1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 6 12.12.12

1.1 Aufgabe

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & -3 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

$k_1 = |z-7| \leq 0.75$

$k_1 = |z+3| \leq 1.25$

$k_1 = |z-1.5| \leq 1.5$

$\lambda_1 \in K_2$

$$|\lambda - \lambda_1| \leq |\lambda - \lambda_i| \quad i = 2,3 \quad \lambda = -3A' = (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 10 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 4.5 \end{pmatrix} A' = LR$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/40 & 1 & 0 \\ 1/20 & -158 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 10 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -1/100 & 79/80 \\ 0 & 0 & 321/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow i) : x^{(0)} = y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$iii)\lambda \approx y^{(3)T} A y^{(3)} \approx -3.22$

1.2 Aufgabe

$$A = \begin{pmatrix} -5.7 & -61.1 & -32.9 \\ 0.8 & 11.9 & 7.1 \\ -1.1 & -11.8 & -7.2 \end{pmatrix}$$

Berechnung von w_1:

$$(A - \lambda I)w_1 = \begin{pmatrix} -9.7 & 61.1 & -32.9 \\ 0.8 & 7.9 & 7.1 \\ -1.1 & 11.8 & 11.2 \end{pmatrix} w_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -9.7 & 611 & -329 \\ 8 & 79 & 71 \\ -11 & -118 & -112 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -97 & -611 & -329 \\ 0 & 2775/97 & 4255/97 \\ 0 & -4725/97 & -7245/97 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -97 & -611 & -329 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 94 \\ -23 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Berechnen von s_1:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 23/94 & 1 & 0 \\ -15/94 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -23/94 & 1 & 0 \\ 15/94 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 A S_1^{-1} = ... = \begin{pmatrix} 4 & 61.1 & -33.9 \\ 0 & -61/10 & -19/20 \\ 0 & -41/10 & -39/20 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} -61/20 & -19/20 \\ -41/20 & -39/20 \end{pmatrix}$$

Berechnen des kleinsten EW von B durch Schätzung des EW durch Gershgorin-Kreise + Approximation durch Inverse-Iteration:

$$\left.\begin{array}{l} K_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 61/20| \leq 19/20\} \\ K_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 39/20| \leq 41/20\} \end{array}\right. \Rightarrow \text{Betragsm. kl. EW: } \lambda_2 \approx -39/20 = s$$

$$(BS - I) = \begin{pmatrix} -22/10 & -19/20 \\ 41/20 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechne $(B - SI)^{-1}$

$$... \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -20/41 \\ -20/19 & 440/779 \end{pmatrix}$$

Berechnung von w_2:

Sei $x_0 = (1, 0)$

$(B - sI)^{-1} x_0 = x_1 = (0, -20/19)^T$

$(B - sI)^{-1} x_1 = x_2 = (400/779, -8800/14801)^T$

$\lambda_k \approx x_k^T B x_k / \|x_k\|_2^2$

$... = -0.9359$

$\Rightarrow \lambda = 1/-0.9359 \approx -1$

1.3 Aufgabe

a) 1. Beh.: $\sigma(A) = \sigma(SAS^{-1})$

Bew:

Sei $\lambda \in \sigma(A)$ und x EV dazu, dann gilt:

$Ax = \lambda x \;, \quad x \neq 0$

Setze $y := Sx$, dann ist $x = S^{-1} y \quad y \neq 0$

und es gilt:

$AS^{-1} y = \lambda S^{-1} y$, sowie

$SAS^{-1} = S\lambda S^{-1} S y = \lambda S S^{-1} <= \lambda y$

2. Beh: $\sigma(SAS^{-1}) = \sigma(B) \cup \sigma(C)$

Bew:

Sei $\lambda \in \sigma(SAS^{-1})$ EW und $x \neq 0$ EV dazu, dann gilt:

$SAS^{-1} x = \lambda x$ mit

$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} x^* \\ x^{**} \end{pmatrix}$ gilt:

$$SAS^{-1} x = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ x^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx^* + Cx^{**} \\ Bx^{**} \end{pmatrix}$$

Mit $SAS^{-1} x = \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x^* \\ \lambda x^{**} \end{pmatrix}$ gilt:

$Cx^* + Dx^{**} = \lambda x^*$ und $Bx^{**} = \lambda x^{**}$

Folgt: $\lambda \in \sigma(B)$ falls $x^{**} \neq 0$

Für $x^{**} = 0$ gilt sofort $Dx^{**} = 0$ und $x^* \neq 0 (dax \neq 0)$

Folgt: $Cx^* = \lambda x^* \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \sigma(C)$

Sei $\lambda \in \sigma(C)$, dann es. $x^* \neq 0$, so dass $Cx^* = \lambda x^*$

Für $x = \begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt: $SAS^{-1}x = \begin{pmatrix} Cx^* \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda x$

Sei $\lambda \in \sigma(V) \setminus \sigma(C)$, dann ex. $x^{**} \neq 0$, so dass $Bx^{**} = \lambda x^{**}$.

