

1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 7 19.12.12

1.3 Aufgabe

1. z.z.: Q ist obere Hessenberg-Matrix.

Annahme: Q sei keine ob. Hes.-Matrix.

Dann ex. i_0, j_0 mit $i_0 > j_0 + 1$ dergestalt, dass $q_{i_0, j_0} \neq 0$.

OBdA dürfen wir annehmen, dass $q_{i_0, j}$ für alle $j < j_0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} a_{i_0, j_0} &= \sum_{k=1}^n n q_{i_0 k} \Gamma_{k j_0} = \sum_{k=1}^{j_0-1} \underbrace{q_{i_0 k}}_{=0} \Gamma_{k j_0} + q_{i_0 j_0} \Gamma_{j_0 j_0} + \sum_{k=j_0+1}^n \underbrace{q_{i_0 k}}_{=0} \Gamma_{k j_0} \\ &= q_{i_0 j_0} \Gamma_{j_0 j_0} \neq 0 \end{aligned}$$

Da A nicht sing. Damit wäre A aber keine OHB.

2. Mit R obere Dreiecks-Matrix und Q OGB-Matrix gilt:

$$r_{ij} = 0 \text{ falls } i > j, \quad q_{ij} = 0 \text{ falls } i > j + 1$$

$$\text{Sei } i > j + 1, \text{ dann: } a'_{ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ik} q_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} \Gamma_{ik} q_{kj} + \sum_{k=i}^n r_{ik} q_{kj}$$

Für $j = 1, \dots, n-2$, da $k \geq i > j + 1$

1.4 Präsenzaufgabe zu Blatt 9.1

Spliner Raum

Sei $X = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m > b\}$ eine Menge paarweise verschiedener Stützstellen (Knoten) und sei $k \in \mathbb{N}$.

Dann ist der Spline-Raum $S_{X,k}$ definiert durch:

$$S_{X,k} := \{f \in C^{k-1}[a, b] : f|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}^k \forall i \in \mathbb{N}\}$$

Der Raum besteht also aus Funktionen, die *zwischen* zwei benachbarten Stützstellen Polynome vom Grad k und außerdem an „glatt“ bis zur $(k-1)$ -ten Ableitung sind.

Beispiele:

$$\text{Sei } f(x) := \begin{cases} x^5 & \text{für } x > 0 \\ -2x^5 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}. \text{ Dann gilt:}$$

1. $f \in S_{\{-1,0,1\},5}$, denn:

$$f|_{[-1,0]} = -2x^2 \in \mathbb{P}^5 \text{ und } f|_{[0,1]} = x^5 \in \mathbb{P}^5 \text{ und } \mathbb{P}_{[-1,1]} \in C^4[-1, 1]$$

da gilt:

$$f(-0) = f(+0) = 0$$

$$f'(-0) = f'(+0) = 0$$

$$f''(-0) = f''(+0) = 0$$

$$f'''(-0) = f'''(+0) = 0$$

$$f^{(4)}(-0) = f^{(4)}(+0) = 0$$

2. $f \notin S_{\{-1,0,1\},6}$, obwohl

$$f|_{[-1,0]} = -2x^2 \in \mathbb{P}^5, \quad f|_{[0,1]} = x^5 \in \mathbb{P}^5 \text{ und } \mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^6$$

denn:

$$f^{(5)} = \begin{cases} 5! & \text{für } x > 0 \\ -2 \cdot 5! & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

3. $f \notin S_{\{-1,0,1\},4}$, da f zwar „glatt“ genug (siehe 1.), aber $f|_{[-1,0]} \notin \mathbb{P}^4$ und $f|_{[0,1]} \notin \mathbb{P}^4$
4. $f \notin S_{\{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\},5}$, da $f|_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ kein Polynom ist.
5. $f \in S_{\{-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\},5}$, denn die zusätzl. Knoten geben keine weiteren Informationen.

1.5 Anmerkung

Restglied

Das Restglied $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$ (auch „Fehler d. Polynominterpol.“) von $f \in C^{n+1}[a, b]$ durch $p_n(x) \in \mathbb{P}^n$ kann wie folgt dargestellt werden (\rightarrow Vorlesung):

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

mit $\xi = [\min\{x_0, \dots, x_n, x\}, \max\{x_0, \dots, x_n, x\}] \subset [a, b]$

oder mithilfe der div. Diff. zu den Stützstellen

$\{(x_i, f(x_i)) \mid i=0, \dots, n\} \cup \{(x, f(x))\}$:

$$R_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

1. Sei $f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+n)!}$, dann ist $f^{(n+1)}(x) \equiv 1$

Mit $n = 3$ und $x_i = \frac{i}{3}$ für $i = 0, 1, 2, 3$ ergibt sich:

$$f(x) = \frac{x^4}{4!} \text{ und } R_3(x) = \frac{1}{4!}(x-0)(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})(x-1).$$

2. Für $f(x) := \sin(x)$ und $n_i x_i$ wie oben ist $f^{(n+1)}(x) = \sin^{(4)}(x) = \sin(x)$
d.h.

$$R_3(x) = \frac{\sin(\xi_x)}{4!}(x-0)(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})(x-1)$$

mit $\min\{0, x\} \leq \xi_x \leq \max\{1, x\}$.

Betrachte ein $x \in [-1, 2]$, dann ergibt sich folgende grobe Abschätzung:

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 2 \approx 0.4630$$