Analysis-3-Tutorium

Mitgeschrieben und geLATEXt von Julian Bergmann

Inhaltsverzeichnis

1 Tutorium vom 2.12.2010

1.1 Lösung bestimmen: $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) + \sin(\nu t)$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) + \sin(\nu t)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\omega^2 x(t) + \sin(\nu t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}^{\cdot} (t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\nu t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = exp((t-t_0)A) \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \int\limits_{t_0}^{t} exp((t-s)A) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\nu t) \end{pmatrix} ds$$

Reicht x(t) zu bestimmen

1.2 Existenzintervall über Trennung d. Variabeln

$$\text{AWP} \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{3} t^2 (x^2(t) - 1) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{3} t^2 (x^2(t) - 1) \quad | : (x^2(t) - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)-1} = \frac{1}{3} t^2 \Rightarrow \int\limits_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)-1} ds = \int\limits_0^t \frac{1}{3} s^2 ds = t^3$$

$$(\tfrac{1}{2} ln(x(s) - 1))' = \frac{0.5\dot{x}(s)}{x(s)-1}$$

$$(ln(x^2(t) - 1))' = \frac{1}{x^2(t)-1} \cdot 2x(t) \cdot \dot{x}(t)$$

$$(ln(f(t)))' = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow 1 = \underbrace{(A+B)}_{=0} x + \underbrace{(A-B)}_{=1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A+B & = 0 \\ A-B & = 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

$$\int\limits_0^t \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)-1} ds = \int\limits_0^t \frac{0.5\dot{x}(s)}{x(s)-1} + \frac{-0.5\dot{x}(s)}{x(s)+1} ds = \left[\frac{1}{2} ln\left(x\left(s\right)+1\right) - \frac{1}{2} ln\left(x\left(s\right)+1\right)\right]_0^t = \left[\frac{1}{2} ln\left(\frac{x(s)-1}{x(s)+1}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(ln\left(\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right) - ln\left(\frac{x(0)-1}{x(0)+1}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} ln\left(\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right) - \frac{1}{2} ln\left(\frac{x_0-1}{x_0+1}\right) = t^3 \quad | + \frac{1}{2} ln\left(\frac{x_0-1}{x_0+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} ln\left(\frac{x(t)-1}{x(t)+1}\right) = t^3 + ln\left(\frac{x_0-1}{x_0+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x(t)-1}{x(t)+1} = e^{2t^3 + ln\left(\frac{x_0-1}{x_0+1}\right)} = e^{2t^3} \cdot \frac{x_0-1}{x_0+1} \quad | \cdot (x\,(t)+1)$$

$$\Rightarrow x\,(t) - 1 = (x\,(t)+1)\, ce^{2t^3} = x\,(t)\, ce^{2t^3} + ce^{2t^3} \quad | - x\,(t)\, ce^{2t^3} + 1$$

$\Rightarrow \underbrace{x(t) - x(t)\,ce^{2t^3}}_{x(t)\left(1-ce^{2t^3}\right)} = ce^{2t^3} + 1$

$\Rightarrow x(t) = \frac{1+ce^{2t^3}}{1-ce^{2t^3}}$

Betrachten: $<> 0, \frac{x_0-1}{x_0+1} > 0 \quad | \cdot (x_0+1)$

Falls $x_0 + 1 > 0, x_0 > 1$ folgt $x_0 - 1 > 0, x_0 > 1$

Falls $x_0 + 1 < 0, x_0 < -1$ folgt $x_0 - 1 < 0, x_0 < 1$

$\Rightarrow <> 0 \Leftrightarrow x_0 > 1$ oder $x_0 < -1$

$x_0 \in (-1, 1)$ ist Ex. int. $J_{x_0} = \mathbb{R}$

Vermutung: Für $x_0 = 1$ ist $x(t) = 1$ Lsg. des AWP.

Beweis: $\dot{x}(t) = 0, \dot{x}(t) = 3t^2(x^2(t) - 1) = 3t^2(1^2 - 1) = 0$

$x_0 = 1$ analog $x(t) = -1 \Rightarrow x_0 \in [-1, 1]$ ist $J_{x_0} = \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$:

$1 - ce^{2\tilde{t}^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c} = e^{2\tilde{t}^3} \Leftrightarrow ln(\frac{1}{c}) = 2\tilde{t}^3 \Leftrightarrow -ln(c) = 2\tilde{t}^3 \Leftrightarrow \tilde{t} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}ln(c)}$

$\tilde{J}_{x_0} = (-\infty, \tilde{t})$ oder $\hat{J}_{x_0} = (\tilde{,}\infty)$

Richtiges Ex.int. ist wo $t_0 = 0 \in \tilde{J}_{x_0}$ oder $t_0 \in \hat{J}_{x_0}$

Betrachte ab $<> 1$ oder $c < 1$

$c = \frac{x_0-1}{x_0+1}$, falls $x_0 > 1$, dann $c < 1$, also $\tilde{t} > 0$, damit ist $J_{x_0} = (-\infty, \tilde{t})$,

falls $x_0 < -1$, dann $<> 1$, also $\tilde{t} < 0$, damit ist $J_{x_0} = (\tilde{t}, \infty)$

$c = \frac{-|x_0|-1}{-|x_0|+1} = \frac{1+|x_0|}{1-|x_0|}$

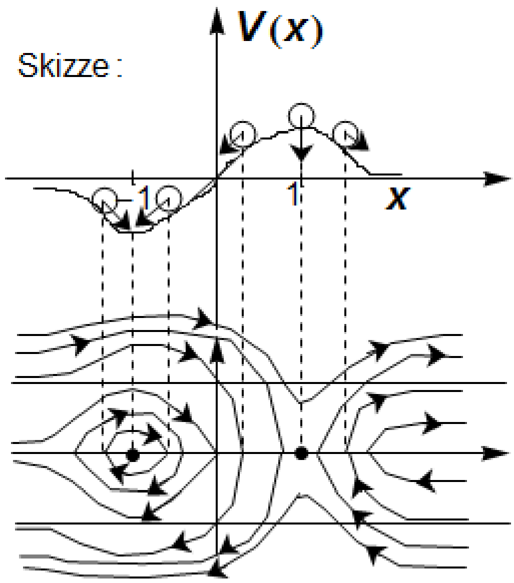
1.3 Phasenportrait

$\ddot{x} = -V'(x), V(x) = \frac{x}{x^2+1} = x\frac{1}{x^2+1}$

$V'(x) = \frac{x^+1-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\,\frac{1}{x}}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 0$$

Skizze:



2 Tutorium vom 9.12.2010

2.1 Übungsblatt

2.1.1 Aufgabe 1

c) $\dot{x}(t) = \frac{1}{t}x(t) + \frac{1}{t^2},\ x(1) = 3$

$(\dot{x}(t) = a(t)x(t) + h(t))$

$\Rightarrow x(t) = \underbrace{exp(\int_{t_0}^{t} a(r)dr)}_{U(t,t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{exp(\int_{s}^{t} a(s)ds))}_{U(t,s)} h(r)dr = \exp(\int_1^t \frac{1}{r}dr) \cdot$

$3 + \int_1^t exp(\int_s^t \frac{1}{r}dr)\frac{1}{s^2}ds$

$U(t,s) = exp(\int_s^t \frac{1}{r}dr) = exp([ln(r)]_s^t) = exp(ln(t) - ln(s)) = \frac{t}{s}$

$U(t,1) = t$

$\int_1^t U(t,s)\frac{1}{s^2} = \int_1^t \frac{t}{s^3}ds = [-\frac{t}{2s^2}]_1^t = -\frac{t}{2t^2} - \frac{t}{2} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t}$

$x(t) = 3t + \frac{t}{2} - \frac{1}{2t}$

kritisch bei 0, da dort nicht def.