Da $C - \lambda I$ nicht sing. $(\lambda \notin \sigma(C))$ ex. x^* mit

$$(C - \lambda I)x^* = -Dx^{**}$$

Setze $x = \begin{pmatrix} x^* \\ x^{**} \end{pmatrix} \Rightarrow$ folgt: $Cx^* + Dx^{**} = \lambda x^*$

und damit $\begin{pmatrix} Cx^* + Dx^{**} \\ Bx^{**} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x^* \\ \lambda x^{**} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda \in \sigma(SAS^{-1})$ wg. $SAS^{-1}x = \lambda x$

b) Nach Satz aus der Vorlesung hat S die gewünschte Eigenschaft falls die letzten n-m Komp. von $Sv_j, \quad 1 \leq j \leq m$ Null sind, d.h. $V := [v_1, ..., v_m]$ folgt:

$$SV = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir brauchen lediglich die Elimination von V (Gauß, Householder,...)

1.4 Anmerkung

Polynominterpolation mit Newton

Man berechnet das Interpol. polynom durch

$$p_N(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_R)$$

Allerdings müssen vorher die Koreff a_i durch Lösen des LGS:

$$\begin{aligned} p_N(x_0) = a_o \quad & = y_0 \\ p_N(x_1) a_0 + a_1(x_1 - x_0) \quad & = y_1 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ p_N(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + ... & \\ + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1}) \quad & = y_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Rekursive Methode d. dividierten Differenzen:

$y[x_i] := y_i$ für $i = 0, ..., n$

$y[x_i, ..., x_{i+k}] := \frac{y[x_{i+1}, ..., x_{i+k}] - y[x_i, ..., x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$

Insges.:

$$p_N(x) = \sum_{i=0}^{n} y[x_0, ..., x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_R)$$

Vorteil: Bereits berechnete a_i müsse bei zusätzl. Stützstellen nicht neu berechnet werden

Nachteil: aufwändige Berechnung der a_i im Vergl zu Lagrange

Hermie-Interpol.

Gesucht: Polynom, das einen geg. Anzahl v. Stützstellen interpol.

Jetzt: Verhalten d. Ableitungen an den Stützst. vorgeschrieben, d.h.

$p \in \mathbb{P}$ mit $p^{(k)}(x) = y_i^{(k)}$ mit $i = 0, ..., n$ und $k = 0, ..., \mu_i$

wobei $n = m + \sum_{i=0}^{m} \mu_i$

Dabei ist nicht $grad(p) = n$ **gefordert!**

$\Rightarrow$ Gleichungssystem für Koeff aufstellen $\Rightarrow$ lösen

Polynom von Grad 3:

$$p_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Sei durch vie Stützstellen $(x_0, y_0), ..., (x_3, y_3)$ eindeutig bestimmt. Dasselbe Polynom ist jedoch auch durch alle seine Ableitungen an jew. einer Stützstelle eindeutig bestimmt:

$$f(x_i) = ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d$$
$$f'(x_i) = 3ax_i^2 + 2bx_i + c$$
$$f''(x_i) = 6ax_i + 2b$$
$$f'''(x_i) = 6a$$

Das Hermite Polyn. führt diese beiden Eigenschaften zusammen.

Newton-Darstellung für Ableitungen

Sind Stützstellen $(x_0, f(x_0))$, $(x_0, f'(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_1, f'(x_1))$ gegeben, dann lässt sich eine Newton-Darst des Interpol. polynom. wiefolgt angeben:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i N_i \quad mit \quad n = m + \sum_{i=0}^{m} \mu_i = 2 + 1 + 1 = 4$$

und c_i, N_i:

$$c_0 = f[x_0] \qquad N_0 = 1$$
$$c_1 = f[x_0, x_0] \qquad N_1 = (x - x_0)$$
$$c_2 = f[x_0, x_0, x_1] \qquad N_2 = (x - x_0)^2$$
$$c_3 = f[x_0, x_0, x_1, x_1] \qquad N_3 = (x - x_0)^2(x - x_1)$$

Für die div. Differenzen betrachtet man in diesem Fall die Stüzzstellen x_0, x_1 sowie deren Vielfachheiten, d.h. man stellt das Rkursionsschema auf, indem man bei $f[x_0], f[x_0], f[x_1], f[x_1]$ anfängt. Für die Berechnung der $f[x_0, x_0]$ benutzt man allerdings die Formel:

$$f[x_0, ..., x_R] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad \text{bei } x_0 = ... = x_R.$$