4 Besprechung zu Blatt 4 zu Analysis 3

Aufgabe 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N,\ G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D{+}N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$De_3 = 3e_3$
$Ne_3 = 0$
$Ne_4 = e_3$
$Ne_5 = e_4$
$(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (1 an n-ter Stelle)
λ EW festgewählt $\Rightarrow \exists (v_1, ..., v_k)$ Basis von $G_\lambda mit$
$Nv_i = v_{i-1}, i = 1, ..., k,\ v_0 = 0$
$v \in G_\lambda \Rightarrow \exists a_1, ..., a_k mit v = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i v_i$
$DNv = DN \sum a_i v_i = \sum a_i DNv_i = \sum a_i Dv_{i-1} = \sum a_i \lambda v_{i-1}$
$NDv = ND \sum a_i v_i = \sum a_i NDv_i = \sum a_i N\lambda v_i = \sum a_i \lambda N v_i = \sum \lambda a_i v_{i-1}$
$\Rightarrow \forall v \in G_\lambda$ gilt $DNV = NDV$
Sei $v \in \mathbb{C}^n$. Wegen $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{\substack{\lambda\ EW \\ von\ A}} G_\lambda$
gibt zu λ EW von A ein $v_\lambda \in G_\lambda$ mit $v = \sum\limits_{\lambda = EW\ v.\ A} v_\lambda$
$\Rightarrow DNv = \sum DNv_\lambda = \sum NDv_\lambda = NDv$

Aufgabe 4

$\dot{x} = A(t)x,\ A : J \to \mathbb{R}^{n \times n}$
FS: $\phi : I \to \mathbb{R}^{n\times n},\ t \mapsto \phi(t)$
$\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t)$
$\phi(0)$ bijektiv ($\Leftrightarrow det(\phi(0)) \neq 0$)
Ist $det(\phi(t_0)) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$, dann ist $det(\phi(t)) \neq 0 \forall t \in I$ (siehe Vorlesung)
Hat man ein FS ϕ, so ist die Lösung von $\dot{x}(t) = A(t)x(t),\ x(0) = x_0$
gegeben durch $I \to \mathbb{R}^n,\quad x(t) = \underbrace{\phi(t)}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{\phi^{-1}(0)}_{\mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{x_0}_{\mathbb{R}^{n\times n}} \in \mathbb{R}^n$
Für A konstant (z.B. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ gibt es Lösungsverfahren zum Finden eines FS

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \mapsto exp(tA)$ ist ein FS mit $exp(0 \cdot A) = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$
Für die Lösungen von $\dot{x} = Ax, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt dann $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ x(t) = exp(tA)x_0$
Ist ϕ ein FS mit $\phi(0) = E_n$, dann ist $\phi(t) = exp(tA)\ \forall t \in \mathbb{R}$
Ist ϕ ein FS, dann ist $exp(tA) = \phi(t)\phi(0)^{-1} \forall t \in \mathbb{R}$

Lösungsverfahren zum Berechnen eines FS:

Das Lösungsverf. geht im Fall, dass A konstant.
Ist A(t) abh. dann ist das Lösungsverfahren nicht mehr angebracht.
(siehe Blatt 5, Aufgabe 4)
Erstmal sei $n = 2$: Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
bestimme Eigenwerte von A (In $\mathbb{C}$ erhalten wir immer 2 EW)

1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ EW, gibt es 2 linear unabh. EV v_1, v_2
Dann heißt $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \varphi_1(t) := e^{\lambda_1 t} v_1$
Eigenfunktion zum EW λ_1 und $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \varphi(t) := e^{\lambda_2 t} v_2$
EF zu EW λ_2.
Es ist $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ ein FS.
Bsp.: Sei $A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}\right)$. Bestimmen EW: $(\lambda - 1)(\lambda - 2) + 0 = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$. Bestimme EV:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ 2v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} v_1 = v_1 + v_2 \\ v_2 = 2v_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_2 = 0$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV zu 1

$$\begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ 2v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2v_1 = v_1 + v_2 \Rightarrow v_1 = v_2$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV zu 2

$$\varphi_1 \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \varphi_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \begin{pmatrix} e^t e^{2t} \\ 0\, e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix},\ \phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 -1 \\ 0\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 v_2 \\ v_3 v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 v_3 + v_4 \\ v_2 \qquad v_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} v_2 = 0, v_1 = 1 \\ v_4 = 1, v_3 = -1 \end{matrix}\right.$$

$$exp(tA) = \phi(t)\phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^t e^{2t} \\ 0\, e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 -1 \\ 0\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t e^{2t} - e^t \\ 0 \quad e^{2t} \end{pmatrix}$$