$\Rightarrow (-\infty, 0), (0, \infty)$

$(0, \infty)$ ist Ex. int, da $t_0 = 1 \in (0, \infty)$

d) $\dot{x}(t) = x^2(t) + 3x(t) + 2,\ x(0) = 1$

$x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - 2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} =$

$-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -2$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

$\frac{\dot{x}(t)}{(x(t)+2)(x(t)+1)} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{\dot{x}(t)}{(x(s)+2)(x(s)+1)}ds = \int_0^t 1ds = t$

$\frac{A}{x+2}\frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{1}{(x+2)(x+1)} \Rightarrow A + B = 0,\ A + 2B = 1 \Rightarrow$

$B = 1, A = -1$

$\Rightarrow ... = \int_0^t \frac{-\dot{x}(s)}{x(s)+2} + \frac{\dot{x}(s)}{x(s)+1}ds$

$= -[ln(x(s)+2)+ln(x(s)+1)]_0^t = [ln(\frac{x(s)+1}{x(s)+2})]_0^t = ln(\frac{x(t)+1}{x(t)+2}) - ln(\frac{x(0)+1}{x(0)+2})$

$= ln(\frac{3}{2}\frac{x(t)+1}{x(t)+2})$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\frac{x(t)+1}{x(t)+2} = e^t \Rightarrow \frac{x(t)+1}{x(t)+2} = \frac{2}{3}e^t =: c$

$\Rightarrow x(t) + 1 = c(x(t) + 2) = cx(t) + 2c$

$\Rightarrow x(t) - cx(t) = 2c - 1$

$\Rightarrow x(t) = \frac{2c-1}{1-c} = \frac{2\frac{2}{3}e^t - 1}{1 - \frac{2}{3}e^t} = \frac{4e1t-3}{3-2e^t}$

nicht def. falls $3 - e^t = 0$

$\Leftrightarrow e^t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = ln(\frac{3}{2}) > 0$

$(-\infty, ln(\frac{3}{2}), (ln(\frac{3}{2}), \infty)$

$(-\infty, ln(\frac{3}{2})$ ist Ex. int, da $t_0 = 0 \in (-\infty, ln(\frac{3}{2})$

2.1.2 Aufgabe 2

a) Sei $D \in \mathbb{R}^n$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $f : I \times D \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Zeigen Sie für $c \in \mathbb{R}^n$ und dem AWP $(*) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = c \end{cases}$

die Beh. $\xi(t) = c$ ist Lsg. von (*) $\Leftrightarrow f(t,c) = 0 \forall t \in I$

„$\Rightarrow$“: Sei $\xi(t)$ Lsg von (*)

z.Z. $f(t,c) = 0 \forall t \in I$

Da ξ das AWP (*) erfüllt, gilt $0 = \dot{\xi}(t) = f(t, \xi(t)) = f(t,c) \forall t \in I$

„$\Leftarrow$“: Es gilt: $f(t,c) = 0 \forall t \in I$

z.Z. $\xi(t) = c$ ist Lsg von (*)

Sei $\xi(t) = c$, dann $\xi(0) = c$

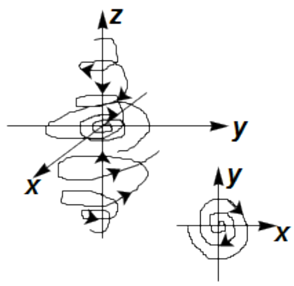
und $\dot{\xi}(t) = 0 = f(t,c) = f(t, \xi(t))$, also ist $\xi(t) = c$ Lsg. von (*)

b) Wenn lipschitzstetig dann eindeutig/existent, sonst nicht unbeding

c) autonome DGL sind auch nicht-autonome DGL $\Rightarrow$ JA

2.2 Aufgabe 3

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x}(t) = A_1 x(t)$



$exp(tA) = \phi(t)\phi(0)^{-1}$:

EW: $\lambda_3 = -1,\ v_3 = (0,0,1)$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

EW v. $\tilde{A}$: $0 = (1-\lambda)^2 + 4 \Rightarrow (1-\lambda) = \pm 2i \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

EV: $\underbrace{(\tilde{A} + (1+2i)I_2)}_{\begin{pmatrix} -2i & 2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}} v_{1,2} = 0 \Leftrightarrow -2iv_{1,2}^{(1)} - 2v_{1,2}^{(2)} = 0$

$\Rightarrow v_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \end{pmatrix}$

$\chi(t) e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \end{pmatrix} = e^t e^{2it} \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \end{pmatrix} = e^t(\cos(2t) + i\sin(2t)) \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \end{pmatrix}$

$$= e^t \begin{pmatrix} 2\cos(2t) + 2i\sin(2t) \\ -2i\cos(2t) + 2\sin(2t) \end{pmatrix} = e^t \left(\begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = \Re(\chi(t)) = e^t \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix}, \ \varphi_2(t) = \Im(\chi(t)) = e^t \begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

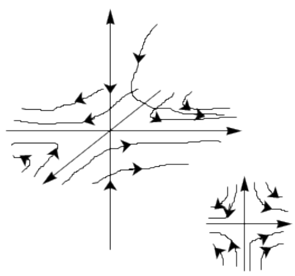
$$\Rightarrow \phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t\cos(2t) & 2e^t\sin(2t) & 0 \\ 2e^t\sin(2t) & -2e^t\cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi(t)\phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^t\cos(2t) & -e^t\sin(2t) & 0 \\ e^t\sin(2t) & e^t\cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$x(t) = exp(tA_1)x_0$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$



EW: 2,-2,-1

EV: $\tilde{A} - 2I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow -2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 : \ v = (1, 2, 0)$

$\tilde{A} + 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 : \ v = (1, -2, 0)$

$\phi_1 = e^{2t}(1, 2, 0), \quad \phi_2(t) = e^{-2t} = e^{-2t}(1, -2, 0), \quad \phi_3 = e^{-t}(0, 0, 1)$

$$\Rightarrow \phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-2t} & 0 \\ 2e^{2t} & -2e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Aufgabe 4

$$\dot{x}(t) = \underbrace{tx(t)^2 + 1}_{f(t,x(t))}, \quad x(0) = 0$$

$$\eta_0 = x_0 = 0$$

$$\eta_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \eta_n(s))ds = 0 + \int_0^t s\eta(s)^2 + 2ds$$

$$\eta_1(t) = \int_0^t s \cdot 0 + 1ds = \int_0^t 1ds = t$$

$$\eta_2(t) = \int_0^t s \cdot s^2 + 1ds = \int_0^t s^3 + 1ds = \frac{1}{4}t^4 + t$$

3 Tutorium vom 13.1.2011

3.1 Holomorphe Funktionen

Holomorph (komplex differenzierbar)?

