1 Präsenzaufgabe 24.10.12

1.1 Aufgabe

Gegeben sei ein lin. GS. $Ax = b$ mit A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösbarkeit:

LGS ist eindeutig lösbar g.d.w. A nicht singulär ($\det(A) \neq 0$)

Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung:

$A^{(0)} := A$, $b^{(0)} := b$, Pivotelement $a_{2,1}^{(0)} = 2$

$$\Rightarrow \tilde{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$l_{2,1} = \frac{\tilde{a}_{2,1}^{(0)}}{\tilde{a}_{1,1}^{(0)}} = \frac{1}{2}$: 2. Zeile $- \frac{1}{2} \cdot$ 1. Zeile

$l_{3,1} = \frac{\tilde{a}_{3,1}^{(0)}}{\tilde{a}_{1,1}^{(0)}} = \frac{1}{2}$: 3. Zeile $- \frac{1}{2} \cdot$ 1. Zeile

$$\Rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Pivotelement $a_{3,2}^{(1)} = 7$

$$\Rightarrow \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$l_{3,2} = \frac{\tilde{a}_{2,2}^{(1)}}{\tilde{a}_{3,2}^{(1)}} = -\frac{1}{7}$: 3. Zeile $+ \frac{1}{7} \cdot$ 2. Zeile

$$\Rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad , \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Rücksubstitution:

$$Rx = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} = b^{(2)} \Rightarrow x = (5, -\tfrac{1}{2}, -4)^t$$

LR-Zerlegung:

$$LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = PA$$

1.2 Aufgabe

Wieviele Operationen (Multiplikationen und Divisionen) sind für die Lösung des LGS Ax=b erforderlich, falls

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Letzte Zeile: 0 Ops.
Vorletzte Zeile: 1 Ops (Wert in letzter Spalte·Ergebnis aus letzter Zeile)
$\vdots$
Erste Zeile: n-1 Ops

$$\Rightarrow N = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} + O(n)$$

Abschätzungen

o(.):

$g_k = o(f_k) \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|g_k|}{f_k} = 0$ g wächst langsamer als f_k bzw. ist asymptotisch vernachlässigbar.

O(.), Landau-Symbol:

Gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $|g_k| \leq c f_k \forall k \in \mathbb{N}$, dann $g_k = O(f_k)$ für $k \to \infty$

1.3 Aufgabe

Satz von Cauchy Schwarz:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ist die Frobenius-Norm $||.||_F$ mit euklidischer Norm $||.||_2$ verträglich?

Zz.: $\quad ||Ax||_2 \leq ||A||_F ||x||_2 \; , \quad x \in \mathbb{R}^n \; , \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$||Ax||_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{CS}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = ||A||_F ||x||_2$$

Beispiele der Matrix-Norm

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Frobenius-Norm:

$$||A||_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 5$$

Unendlichkeits-Norm:

$$||A||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 6$$

Summen-Norm:

$$||A||_\infty = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 6$$