1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 5 5.12.12

1.1 Aufgabe

1. Richtig. Wenn $Ax = \lambda x$, so folgt sofort, dass $(A - \mu I)x = (\lambda - \mu)x$.
2. Falsch. Z.B. ist 1 EW von I, -1 jedoch nicht.
3. Richtig. Multipl. $Ax = \lambda x$ mit $\frac{A^{-1}}{\lambda}$, so gilt $A^{-1}x = \lambda^{-1}x$
4. Falsch: z.B. sind beide EW von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gleich 0.
5. Richtig. ist A diagbar mit den EW λ, dann gibt es nicht-sing. Matrix X, so dass $A = X^{-1}(\lambda I)X$
   Weiter: $X^{-1}(\lambda I)X = \lambda X^{-1}X = \lambda I$ (Diagmatrix)

1.2 Aufgabe

a) Potenzmethode:

1. Schritt $y^{(0)} = z^{(0)}, folgt : z^{(1)} = Ay^{(0)} = (-99.700,\ 19.800,\ -20.100)^T$

2. Schritt $y^{(1)} = \frac{z^{(1)}}{\|z^{(1)}\|_\infty} = (-1.000000, 0.19860, -0.20160)^T$
$z^{(2)} = Ay^{(1)} = (0.19860, 0.13190, 0.20812)^T$

3. Schritt $y^{(2)} = \frac{z^{(2)}}{\|z^{(2)}\|_\infty} = (0.19860, 0.13190, 0.20812)^T$
$z^{(3)} = Ay^{(2)} = (-77.060, 15.405, -15.728)^T$

4. Schritt $y^{(3)} = \frac{z^{(3)}}{\|z^{(3)}\|_\infty} = (-1.00000, 0.199991, -0.20410)^T$
$z^{(4)} = Ay^{(3)} = (0.200050, 0.12980, 0.21060)^T$

Konvergiert nicht, da f.d. Quotientenregel gilt:

$$\begin{pmatrix} z_1^{(4)}/y_1^{(3)} \\ z_2^{(4)}/y_2^{(3)} \\ z_3^{(4)}/y_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.200050 \\ 0.64930 \\ -1.03187 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} z_1^{(4)}/z_1^{(3)} \\ z_2^{(4)}/z_2^{(3)} \\ z_3^{(4)}/z_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -.0.0026019 \\ 0.0084259 \\ -0.0133904 \end{pmatrix}$$

b) Spektralverschiebung von S=5:

$$B := A - SI = \begin{pmatrix} -10.7 & -61.1 & 32.9 \\ 0.8 & 6.9 & 7.1 \\ -1.1 & -11.8 & -12.2 \end{pmatrix}$$

1. Schritt $y^{(0)} = z^{(0)}, folgt : z^{(1)} = By^{(0)} = (-104.700, 14.800, -25.100)^T$

2. Schritt $y^{(1)} = \frac{z^{(1)}}{\|z^{(1)}\|_\infty} = (-1.00000, 0.14136, -0.23973)^T$
$z^{(2)} = By^{(1)} = (9.9503, -1.5267, 2.3567)^T$

3. Schritt $y^{(2)} = \frac{z^{(2)}}{\|z^{(2)}\|_\infty} = (1.00000, -0.15344, 0.23685)^T$
$z^{(3)} = By^{(2)} = (-9.1174, 1.4299, -2.1790)^T$

4. Schritt $y^{(3)} = \frac{z^{(3)}}{\|z^{(3)}\|_\infty} = (-1.00000, 0.15607, -0.23900)^T$
$z^{(4)} = By^{(3)} = (9.0273, -1.4200, 2.1742)^T$

Für die Quotienten gilt:
$$\begin{pmatrix} z_1^{(4)}/y_1^{(3)} \\ z_2^{(4)}/y_2^{(3)} \\ z_3^{(4)}/y_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.0273 \\ -9.0987 \\ -9.0971 \end{pmatrix}$$
bzw.
$$\begin{pmatrix} z_1^{(4)}/z_1^{(3)} \\ z_2^{(4)}/z_2^{(3)} \\ z_3^{(4)}/z_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.99012 \\ -0.99795 \\ -0.99777 \end{pmatrix}$$
Für die Näherung des betragsm.gröten EW μ von B gilt:
$$\mu = \frac{1}{3}[-9.0273 - 9.9.0987 - 9.0971] = -9.0744$$
Folgt für die Näherung des betragsm. größten EW λ von A:
$$\lambda = \mu + 5 = -9.0744 + 5 = -4.0744$$
Exakte EW von A lauten: $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 4$

1.3 Aufgabe

1. A strikt diagonaldominant, dann A nicht singulär ($\lambda = 0$ kein EW)

   Lemma v. Gershgorin

   $$EW \in K = \bigcup_{j=1}^{n} K_j = \bigcup_{j=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - ajj| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}} |a_{jk}| \underbrace{<}_{str.\ diagdom.} |a_{jj}|\}$$

   Also: $|z - a_{jj}| < |a_{jj}|$

   $\Rightarrow \lambda = 0$ kann kein EW sein!

2. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus z \notin \bigcup_{j=1}^{n} K_j : (A - zI)$ nichtsingulär

   Beweis:

   $(A - zI)$ strikt diagonaldominant, denn
   $$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}} |a_{jk} - 0| = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} |a_{jk}| < |z - A_{jj}| = |a_{jj} - z|$$
   Nach 1.: $(A - zI)$ nichtsingulär

3. Vorlesung: $\Lambda(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\ EW\ von\ A\} \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_j(A)$

   Also $\{\lambda_{min}, \lambda_{max}\} \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_j \quad \Rightarrow \quad arg \max_{\lambda\in\sigma(A)} \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_j$

1.4 Tipp Blatt 7

obere Hessenberg-Matrix:
$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

Alle Einträge unterhalb der unteren ersten Nebendiagonale sind 0.

1.5 Anmerkung

Polynominterpolation nach Lagrange

Das Interpol-polynom p_n nach Grad n ist mit $n+1$ Stützstellen $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ eindeutig bestimmt.
Man berechnet zunächst die Lagrangefunktionen $L_0(x), ..., L_n(x)$ mit

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad , \quad i = 0, ..., n$$

zu den geg. Stützstellen und bestimmt das Interpol-polynom durch

$$p_l(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \quad .$$

Vorteil: Bei festen x_i können zu verschiedenen y_i die jew. Interpol-polynom sehr einfach berechnet Werten.
Nachteil: Ändert sich dagegen nur ein x_i, dann müssen alle L_i neu berechnet werden.

EW gleichen Betrags

$\begin{pmatrix} -5.7 & -61.1 & -32.9 \\ 0.8 & 11.9 & 7.1 \\ -1.1 & 11.8 & -7.2 \end{pmatrix}$ und $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Potenzmethode liefert die Vektoren:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -99.7 \\ 19.8 \\ -20.1 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0.19109 \\ 0.12691 \\ 0.20026 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} -50.0678 \\ 10.131 \\ -10.343 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 0.19279 \\ 0.12481 \\ 0.20250 \end{pmatrix} \quad x_5 = \begin{pmatrix} -50.252 \\ 10.050 \\ -10.264 \end{pmatrix} \quad x_6 = \begin{pmatrix} 0.19289 \\ 0.12468 \\ 0.20646 \end{pmatrix}$$

Man beobachtet keine direkte Konvergenz, allerdings gilt:

$\frac{\|x_3\|_2}{\|x_5\|_2} \approx 1.0084$ sowie $\frac{\|x_4\|_2}{\|x_6\|_2} \approx 0.99966$

Lösung: es ex. EW gleichen Betrages, die abwechselnd in der Iteration auftauchen. Nach Skript liegt x_{k+2} in dem von x_{k+1} und x_k aufgespannten Unterraum, s.h. es gibt $a_k,\ b_k$, so dass

$$x_{k+2} = a_k x_k + b_k x_{k+1}$$

Berechne a_k und b_k durch zwei Komp. von $x_{k+2},\ x_{k+1},\ x_k \Rightarrow 2 \times 2$ LGS. Setze

$$A^2 x_k = \alpha x_k + \beta A x_k$$

Die EW λ_{n-1} und λ_n sind nun Lösungen der folgenden Gleichung:

$$\lambda^2 = \alpha + \beta\lambda$$

Beispiel x_6:

$$A^2 x_6 = \begin{pmatrix} 3.0864 \\ 1.9947 \\ 3.2424 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \alpha \begin{pmatrix} 0.19289 \\ 0.12468 \\ 0.20264 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -15.3839 \\ 3.0767 \\ -3.1423 \end{pmatrix} = \alpha x_6 + \beta A x_6$$

$$\begin{pmatrix} 3.0864 \\ 1.9947 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0.19289 \\ 0.12468 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -15.3839 \\ 3.0767 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3.0864 \\ 1.9947 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.19289 & -15.3839 \\ 0.12468 & 3.0767 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -0.0000015314 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungen von $\lambda^2 = 16$ sind ± 4

Analog für x_5: ... $\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -0.00048107 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}$