1. Möglichkeit: $\lim\limits_{w \to z_0} \frac{f(z_0) - f(w)}{z_0 - w}$ ex.
2. Möglichkeit: $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (\Re(x + iy), \Im(x + iy))$

   f holomorph $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ reell dbar. und $J_{\tilde{f}}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Beispiel 1: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^3$

$$f(x+iy) = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2iy - 3xy^2 - iy^3 = \underbrace{x^3 - 3xy^2}_{\Re(f(x+iy)))} + \underbrace{(3x^2y - y^3)}_{\Im(f(x+iy))} i$$

$\Rightarrow \tilde{f}(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ ist reell dbar.

$$J_{\tilde{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha = 3x^2 - 3y^2, \quad \beta = 6xy$

Also f holomorph

Ergänzung: $f''(z) = 3z^2$

$$f'(x + iy) = 2(x + iy)^2 = 3(x^2 + 2xyi - y^2) = 3x^2 + 6xyi - y^2$$

$$f'(x + iy) = \alpha + i\beta = 3x^2 - 3y^2 + i(6xy)$$

Beispiel 2: $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^z$

Betrachte: $f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x - e^iy = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = \underbrace{e^x\cos(y)}_{\Re(f)} + i\underbrace{e^x\sin(y)}_{\Im(f)}$

$\Rightarrow \tilde{f}(x, y) = (e^x\cos(y), e^x\sin(y))$

$$J_{\tilde{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f_2$ ist holomorph mit $f'(x+iy) = \alpha + i\beta = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y) = e^{x+iy}$

Beispiel 3: $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto \underbrace{\Re(z)+\Im(z)}_{\in\Re}\in\Re(f)$

$\Rightarrow \tilde{f}(x,y)=(\Re(x+iy)+\Im(x+iy),0)=(x+y,0)$ ist reell diffbar., aber:

$$J_{\tilde{f}}(x,y)=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\alpha&-\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ f nicht holomorph

Beispiel 4: $f_5:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto\Re(z)$

$\Rightarrow \tilde{f}(x,y)=(x,0)$

$$\Rightarrow J_{\tilde{f}_5}(x,y)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f_5$ nicht holomorph

Beispiel 5: $f_6:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto z$

$$\lim_{w\to z_0}\frac{f_6(z_0)-f_6(w)}{z_0-w}=\lim_{w\to z_0}\frac{z_0-w}{z_0-w}=1$$

$\Rightarrow f_6$ holomorph!

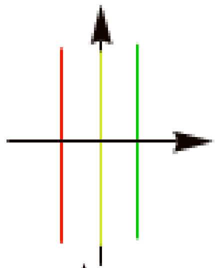
$f_5|_{\mathbb{R}}(x+i0)=\Re(x+i0)=x$

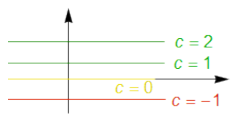
$f_5|_{\mathbb{R}}=id_{\mathbb{R}}=f_6|_{\mathbb{R}}$

Beispiel 6: $f_7:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto\frac{1}{z}$

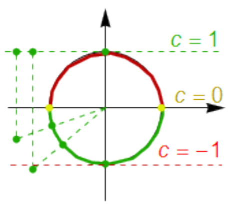
$$\lim_{w\to z_0}\frac{\frac{1}{z_0}-\frac{1}{w}}{z_0-w}=\lim_{w\to z_0}\frac{\frac{w-z_0}{wz_0}}{z_0-w}=\lim_{w\to z_0}\frac{-1}{z_0w}=\frac{-1}{z_0^2}$$

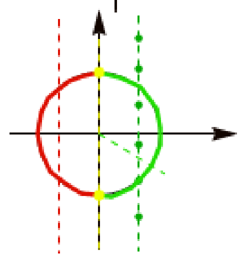
$\Rightarrow f_7$ holomorph





$\{x+iy|x\in\mathbb{R},y=c\}$
$\{x+iy|x=c,y\in\mathbb{R}\}$



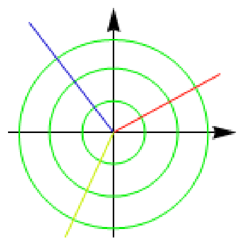


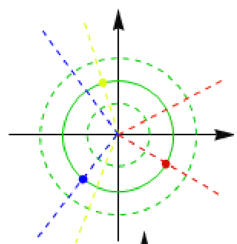
$z\mapsto\frac{\overline{z}}{|z|}$

Betrachte „Verhalten er Fkt.“

$\overline{z}\sim$ Spiegelung an der „Realteil-Achse“

$\frac{1}{|z|}\sim$ Projektion auf den Einheitskreis



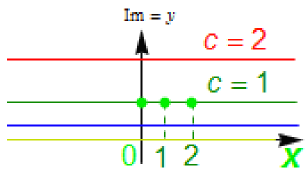


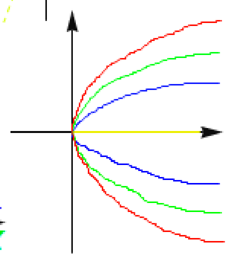
$\{re^{i\varphi}|r=c,\varphi\in[0,2\pi)\}$

$\{re^{i\varphi}|r\in\mathbb{R},\varphi=c\}$

$z\mapsto\Re(z)z$

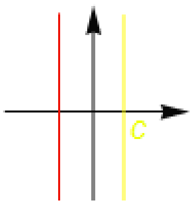
$x+iy\mapsto\Re(x+iy)(x+iy)=x(x+iy)=x^2+ixy$

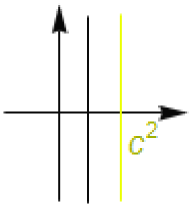


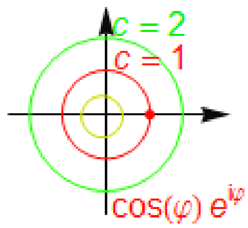


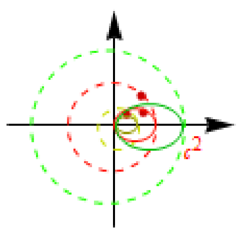
$\{x+iy|x\in\mathbb{R},y=c=1\}$

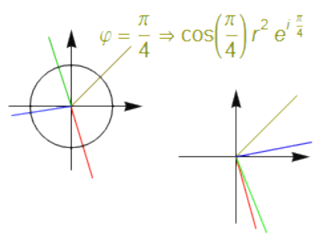
$re^{i\varphi}=r\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\mapsto x\cos(\varphi)re^{i\varphi}=\cos(\varphi)r^2e^{i\varphi}$





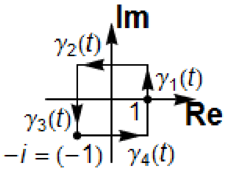






4 Tutorium vom 13.1.2011

4.1 Integrale, Homotopie



Berechne $\int\limits_\gamma \overline{z}dz$:

γ_1 Kurve umläuft das Rechteck $[-1,1]\times[-1,1]$ im Gegenuhrzeigersinn

$$\gamma_1(t) = 1 - i + 2it = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} t$$

$$\gamma_2(t) = i\gamma_1(t) = i - i^2 + 2i^2t = 1 + i - 2t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} t$$

$$\gamma_3(t) = i^2\gamma_1(t) = -\gamma_1(t) = -1 + i - 2it$$

$$\gamma_4(t) = i^3\gamma_1(t) = -i\gamma_1(t) = -1 - i + 2t$$

$\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & , t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) & , t \in [1,2] \\ \gamma_3(t) & , t \in [2,3] \\ \gamma_4(t) & , t \in [3,4] \end{cases}, \quad \gamma : [0,4] \to \mathbb{C}$$

$$\int\limits_\gamma \overline{z}dz = \int\limits_{\gamma_1} \overline{z}dz + \int\limits_{\gamma_2} \overline{z}dz + \int\limits_{\gamma_3} \overline{z}dz + \int\limits_{\gamma_4} \overline{z}dz$$

$$\int\limits_{\gamma_1} \overline{z}dz = \int\limits_\gamma \overline{\gamma_1(t)}\dot\gamma_1(t)dt$$

$$= \int\limits_0^1 \underbrace{\overline{(1 - i + 2it)}}_{1+i(2t-1)}(2i)dt = \int\limits_0^1 1 - i(2t-1)\cdot 2idt$$

$$= \int\limits_0^1 \underbrace{2}_{\Im} i + \underbrace{2(2t-1)dt}_{\Re} = \int\limits_0^1 4t - 2dt + i\int\limits_0^1 2dt$$

$$= [2t^2 - 2t]_0^1 + i[2t]_0^1 = 0 + 2i = 2i$$

$$\int\limits_{\gamma_2} \overline{z}dz = \int\limits_0^1 \overline{\gamma_2(t)}\dot\gamma_2(t)dt$$

