

1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 8 16.1.12

1.3 Aufgabe

a) Gegebene Stützpunkte:

$$(x_0, y_0) = (0, 1), \quad (x_1, y_1) = (1, 4), \quad (x_2, y_2) = (2, 3), \quad (x_3, y_3) = (4, 4)$$

Wertepaare:

x_i	0	1	2	4
y_i	1	4	3	4

Berechnung der dividierten Differenzen in einem Dreiecksschema:

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$		
0	1			
		$\frac{4-1}{1-0} = 3$		
1	4		$\frac{-1-3}{2-0} = -2$	
		$\frac{3-4}{2-1} = -1$		$\frac{\frac{1}{2}+2}{4-0} = \frac{5}{8}$
2	3		$\frac{\frac{1}{2}+1}{4-1} = \frac{1}{2}$	
		$\frac{4-3}{4-2} = \frac{1}{2}$		
4	4			

Mit Hilfe der div. Differenzen können wir jetzt das Interpolationspolynom in Newtonscher Form:

$$\begin{aligned} p(x) &:= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 1 + 3x - 2x(x - 1) + \frac{5}{8}x(x - 1)(x - 2) \\ p(5) &= 1 + 15 - 40 + \frac{75}{2} = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

b) $\tilde{p}(x) = p(x) + y(0, 1, 3, 4, 5)N_4(x)$
 $= -\frac{29}{240}x^4 + \frac{353}{240}x^3 - \frac{167}{30}x^2 + \frac{433}{60}x + 1$

1.4 Aufgabe

a) Sei p das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom von f zu den Stützstellen x_0, \dots, x_n . Bilde zwei Newton-Darstellungen von p in der Reihenfolge x_0, \dots, x_n als auch x_{i_0}, \dots, x_{i_n} :

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^n f(x_0, \dots, x_i) \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \\ &= \sum_{k=0}^n f(x_{i_0}, \dots, x_{i_k}) \prod_{l=0}^{k-1} (x - x_{i_l}) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich des führenden Monoms:

$$x^n : f(x_0, \dots, x_i) = f(x_{i_0}, \dots, x_{i_k})$$

b) Sei $f \in \mathbb{P}_{n-1}$. Sei $p \in \mathbb{P}_n$ das eind. best. Polym. wie oben.

Mit der Newton-Darstellung gilt:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_0, \dots, x_i) \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Da p eind. bestimmt ist und $f \in \mathbb{P}_{n-1} \subset \mathbb{P}_n$ gilt notwendigerweise $p \equiv f$.

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$O \cdot x^n = f(x_0, \dots, x_n)x^n$$

- c) Seien p_{n-1} Interpolationspolynom von f zu den Stützstellen x_0, \dots, x_{n-1} . Mit Satz 4.0.6 folgt:

$$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = f(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)$$

Andererseits gibt es wegen Satz 4.0.5 ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)$$

$$\Rightarrow f(x_0, \dots, x_n) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)$$

1.5 Aufgabe

Sei $f(x) = e^{\lambda x}$, dann gilt $f \in C^{n+1}([a, b])$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 4.0.5 folgt:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x_n - x_j)$$

Mit $f^{(n+1)}(\xi_x) = \lambda^{n+1} e^{\lambda \xi_x}$.

Sei o.B.d.A. $\lambda > 0$, dann gilt:

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \lambda^{n+1} e^{\lambda b} (b-a)^{n+1} = e^{\lambda b} \frac{d^{n+1}}{(n+1)!}$$

wobei $d := (\lambda(b-a))$ bei beliebiger Lage der Stützstellen.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^n}{n!} = 0$

(Quotientenkriterium: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{d}{n+1} n \rightarrow \infty 0$)

folgt die Behauptung.

Bemerkung

Satz 4.0.6

Sei $f \in C^{n+1}([a, b])$. Dann hat der Interpolationsfehler die Darstellung:

$$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = f(x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)$$

mit p als Interpolationspolynom zu x_0, \dots, x_n .

Satz 4.0.5

Sei f wie oben. Dann gibt es zu jedem $x \in [a, b]$ ein $\xi_x \in [a, b]$ mit

$$f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j).$$