2) λ_1, λ_2 sind koplex. D.h. es gibt $\rho \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit
$\lambda_1 = \rho + i\omega,\ \lambda_2 = \rho - i\omega. Sei v \in \mathbb{C}^n v EV zu \lambda_1$
Sei $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \varphi_1 := \Re(e^{\lambda_1 t})$
Sei $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \varphi_2 := \Im(e^{\lambda_1 t})$
Dann ist $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}1^{2\times 2}, \phi(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$
z.B. $A = \left(\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{array}\right)$
$(2 - \lambda)^2 + 9 = 0 \Rightarrow EW:\ 2 \pm i3$

$$\begin{pmatrix} (2+3i)v_1 \\ (2+3i)v_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 - 3v_2 \\ 3v_1 + 2v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2v_1 + 3iv_1 = 2v_1 - 3v_2 \Rightarrow v_2 = -iv_1$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ EV zu $2 + 3i$

Für $t \in \mathbb{R}$ gilt: $e^{(2+3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{2t} e^{3it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e12t(\cos(3t) + i\sin(3t)) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} + ie^{2t} \begin{pmatrix} \sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \varphi_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \varphi_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} \sin(3t) \\ -\cos(3t) \end{pmatrix}$$

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \phi(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(3t)\ \ \sin(3t) \\ \sin(3t) - \cos(3t) \end{pmatrix}$$

3) Erhalten wir einen EW λ und nur einen EV zu λ, d.h. sind v_1, v_2 EV zu λ, dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $v_1 = cv_2$ (Es ist 1 geom. Vielfachheit von λ, 2 algebraische)
Sei v EV zu λ. Dann gibt es $u \in \mathbb{R}^2$ mit $Au = \lambda u + v$.

Sei $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \varphi_1(t) = e^{\lambda t} v$
Sei $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \varphi_2(t) = e^{\lambda t}(u + tv)$
Dann ist $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = e^{\lambda t}(v, (u - tv))$ ein FS
Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow (2-\lambda)^2 + 0 = 0 \Rightarrow 2$ EW
$\begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + v_2 \\ 2v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2v_1 = 2v_1 + v_2 \Rightarrow v_2 = 0$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ EV zu 2, gibt kein l.u. weiteren EV
$\begin{pmatrix} 2u_1 + u_2 \\ 2u_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_1 + 1 \\ 2u_2 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow 2u1 + u_= 2u_1 + 1 \Rightarrow u_2 = 1,\ u_1$ egal.
Wir wähln $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. $u_1 = 0$
$\Rightarrow \varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \varphi_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \varphi_2(t) = e^{2t}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \phi_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist FS

Hinweise Blatt 6

Für $\dot{x} = Ax + h, A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x(0) = x_0$ (konstant), $h : J \to \mathbb{R}^n$

1) Finde ein FS ϕ
2) $exp(tA) = \phi(t)\phi(0)^{-1}$
3) Berechne $x(t) = exp(tA)x_0 + \int_0^t \underbrace{\underbrace{exp((t-s)A)}_{\in\mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{h(s)}_{\in\mathbb{R}^n}}_{\in\mathbb{R}^n} ds$ ist Lösung von $\dot{x}(t) = Ax(t) +$

   $+h(t),\ x(0) = x_0$ (siehe Vorl.)

Frage: gilt wie in Fall n=1... Antwort:Nein
Aufgabe 4: $I(t) = \int_0^t A(t)dr,\ \frac{d}{dt}exp(I(t) \neq \underbrace{\dot{I}(t)}_{A(t)} exp(I(t)$