Wissen: $\gamma_2(t) = i\gamma_1(t) \Rightarrow \dot\gamma_2(t) = i\dot\gamma_1(t)$

$$\Rightarrow ... = \int\limits_0^1 \overline{i\gamma_1(t)}i\dot\gamma_1(t)dt$$

$$= \int\limits_0^1 \overline{i}\,\overline{\gamma_1(t)}i\dot\gamma_1(t)dt = \int\limits_0^1 \overline{\gamma_1(t)}\dot\gamma_1(t)dt = 2i \int\limits_{\gamma_3} \overline{z}dz = \int\limits_0^1 \overline{\gamma_3(t)}\dot\gamma_3(t)dt$$

$$= \int\limits_0^1 \overline{(-1)\gamma_1(t)}(-1)\dot\gamma_1(t)dt = \int\limits_0^1 \overline{(-1)\gamma_1(t)}(-1)\dot\gamma_1(t)$$

$$= \int\limits_0^1 \overline{\gamma_1(t)}\dot\gamma_1(t)dt = 2i$$

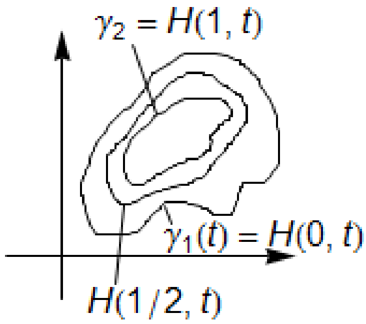
$$\int\limits_{\gamma_4} \overline{z}dz = \int\limits_0^1 \overline{-i}\,\overline{\gamma_1(t)}(-i)\dot\gamma_1(t) = 2i$$

$$\Rightarrow \int\limits_\gamma \overline{z}dz = 2i + 2i + 2i + 2i = 8i$$

$\tilde{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{it},\quad$ Berechne $\int\limits_{\tilde{\gamma}} \overline{z} dz$

$\Rightarrow \int\limits_{\tilde{\gamma}} \overline{z} dz = \int\limits_{0}^{2\pi} \overline{\tilde{\gamma}(t)} \tilde{\gamma}(t) dt$

$= \int\limits_{0}^{2\pi} \overline{e^{it}} i e^{it} dt = \int\limits_{0}^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = \int\limits_{0}^{2\pi} i dt = i \int\limits_{0}^{2\pi} 1 dt = 2\pi i$



Falls $\in O(U)$ und γ_1, γ_2 homotop

Dann gilt: $\int\limits_{\gamma_1} f(z) dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z) dz$

$\gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$

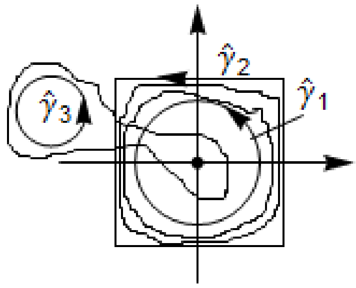
$\gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$

gibt es $H : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ stetig

$H(0, t) = \gamma_1(t)$

$H(1, t) = \gamma_2(t)$

$H(s, 0) = H(s, 1)$ falls γ_1, γ_2 geschlossene Kurve



Beispiel: $f : U \to \mathbb{C}(z \mapsto \frac{1}{z}, U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\hat{\gamma}_1 \approx \hat{\gamma}_2$

$\hat{\gamma}_1$ ist nicht zu γ_3 homotop

$H(s, t) = (1 - s)\gamma(t) + s\tilde{\gamma}(t)$

$H(0, t) = (1 - 0)\gamma(t) + 0\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$

$H(1, t) = (1 - 1)\gamma(t) + 1\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(t)$

$H(s, 0) = (1 - s)\gamma(0) + s\tilde{\gamma}(0) = (1 - s)\gamma(1) + s\tilde{\gamma}(1) = H(s, 1)$

γ und $\tilde{\gamma}$ homotop in U:

$|H(s, t)| = |(1 - s)\gamma(t) + s\tilde{\gamma}(t)| \leq |1 - s| \cdot |\gamma(t)| + |s||\tilde{\gamma}(t)|$

etc...

Cauchy Intergralsatz:

Falls $f \in O(U)$ und γ nullhomotope Kurve

Dann $\int\limits_{\gamma} f(z) dz = 0$

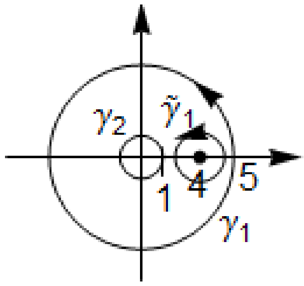
γ nullhomotop $\Leftrightarrow \gamma$ homotop zur konstanten Kurve

(etwa $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto z_0$)

Bemerkung:

Für $f \in O(\mathbb{C})$ gilt für alle geschl. Kurven von γ, dass $\int\limits_{\gamma} f(z) dz = 0$

4.2 Beispiel zu Homotopiesatz



$$\gamma_1(t) = 5e^{2\pi it}$$

$$\gamma_2(t) = e^{2\pi it}$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-4}dz = \int_{\tilde{\gamma}_1} \frac{1}{z-4}dz = \int_0^1 \frac{1}{\cancel{4}+\cancel{e^{2\pi it}}-\cancel{4}} + \cancel{2\pi i e^{2\pi it}} dz$$

$$= i\pi \int_0^1 1dt = 2\pi i$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-4} = \int_0^1 \frac{1}{5e^{2\pi it}-4} 2\pi i e^{2\pi it} dt$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z-4}dt = 0 \text{ (da } \gamma_2 \text{ nullhomotop in } \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Sei $f \in O(U)$ und es ex. die Stammfkt. $F \in O(U)$ mit $F' = f$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$

Dann $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(0)) - F(\gamma(1))$

5 Tutorium vom 27.1.2011

5.1 Singularitäten

Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph

1) hebbare Sgt.	$\Rightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z)$ ex.	Hauptteil der Laurententw$\|_a = 0$
2) Pol der Ordnung k	$\Rightarrow \lim\limits_{z\to a} (z-a)^k f(z)$ ex.	Hauptteil der Laurententw$\|_a$ ist endl. Summe
3) wesentliche Sgt.	$\Rightarrow$ sonst	Hauptteil der Laurententw$\|_a$ hat ∞ viele Koeff.

zu 1) $f(z) = \frac{z}{\sin(z)}$ hat hebb. Sgt. bei z=0

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots)}$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{\cancel{z}}{\cancel{z}(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots} = 1$$

zu 2) $f(z) = \frac{1}{z^2+1-\cos(z)}$ singulär bei z=0, Pol d. Ordnung 2

$$\lim_{z\to 0} z^k \frac{1}{z^2+1-\cos(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{z^k}{z^2+1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots)} = \lim_{z\to 0} \frac{z^k}{z^2\cancel{+1-1}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\ldots)}$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{z^k}{\frac{3}{2}z^2 - fracz^4 4! + \ldots)} = \lim_{z\to 0} \frac{z^k}{z^2(\frac{3}{2} - fracz^2 4! + \ldots)}$$

mit k=2: ... $= \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\frac{3}{2} - fracz^2 4! + \ldots} = \frac{3}{2}$

noch zu 2) $(T_\pi \sin)(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^{(k)}(\pi)}{k!}(z-\pi)^k, \quad \sin^{(k)}(\pi) = \begin{cases} \sin(\pi) = 0 & k = 4n \\ \cos(\pi) = -1 & k = 4n+1 \\ -\sin(\pi)0 & k = 4n+2 \\ -\cos(\pi) = 1 & k = 4n+3 \end{cases}$

$$\Rightarrow (T_\pi \sin)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-\pi)^{2k+1}$$

