

## 2 Besprechung zu Blatt2 zu Numerik 1

### Aufgabe 1

a) 1) Sei  $A$  pos definit

Dann ist, wenn  $f(x) = 0$

$\sqrt{x^t A x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , weil  $A$  pos. definit

2) Betrachte  $f(\lambda x) = \sqrt{\lambda x^t A \lambda x} = |\lambda| \sqrt{x^t A x} = |\lambda| f(x)$

3) Betrachte  $f(x+y) = \sqrt{(x+y)^t A (x+y)} = \sqrt{x^t A (x+y) + y^t A (x+y)} =$   
 $\sqrt{x^t A x + x^t A y + y^t A x + y^t A y} = \sqrt{x^t A x + 2x^t A y + y^t A y}$   
 $\leq \sqrt{x^t A x + y^t A y + 2\sqrt{x^t A x \cdot y^t A y}} = \sqrt{(\sqrt{x^t A x} + \sqrt{y^t A y})^2} = f(x) + f(y)$

Sei  $f$  Norm, dann folgt mit  $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underbrace{\sqrt{x^t A x}}_{>0} \Rightarrow x = 0$ , also ist  $A$  pos. def.

b) Sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\|\cdot\|$  Norm,

Dann ist  $\|A \cdot B\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 0$

Aber  $\underbrace{\|A\|}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\|B\|}_{\neq 0} \neq 0$

### Aufgabe 2

$$\|A\|_F = \sum_{ij} |a_{ij}|^{1/2}, \quad \sum_{ij} |a_{ij}|^{1/2} = (\text{Spur von } A^T A)^{1/2}$$

$$A = \begin{pmatrix} \dots a_1 \dots \\ \dots \\ \dots a_n \dots \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2 a_1 & \dots & a_n a_1 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & \dots & a_n a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{spur}(A^T A) = \sum_{j=1}^n a_j, \quad \sum_{j=1}^n a_j^2 = \text{spur}(A^T A)$$

Weiter  $\|\cdot\|_F$  unitär invariant, also  $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $U^T U = 1$ ,  $V^T V = 1$

$$\Rightarrow \|UAV\|_F = (\text{spur}((UAV)^T (UAV)))^{1/2}$$

$$(UAV)^T (UAV) = V^T A^T \underbrace{U^T U}_1 AV = V^T A^T AV$$

Z.z.  $\text{spur}(AB) \stackrel{!}{=} \text{spur}(BA)$ :

$$\text{Bew: } A = (a_{jk})_{j,k=1}^n, \quad B = (b_{jk})_{j,k=1}^n$$

$$AB = \left( \sum_{l=1}^n a_{jl} b_{lk} \right)_{j,k=1}^n$$

$$\text{Also } \text{spur}(AB) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{jl} b_{lj}$$

$$BA = \left( \sum_{l=1}^n b_{jl} a_{lk} \right)_{j,k=1}^n$$

$$\Rightarrow \text{spur}(BA) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{jl} a_{lj}$$

$$\text{spur}(V^T A^T AV) = \text{spur}(A \underbrace{V V^T}_1 A^T) = \text{spur}(A A^T)$$

$$\Rightarrow \|UAV\|_F = \sqrt{\text{spur}(V^T A^T AV)} = \sqrt{\text{spur}(A A^T)} = \sqrt{\text{spur}(A^T A)} = \|A\|_F$$

### Aufgabe 3

z.Z.:  $A \neq 0$  singularär  $k(A) = \infty$

$A_n, n \in \mathbb{R}$  eine Folge invertierbarer Matrizen, für die gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\| = 0$$

$$\text{Dann } \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(A) = \infty$$

Beweis:

$$\| \|1\| - \|A_n\| \| \leq \|A - A_n\| \rightarrow 0$$

$$\|A_n\| \rightarrow \|A\|$$

Damit für hinreichend großes  $N \in \mathbb{N}$

$$(*): \|A_n\| \geq \frac{1}{2}\|A\|$$

$$\text{Annahme: } \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(A) = 0$$

Also gilt für geeignetes  $M$  und eine Teilfolge  $\{A_{n_k}\}$

$$\|A_{n_k}\| \|A_{n_k}^{-1}\| \leq M$$

$$\text{Mit } (*) \text{ gilt } \|A_{n_k}^{-1}\| \leq \frac{2M}{\|A\|}$$

Da jede beschr. Folge eine konvergente Teilfolge enthält, gilt:

$$\exists \{n_{k_l}\} : A_{n_{k_l}} \rightarrow \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$A_{n_{k_l}} A_{n_{k_l}}^{-1} = 1$$

$$A \tilde{A} = 1$$

Widerspruch, da  $A$  nicht invertierbar, also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(A_n) = \infty$

### Aufgabe 4

Listing 1: Invertieren

```
1 function x=inverti(x)
2   for i=1:length(x) %Zeile
3     a=1/x(i,i); %Kehrwert Diag.el. zwischenspeichern
4     x(i,:)*=a; %Zeile durch Diagonalelement teilen
5     x(i,i)*=a; %Kehrw. urspr. Diagonalelement
6     x(i,1:i-1)*=-x(1:i-1,1:i-1); %0- Elemente links Diag.el
       .* bereits invertierter Matrixteil
7   end
8 end
9
10 %Verfahren basierend auf dem Gauß-Jordan-Algorithmus
11 %Die Matrix wird einer Einheitsmatrix gegenübergestellt und
    als Gleichungssystem aufgefasst
12 %Im Zuge der Umformung wird zunächst durch das
    Diagonalelement einer Zeile geteilt und dann zu
13 %den anderen Einträgen links davon die Zeile subtrahiert, in
    der dieses Element bereits aufgelöst
14 %wurde, also in einer unteren Dreiecksmatrix das Element j-j
    für einen Eintrag in der j- Spalte.
15 %Dies wird durchgeführt, bis an der entsprechenden Stelle
    eine 0 steht. Dadurch ergibt sich auf der linken
16 %Seite des Gleichungssystems erneut eine Einheitsmatrix,
    während auf der rechten Seite die Koeffizienten die
17 %erwünschte invertierte Matrix darstellen.
18
19 %Die Division kann man auch über die gesamte Zeile mittels
    Zeilenvektor *a=1/x(i,i) durchführen, wobei man das
20 %Diagonalelement erneut multiplizieren muss, da a ja dessen
    Kehrwert ist und 1/a *a *a=a=1/x(i,i)
```

```
21 %Da man für die Elemente links des Diagonalelementes jeweils  
    mit dieser Zahl gewichtete Elemente der  
22 %Zeile , in der man nach diesem Element bereits aufgelöst hat  
    , abziehen muss, kann man auch diese Elemente als  
23 %Vektor mit der Matrix der Einträge , die bereits invertiert  
    sind , multiplizieren und entsprechend von der  
24 %Einheitsmatrix an den Stellen (alle 0) abziehen , bzw.  
    einfach negieren  
25  
26 %Die Elemente rechts der Diagonalelemente sind anfangs 0 und  
    werden durch die Operatoren nur multiplikativ  
27 %verändert , also bleiben 0.  
28  
29 %Julian Bergmann
```