{\phi}(t,x_0) = f(\phi(t,x_0))$
$\Rightarrow \chi$ ist in t differenzierbar mit $\dot{\chi}(t) = f(\phi(t,x_0)) = f(\chi(t))$.
Insgesamt $\chi C^1$ mit $\dot{\chi}(s) = f(\chi(s))\ \forall s \in J_t$
Dann ist $\chi$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x),\ x(0) = x_0$(Genauso $\phi(x_0)$)
Wegen der Eindeutigeit der Lösung gilt: $J_t = I_{x_0}$ und $\chi(s) = \phi(s,x_0) \forall x \in I_{x_0}$
Sei $s \in I_{\phi(t,x_0)},\ s \geq 0$
$\Rightarrow t+s \in J_t = I_{x_0}$
und $\phi(t+s,x_0) = \chi(t+s,x_0) = \phi(t+s-t,\phi(t,x_0)) = \phi(s,\phi(t,x_0))$ und $\phi(t+s,x_0) = \chi(t+s,x_0) = \phi(t+s-t,\phi(t,x_0)) = \phi(s,\phi(t,x_0))$

## Aufgabe 6

$$(P) \begin{cases} r(0) = 1,\ \dot{r}(0) = 0,\ \phi(0) = 0,\ \dot{\phi}(0) = 0 \\ \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \frac{\gamma M}{r^2} = 0, \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0 \end{cases}$$

Vermutung: $\phi(t) = 0$, da $\phi(0) = 0,\ \dot{\phi}(0) = 0$
Es gibt die Lösung $\ddot{r} + \frac{\gamma M}{r^2} = 0,\ r(0) = 1,\ \dot{r}(0) = 0$
$\Leftrightarrow \dot{r} = R,\ \dot{R} = \ddot{r} = -\frac{\gamma M}{r^2}$
2 Gleichungen 1. Ordnung (erste Ableitung) (System hat eine eindeutige Lösung)
Dieses r und $\phi = 0$ ist dann die Lösung des Systems (P)
Bisherige Überlegung liefert bis hierhin dass es reicht
$\dot{r} = -\frac{\gamma M}{r^2},\ r(0) = 1,\ \dot{r}(0) = 0$ zu betrachten.
$r(0) = 1,\ r\ C^2$ mit $\ddot{r} = -\frac{\gamma M}{r^2} \Rightarrow r(t) \neq 0 \forall t \in I\ (r : I \to \mathbb{R})$
$\Rightarrow r(t) > 0 \forall t \in I,\ \ddot{r} = \frac{-\gamma M}{r^2} < 0$
$\Rightarrow \dot{r}$ ist streng monoton fallend.
$\dot{r}(0) = 0 \Rightarrow \dot{r}(t) < 0 \forall t > 0, t \in I$
$\Rightarrow r$ streng monoton fallend in $I \cap (0,\infty) \Rightarrow$ in $I \cap [0,\infty)$, da r stetig
$r(0) = 1 \Rightarrow r(t) < 1 \forall t \in I \cap [0,\infty)$
$\Rightarrow \dot{r}(t) = -\frac{\gamma M}{r(t)^2} \leq -\gamma M \forall t \in I \cap [0,\infty)$
$\Rightarrow (da\ t \geq 0)\ \dot{r}(t) = \dot{r}(0) + \int_0^t \ddot{r}(s)ds = \int_0^t \ddot{r}(s)ds \geq -t\gamma M$
$\Rightarrow r(t) = r(0) + \int_0^t \dot{r}(s)ds = 1 + \int_0^t \dot{r}(s)ds \leq 1 - \gamma M \int_0^t sds = 1 - \frac{\gamma M}{2}t^2 > 0$
$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\gamma M}{2}t^2 \Rightarrow t < \sqrt{\frac{2}{\gamma M}}$