Beh.: $f(z) = \frac{z}{\sin(z)}$ hat Pole der Ordn. 1 bei $\overline{k}\pi,\ \overline{k} \in \mathbb{Z}$

$(T_{\overline{k}\pi} \sin)(z) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+\overline{k}+1}}{(2\overline{k}+1)!}(z-\overline{k}\pi)^{2l+1}$

$\lim\limits_{z\to\overline{k}\pi} \frac{z(z-\overline{k}\pi)^1}{(-1)^{\overline{k}+1}(z-\overline{k}\pi)+(-1)^{\overline{k}+2}\frac{(z-\overline{k}\pi)^3}{3!}+\ldots} = \lim\limits_{z\to\overline{k}\pi} \frac{z\cancel{(z-\overline{k}\pi)}}{\cancel{(z-\overline{k}\pi)}((-1)^{\overline{k}+1}+(-1)^{\overline{k}+2}\frac{(z-\overline{k}\pi)^2}{3!})}$

$= (-1)^{\overline{k}-1}\overline{k}\pi < \infty$

zu 3) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, singulär bei z=0

$e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}z^k \Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}z^{-k} \lim\limits_{z\to 0} z^k exp(\frac{1}{z}) =$

$\lim\limits_{z\to 0} z^k(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \ldots)$

$= \lim\limits_{z\to 0} z^k - z^{k-1} + \frac{1}{2}z^{k-2} - \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!}z^{k-k} + (-1)^{k+1}\frac{1}{(k+1)!}\frac{1}{z} + \ldots)$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \lim\limits_{z\to 0} z^k exp(\frac{1}{z})$ ex. nicht

$\Rightarrow f$ hat bei z=0 eine wesentl. Sgt.

$f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ Sgt. falls $\sin(\frac{1}{z}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = k\pi \Leftrightarrow z = \frac{1}{k\pi},\quad z_n = \frac{1}{n\pi}$

$P = \{\frac{1}{n\pi} | n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$ hat HP bei $z = 0$ $\Rightarrow$ bei z=0 Sgt. aber nicht isoliert.

5.2 Laurententwicklung

$f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n, \quad$ (z_0 Entwicklungspunkt)

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{Nebenteil} + \underbrace{\overbrace{\sum_{n<0} c_n(z-z_0)^n}^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}}_{Hauptteil}$$

$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_o|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} \hat{=} \int\limits_{\gamma} \quad$ (mit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + \rho e^{2\pi i t}$)

Beispiele:

1) $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{z})^n}{n!} = \underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}}_{HT} + \underbrace{0}_{NT}$ (Bei Entw.pkt z=0)

2) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^3} + \cos(\frac{1}{z})z^2$, L Entw. bei z=0:

$f(z) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}}{z^3} + \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(\frac{1}{z})^{2k}\right) z^2$

$= \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)}{(2k+1)!}z^{2k+1} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{-2(k-1)}$

$= z^{-2} - \frac{1}{3!}z^0 + \frac{1}{5!}z^2 + \sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2(k-1)} + z^2 - \frac{1}{2!}z^0 + \frac{1}{4!}z^{-2} + suk = 3\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{-2(k-1)}$

$$= \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!}z^{-2k} + \frac{25}{24}z^{-2}}_{HT} - \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{121}{120}z^2 + \sum k = 2\infty \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+3)!}z^{2k}}_{NT}$$

$\Rightarrow$ f hat Sgt. bei z=0 , die wesentlich ist.

5.3 Trick: Cauchy-Integral-Formel

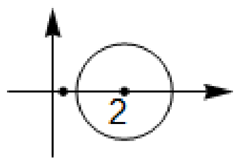
Es gilt:

$$2\pi i f(a) = \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad a \in B(z_0, \rho)$$

$$c_{n,z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Beispiele:

a) $$\oint\limits_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} dz = \oint\limits_{|z-2|=\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{f(z)} \frac{1}{(z-2)^2}$$



$$= \oint\limits_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{(z-2)^2} = 2\pi i c_{1,2}(f)$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-2|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz = -2\pi i$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-(-\underbrace{(z-2)}_{<1})} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-2)^k \text{ (geom. Reihe)}$$

b) $$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z} dz = 2\pi i \cos(0) = 2\pi i$$

Trainingsblatt zur Funktionentheorie

Erstellt von Tibor Kovacs am 03.02.2011

1. (a) Was besagt der Cauchysche Integralsatz?
   (b) Welche Aussage trifft der Riemannsche Hebbarkeitssatz?
   (c) Wann heißt eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph?

2. Bestimmen sie folgende Integrale

$$\text{(a)} \oint_{|z-1|=1} \frac{1}{1+z^2}dz \quad \text{(b)} \oint_{|z+i|=1} \frac{1}{1+z^2}dz \quad \text{(c)} \oint_{|z|=1} \frac{z+2}{z^2+3z}dz \quad \text{(d)} \oint_{|z-1|=2} \frac{\cos(z)}{z^3}dz$$

$$\text{(e)} \oint_{|z|=0.001} \frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z}\right)dz \quad \text{(f)} \oint_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right)z^3dz \quad \text{(g)} \oint_{|z+\sqrt{17}|=42} e^{z^2+z+1}dz$$

$$\text{(h)} \oint_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z^3}\right)z^3dz \quad \text{(i)} \oint_{|z|=|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}dz, \alpha \neq \beta \quad \text{(j)} \oint_{|z-i|=5} \frac{2z^2+4z-1}{z}dz$$

3. Bestimmen Sie die Residuen mit dem Entwicklungspunkt 0 der Funktionen
   (a) $f_1(z) = \exp(\frac{1}{z})z^5$
   (b) $f_2(z) = z^{-2}(\cos^2(z^2) + 2\sin^2(z^2) - 1)$
   (c) $f_3(z) = \cos^2(\frac{1}{z}) - \sin^2(\frac{1}{z})$
   (d) $f_4(z) = \frac{sin(z)}{z^5}$
   (e) $f_5(z) = \frac{1}{1-z}$

   Hinweis: Verwenden Sie zuerst die Additionstheoreme um (b) und (c) angenehmer zu bekommen. Für (c) könnte $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ hilfreich sein.

4. Bestimmen Sie die Laurententwicklung
   (a) im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ und $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ von der Funktion
   $$f(z) = \frac{z}{1+z^2}$$
   (b) im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z+1| < 1\}$ und $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ von der Funktion
   $$f(z) = \frac{1}{z+z^2}$$

5. Betrachen Sie die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = e^{6\pi it} + e^{2\pi it + \ln(0.01)}$. Bestimmen Sie mittels geeigneter Homotopie auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Umlaufszahl $\nu_\gamma(0)$.
   Hinweis: Durch eine kleine Umformung ist der eine Summand als „kleine Störung“ zu erkennen.

6. Betrachen Sie die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = e^{2\pi nit}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und f eine Funktion, die auf einer offenen Menge U mit $\overline{K} \subset U$ bis auf isolierte Singularitäten holomorph ist. Außerdem sei keine Singularität von f enthalten in ∂K. Verifizieren Sie hierfür die Gleichung:
   $$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \nu_\gamma(0) \sum_{\alpha \text{ Sing. } \in K} Res_\alpha f$$
   Hinweis: Die Funktion e^{it} ist 2π-periodisch.

6 Tutorium vom 3.2.2011

Trainingsblatt

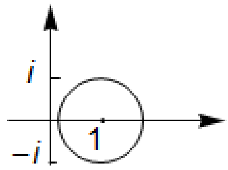
6.1 Aufgabe 2

Cauchy Integralform

$2\pi i f(a) = \oint\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{z-a} dz$

Laurent-Koeffizient

$c_{M,z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$



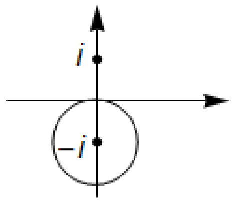
a) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$

(nach Cauchy-Integralsatz, da Kurve nullhomotop in $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$)

Integrant ist singulär bei $z = i, -i$

b) $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{1}{1+z^2} dz = \oint\limits_{|z+i|=1} \frac{1}{z+i} \underbrace{\frac{1}{z-i}}_{f(z)} dz = \oint\limits_{|z+i|=1} \frac{f(z)}{z+i} dz$

$= 2\pi i f(-i) = \cancel{2}\pi \cancel{i} \frac{1}{-\cancel{2i}} = -\pi$



Alternativ:

$\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i \sum\limits_{\alpha \in \{-i\}} Res_\alpha \frac{1}{1+z^2}$ (Residuen-Kalkül)

Bestimme Laurent-Entwicklung von $\frac{1}{1+z^2}$ am Entwicklungspunkt $-i$:

$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z+i} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{-2i+z+i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{-2i} \frac{1}{1-\frac{1}{2i}(z+i)} \frac{1}{z+i}$

geometrische Reihe:

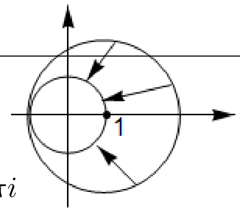
$\frac{1}{1-q} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k, \quad |q| < 1$

$\Rightarrow ... = \frac{1}{-2i} \frac{1}{1-\underbrace{(\frac{1}{2i}(z+i))}_{|.|=\frac{1}{2}|z+i|}} \frac{1}{z+i}$

$= -\frac{1}{2i} \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2i})^k (z+i)^k \right) \frac{1}{z+i} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{(2i)^{k+1}} (z+i)^{k-1}$

$= \underbrace{\underbrace{-\frac{1}{2i}}_{c_{-1,-i}(\frac{1}{1+z^2})}}_{c_{-1}} (z+i)^{-1} + \underbrace{(-\frac{1}{(2i)^2})}_{c_0}(z+i)^0 + \underbrace{(-\frac{1}{(2i)^3})}_{c_1}(z+i)^2 + ...$

$= \cancel{2}\pi \cancel{i}(-\frac{1}{\cancel{2i}})$



d) $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\cos(z)}{z^3} dz$ Integrant sing. bei $z = 0$

$= \oint\limits_{|z-0|=1} \frac{\cos(z)}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2\pi i} \oint\limits_{|z-0|=1|} \frac{\cos(z)}{(z-0)^{2+1}} dz = c_{2,0}(\cos(z)) \cdot 2\pi i$

(Homotopiesatz)

$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2} \frac{z^4}{4!} - ... = (z-0)^0 + 0(z-0)^1 + (-\frac{1}{2})(z-0)^2 + ...$

$\Rightarrow ... = -\frac{1}{2} 2\pi i = -\pi i$

Alternative: Residuen-Kalkül

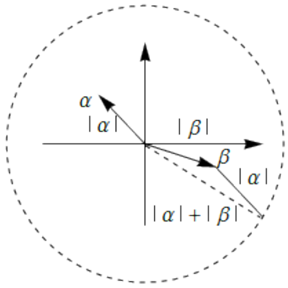
$... = 2\pi i \sum\limits_{\alpha \in \{0\}} Res_\alpha(\frac{\cos(\alpha)}{z^3}) = 2\pi i Res_\alpha(\frac{\cos(z)}{z^3})$

$\frac{\cos(z)}{z^3} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}}{z^3} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)1} z^{2k-3}$

Residuum bei $k = 1 \Rightarrow Res_0(\frac{\cos(z)}{z^3}) = \frac{(-1)^1}{(2 \cdot 1)!} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow ... == -\frac{1}{2} 2\pi i = -\pi i$

6.2 Beispiel 1



$\oint\limits_{|z|=|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} dz = 2\pi i \sum\limits_{\sigma \in \{\alpha,\beta\}} Res_\sigma \left(\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right)$

$Res_\alpha \left(\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-\alpha|=\rho} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz, \quad \text{mit } f(z) = \frac{1}{z-\beta}$

$= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - \beta}$

$Res_\beta \left(\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-\beta|=\rho} \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-\beta|=\rho} \frac{g(z)}{z-\beta}, \quad \text{mit } g(z) = \frac{1}{1-\alpha}$

$= \frac{1}{2\pi i} 2\pi i g(\beta) = \frac{1}{\beta - \alpha} = -\frac{1}{\alpha - \beta}$

6.3 Aufgabe 4

a) $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ Die Laurent-Entwicklung im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} | |z| > 1\}$

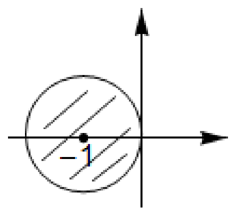
Wir wollen die Form $\frac{1}{1-q}$:

$\frac{z}{1+z^2} = \frac{z}{z^2(1+\frac{1}{z^2})} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\underbrace{(-\frac{1}{z^2})}_{|.| \frac{1}{|z|^2} < 1}}$ (geom. Reihe)

$= \frac{1}{z} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{z^2})^k = \frac{1}{z}(-1)^k z^{-2k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-2k-1}$

$\{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$

$\frac{z}{1+z^2} = \frac{z}{1-\underbrace{(-z^2)}_{|.|<1}} = z \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k+1}$



b) $f(z) = \frac{1}{z+z^2}, \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z+1| < 1\}$

$\frac{1}{z+z^2} = \frac{1}{z} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{-1+z+1} \frac{1}{z+1} = (-1) \frac{1}{1-\underbrace{(z+1)}_{|.|<1}} \frac{1}{z+1}$

$$= (-1)\frac{1}{z+1}\sum_{k=0}^{\infty}(z+k)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)(z+1)^{k-1}$$

7 Tiborium vom 7.2.2011

Trainingsblatt - 2. Teil

7.1 Formeln

Cauchy-Integralformel:

$$\oint\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

Laurent-Koeffizient:

$$c_{n,z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

Residuen-Kalkül:

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\alpha\ sing. \in Bild(\gamma)} Res_\alpha f$$

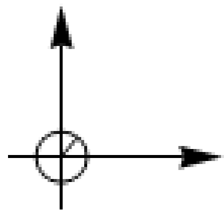
$$Res_\alpha \frac{f(z)}{(z-\alpha)^k} = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(k-1)!}$$

7.2 Aufgabe 2

e) $\oint\limits_{|z|=0,001} \frac{1}{z}\cos(\frac{1}{z})dz = \oint\limits_{|z|=0,001} \frac{\cos(\frac{1}{z})}{z}dz = \oint\limits_{|z|=0,001} \frac{\cos(\frac{1}{z})}{(z-0)^{0+1}}dz = c_{0,0}(\cos(\frac{1}{z}))2\pi i$

$\cos(\frac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}(\frac{1}{z})^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{-2k}$

$= \underbrace{\frac{1}{0!}}_{c_{0,0}} z^0 + \underbrace{\frac{(-1)}{2!}}_{c_{-2,0}} z^{-2} + \underbrace{\frac{1}{4!}}_{c_{-4,0}} z^{-4}$



$\Rightarrow c_{0,0}(\cos(\frac{1}{z}))2\pi i = 1 \cdot 2\pi i = 2\pi i$

Alternativ:

$\oint\limits_{|z|=0,001} \frac{1}{z}\cos(\frac{1}{z})dz = 2\pi i \cdot Res_0(\frac{1}{z}\cos(\frac{1}{z}))$

Rest analog: $\frac{1}{z}\cos(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}(\frac{1}{z})^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}z^{-2k-1}$

Suche k, so dass $-2k-1=-1 \Leftrightarrow k=0$

$\Rightarrow Res_0(\frac{1}{z}\cos(\frac{1}{z})) = (-1)^0\frac{1}{(2\cdot 0)!} = 1$

$\Rightarrow 2\pi i \cdot Res_0(\frac{1}{z}\cos(\frac{1}{z})) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$

f) $\oint\limits_{|z|=1} \sin(\frac{1}{z})z^3dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin(\frac{1}{z})}{(z-0)^{-4+1}}dz = c_{-4,0}(\sin(\frac{1}{z}))2\pi i$

$\sin(\frac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\frac{1}{z})^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{-2k-1} = \frac{1}{1}z^{-1} - \frac{1}{3!}z^{-3} + \frac{1}{5!}z^{-5} - ...$

$\Rightarrow c_{-4,0}(\sin(\frac{1}{z})) = 0$

$\Rightarrow c_{-4,0}(\sin(\frac{1}{z}))2\pi i = 0 \cdot 2\pi i = 0$

g) $\oint\limits_{|z+\sqrt{17}|=42} e^{z^2+z+1} dz = 0$

(Cauchy-Integralsatz: Da Integrant keine Sing. hat)

h) $\oint\limits_{|z|=1} exp(\frac{1}{z^3}) z^3 dz = 2\pi i Res_0(exp(\frac{1}{z^3})z^3)$ (Residuen-Kalkül)

$z^3 \cdot exp(\frac{1}{z^3}) = z^3 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\frac{1}{z^3})^k = z^3 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-3k}$

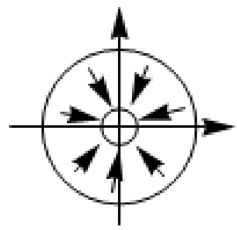
$= \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-3k+3} = \frac{1}{0!}z^3 + \frac{1}{1!}z^0 + \frac{1}{2!}z^{-3} + ...$

$\Rightarrow Res_0(exp(\frac{1}{z^3})z^3) = 0$

$\Rightarrow ... = 2\pi i \cdot 0 = 0$

j) $\oint\limits_{|z-2|=5} \frac{2z^2+4z-1}{z} dz = \oint\limits_{|z|=1} 2z + 4 - \frac{1}{z} dz$

Linearität d. Integrals: $... = \underbrace{\oint\limits_{|z|=1} 2z dz}_{=^* 0} + \underbrace{\oint\limits_{|z|=1} 4 dz}_{=^* 0} - \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$



* : 0, da hol. Stammfunktion ex.

$\Rightarrow ... = - \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = -2\pi i$ (Cauchy-Integral-Formel)

7.3 Aufgabe 3

a) $f_1(z) = exp(\frac{1}{z}) z^5 = z^5 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\frac{1}{z})^k = z^5 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k+5}$

$Res_0 f_1 = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$

b) $f_2(z) = z^{-2}(\cos^2(z^2) + \underbrace{2\sin^2(z^2)}_{\sin^2(z^2)+1-\cos^2(z^2)} - 1) = z^{-2}\sin^2(z^2)$

$\sin(z^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{4k+2} = z^2 - \frac{1}{3!}z^6$

$\Rightarrow ... = z^{-2}(z^2 - \frac{1}{3!}z^6 + ...)(z^2 - \frac{1}{3!}z^6 + ...)$

$= 2^{-2}(z^4 - \frac{1}{3}z^8 + \frac{1}{36}z^{12} + ...) = z^2 - \frac{1}{3}z^6 + \frac{1}{36}z^{10}$

$\Rightarrow Res_0(f_2) = 0$

c) $f_3(z) = \cos^2(\frac{1}{z}) - \sin^2(\frac{1}{z}) = \cos(\frac{1}{z})\cos(\frac{1}{z}) - \sin(\frac{1}{z})\sin(\frac{1}{z}) = \cos(\frac{1}{z} + \frac{1}{z})$

$= \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{(2k)!} z^{-2k}$

$\Rightarrow Res_0 f_3 = 0$

d) $f_4(z) = \frac{\sin(z)}{z^5}$

$Res_0 f_4 = Res_0(\frac{\sin(z)}{z^5}) = \frac{\sin^{(4)}(0)}{4!} = 0$

e) $f_5(z) = \frac{1}{z-1}$ O.E. $|z| < 1$

$\Rightarrow ... = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \Rightarrow Res_0 f_5 = 0$

7.4 Aufgabe 4

$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ Laurent-Etw. im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} | 0 < |z-1| < 1\}$

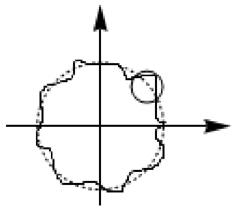
$f(z) = \frac{1}{z-1} \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{-1+z-1} = \frac{1}{z-1}(-1) \frac{1}{1-\underbrace{(z-1)}_{|.|<1}}$

$= \frac{-1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} -(z-1)^{k-1}$

Im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} || z| \geq 2\}$:

$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{z}}_{|.|<1}} \frac{1}{z} \frac{1}{1-\underbrace{\frac{2}{z}}_{|.|<1}} = \frac{1}{z^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{z})^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{2}{k})^k \right)$ etc.

7.5 Aufgabe 5



$\gamma(t) = e^{6\pi i t} + e^{2\pi i t + ln(0{,}01)} = e^{6\pi i t} + \underbrace{e^{ln(0{,}01)} e^{2\pi i t}}_{kleine\ Störung}$

$H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$

$H(s,t) = e^{6\pi i t} + (1-s) \cdot 0{,}01 e^{2\pi i t}$ ist Homotopie auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ von γ nach $\tilde{\gamma} = e^{6\pi i t}$

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$

$H(0,.) = \gamma,$

$H(1,.) = \tilde{\gamma},$

$H(s,0) = H(s,1),$

$|H(s,t) - 0| = |e^{6\pi i t} + (1-s) \cdot 0{,}01 e^{2\pi i t}| \geq \left| \underbrace{|e^{6\pi i t}|}_{=1} - |(1-s) \cdot 0{,}01 e^{2\pi i t}| \right|$

$= \left| 1 - |1-s| \cdot 0{,}01 \underbrace{|e^{2\pi i t}|}_{=1} \right| = |1 - (1-s) \cdot 0{,}01| \geq 0{,}99 > 0$

$\nu_\gamma(0) = \nu_\gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z} dz$

$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{\cancel{e^{6\pi i t}}} 2\pi i \cancel{e^{6\pi i t}} dt = \frac{6\pi i}{2\pi i} \int_0^1 1 dt = 3$

Trainingsblatt2 für Analysis III

Erstellt von Tibor Kovacs am 10.02.2011

1. (a) Gegeben sei die Kurve $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma(t) = (t^2+1)e^{2it}$. Bestimmen Sie mittels geeigneter Homotopie auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Umlaufszahl $\nu_\gamma(0)$.

   (b) Bestimmen Sie die Umlaufszahl $\nu_\gamma(0)$ von der Kurve $\gamma : [0, 2\pi(n+k)i] \to \mathbb{C}$ für $4n \neq 3k$ definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{4it} & t \in [0, 2\pi ni] \\ e^{-3it} & t \in [2\pi ni, 2\pi(n+k)i] \end{cases}$$

2. Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z+1)}$$

   im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$.
   Hinweis: Partialbruchzerlegung und Geometrische Reihe.

3. (a) Gegeben sei folgendes Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + y - 2x \\ \dot{y} &= xy - y + \lambda x \end{aligned}$$

      i. Untersuchen Sie die Stabilität der Nulllösung in Abhängigkeit von λ.
      ii. Bestimmen Sie für $\lambda = 0$ alle Gleichsgewichtslösungen und untersuchen Sie jeweils die Stabilität.

   (b) Nun sei ein lineares Differentialgleichungssystem $\dot{x} = f(x)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -2u - v \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $V(u, v) = \frac{7}{4}u^2 + \frac{1}{2}uv + \frac{3}{4}v^2$ eine strikte Liapolovfunktion für f ist.

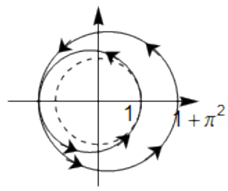
4. Bestimmen Sie folgende Residuen

   (a) Von der Funktion $f(z) = \frac{\sin(\cos(z))}{(z-3)^3}$ an der Stelle 3.
   (b) Von der Funktion $f(z) = \sin^2(\frac{3}{z})z^5$ an der Stelle 0.
   (c) Von der Funktion $f(z) = \frac{\exp(2z)}{z^{10}}$ an der Stelle 0.
   (d) Von der Funktion $f(z) = (\alpha z + \beta z^{-3})^n$ an der Stelle 0 für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \neq 0$.

8 Tutorium vom 10.2.2011

2. Trainingsblatt

8.1 Aufabe 1



a) Gegeben sei $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \underbrace{(t^2+1)}_{\in\mathbb{R},\ Streckfaktor} \underbrace{e^{2it}}_{Kreis}$

γ von $-\pi$ bis 0 betrachten

e-Term hat das Argument $-2\pi i$ bis 0

Streckfaktor hat Werte von $1+\pi^2$ bis 1

$\gamma_0 : [0,1] \to \mathbb{C}$

$\gamma_2(t) = e^{4\pi i t}$

passe Parameterbereich an γ an:

$\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C},\ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(2\pi t - \pi) = ((2\pi t - \pi)^2 + 1)e^{\overbrace{2i(2\pi t - \pi)}^{4\pi i t - \cancel{2\pi i}}}$

Lin. Homotopie: $H(s,t) = (1-s)\tilde{\gamma}(t) + s\gamma_0(t)$

z.z. $|H(s,t) - 0| > 0$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
|H(s,t)| = |(1-s)((2\pi t-\pi)^2+1)e^{4\pi i t} + se^{4\pi i t}| &= |((1-s)((2\pi t - \pi)^2+1)+s) \qquad e^{4\pi i t} \quad | \\
&= | \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad | \ | \qquad | \\
&= |(1-s)((2\pi t - \pi)^2 + 1) + s \qquad\qquad | = 1
\end{aligned}$$

$$= |(1-s)(2\pi t - \pi)^2 + (1-s) + s| = |1 + (1-s)(\underbrace{2\pi t - \pi}_{\geq 0})^2 \geq 1 > 0$$

$$\nu_\gamma(0) = \nu_{\gamma_2}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{e^{4\pi i t}} 4\pi i e^{4\pi i t} dt = \frac{4\pi i}{2\pi i} = 2$$

b) $\gamma : [0, 2\pi(n+k)i] \to \mathbb{C}, \quad 4\vec{\nabla} \neq 3k, \quad n,k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\nu_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi(n+k)} \frac{1}{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^{2\pi n} \frac{1}{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) dt + \int_{2\pi n}^{2\pi(n+k)} \frac{1}{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) dt \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^{2\pi n} \frac{1}{e^{4it}} 4ie^{4i} dt + \int_{2\pi n}^{2\pi(n+k)} \frac{1}{e^{-3it}} (-3i) e^{-3it} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} (\underbrace{4i(2\pi n - 0)}_{=8\pi i n} + (-3i)(\underbrace{2\pi(n+k) - 2\pi n}_{=2\pi k})) = \frac{8\pi i n - 6\pi i k}{2\pi i} = 4n - 3k$$

8.2 Aufgabe 3

a) i) $$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= x^2+y-2x\\ \dot{y} &= xy-y+\lambda x\end{aligned}\right\} = f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y-2x \\ xy-y+\lambda x \end{pmatrix} \Rightarrow Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 & 1 \\ y+\lambda & x+1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Df(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

Stab der Nulllsg.

$D_2 f(t,x) = Df(x)$ (falls f autonom)

Bestimme EW:

$$\chi(t) = \left| \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = (2+t)(1+t) - \lambda = t^2+3t+2-\lambda$$

$\Rightarrow t_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{3}{2})^2 - 2 + \lambda} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}$

$\Rightarrow$Falls $\lambda < -\frac{1}{4}$ dann sind EW komplex.

$\Rightarrow \Re(t_{1/2}) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow$ Lsg. stabil

Falls $\lambda > 2$, dann ist OE $t_1 < 0 < t_2 \Rightarrow$ Lsg. instabil

$\max\limits_{\rho \in \sigma(Df(x_0))} \Re(\rho) < 0 \Rightarrow$ stabil

ii) Falls $\lambda = 0 \Rightarrow f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y-2x \\ xy-y \end{pmatrix}$

Suche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ so dass

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y-2x \\ xy-y \end{pmatrix} = (0,0)$$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 2x + y \Leftrightarrow y = -x^2 + 2x \Rightarrow 0 = xy - y$

$$\Rightarrow 0?x(-x^2+2x) + x^2 - 2x = x\underbrace{(-x^2+2x+x-2)}_{-x^2+3x-2}$$

$= -x(x^2-3x+2) = -x(x-2)(x-1)$

$\Rightarrow$ Gleichgewichtslösungen:

1 : $x = 0, \quad y = 0$

2 : $x = 1, \quad y = 1$

3 : $x = 2, \quad y = 0$

Falls $(x,y) = (0,0)$ gilt nach (i) stabil, da $\lambda = 0 < 2$

Falls $(x,y) = (1,1) \Rightarrow Df(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ EW sind $\pm$ $\Rightarrow$ instabil

Falls $(x,y) = (2,0) \Rightarrow Df(2,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ EW sind 2,1 $\Rightarrow$ instabil

b) $\left.\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -2u - v \end{aligned}\right\} =: f(u,v)$

z.z. $V(u,v) = \frac{7}{4}u^2 + \frac{1}{2}uv + \frac{3}{4}v^2$

ist strikte Liapunov-Funktion

$< \nabla V(u,v), f(u,v) > \quad \leq 0$

$\wedge \qquad$ - - - " - - - $\qquad = 0 \; \Leftrightarrow f(u,v) = (0,0)$

$\nabla V(u,v) = (\frac{7}{2} \cdot 2u + \frac{1}{2}v, \frac{1}{2}u + \frac{3}{4} \cdot 2v)$

$=< \nabla V(u,v), f(u,v) >= v(\frac{7}{2}u + \frac{1}{2}v) + (-2u - v)(\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v)$

$= \frac{7}{2}uv + \frac{1}{2}v^2 - u^2 - 3uv - \frac{1}{2}uv - \frac{3}{2}v^2$

$= -u^2 - v^2 = -\underbrace{(u^2 + v^2)}_{\geq 0} \leq 0$

„=0" $\Leftrightarrow (u,v) = (0,0) \Leftrightarrow f(u,v) = (0,0)$

8.3 Beispiel aus Blatt 14

$\int\limits_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx \overset{*}{=} \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \sum\limits_{\substack{\alpha \; Sngt \\ \Im(\alpha)>0}} Res_\alpha(\frac{\cos(z)}{1+z^2})$

*: da Integrant y-Achsen-symmetrisch

Integrant ist singulär bei $\pm i$

$\Rightarrow ... = \pi i Res_i \frac{\cos(z)}{1+z^2} = \pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-i|=\rho} \frac{\cos(z)}{(z-i)(z+i)} dz$

(Cauchy-Integral-Formel) mit $f(z) = \frac{\cos(z)}{z+i}$

$... = \frac{1}{2} 2\pi i f(i) = \pi i \frac{\cos(i)}{2i} = \frac{\pi}{2} \cos(i) = \frac{\pi}{2e}$