Besprechung zu Blatt 9 zu Analysis 3

Aufgaben wichtig für Klausur!

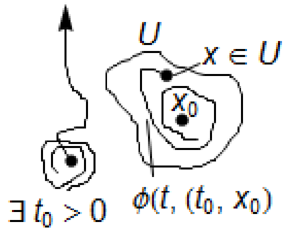
Aufgabe 1

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}$$

$\sigma, r, b > 0$ Konstanten

a) Gleichgewicht (x_0, y_0, z_0) ist stabil, wenn alle EW von $J_f(x_0, y_0, z_0)$ negativen Realteil haben (Def. 10.1, Satz 10.2)

0 ist Gleichgewicht von Lorenz-System.



$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x6 - b & \end{pmatrix}$$

$$J_f(0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

λ Eigenwerte von $J_f(0)$

$$0 = det(J_f(0) - \lambda \mathbb{1}) = det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b-\lambda \end{pmatrix} = (-\sigma - \lambda)((-1 - \lambda)(-b-\lambda) - 0) - r(\sigma(-b-\lambda) - 0) + 0$$

$$= -(\sigma + \lambda)(b + \lambda + \lambda b + \lambda^2) + r\sigma b + r\sigma\lambda$$

$$= -\sigma b - \sigma\lambda - \lambda b\sigma\sigma\lambda^2 - \lambda b - \lambda^2 - \lambda^2 b - \lambda^3 + r\sigma b + r\sigma\lambda$$

$$= -b(\sigma + \lambda\sigma + \lambda + \lambda^2 - r\sigma) - \lambda(\sigma + \sigma\lambda + \lambda^2 + r\sigma + \lambda)$$

$$= -(b + \lambda)(\sigma(r-1) + \lambda(\sigma + 1) + \lambda^2)$$

$$\Rightarrow \lambda = \underbrace{-b}_{<0} \text{ oder } \lambda^2 + \lambda(\sigma+1) - \sigma(r-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\tfrac{\sigma+1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{\sigma+1}{2})^2 + \sigma(r-1)}$$

$r > 1:\quad \sigma(r-1) > 0$

$$\Rightarrow \lambda_+ = -\tfrac{\sigma+1}{2} + \sqrt{\underbrace{(\frac{\sigma+1}{2})^2 + \sigma(r-1)}_{>(\frac{\sigma+1}{2})^2}} > -\tfrac{\sigma+1}{2} + \tfrac{\sigma+1}{2} = 0$$

$\Rightarrow$ 0 nicht stabil

$r < 1 : \sigma(r-1) < 0$

$$\lambda_\pm = -\tfrac{\sigma+1}{2} + \sqrt{\underbrace{(\frac{\sigma+1}{2})^2 + \sigma(r-1)}_{<(\frac{\sigma+1}{2})^2}} < -\tfrac{\sigma+1}{2} + \tfrac{\sigma+1}{2} = 0$$

$\Rightarrow$ 0 stabil

b) $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, V(x,y,z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$
$r \in (0,1)$, ((a)$\Rightarrow$ 0 stabil)

10.5 (Liapunov-Funktion):
V ist L-Funktion von Lorenz-System, wenn $\forall$ Lösungen (x,y,z) von Lorenz-System: $\frac{d}{dt}(V \circ (x,y,z))(t) \leq 0,\ \frac{d}{dt}(V \circ (0))(t) = 0$

Satz 10.7: Gibt es eine L-Funktion V, ist (x_0, y_0, z_0) ein isoliertes Gleichgewicht und ein striktes Min von V, dann ist dieses Gleichgewicht (asymptotisch) stabil.

Sei (x,y,z) eine Lösung des Lorenz-Systems.
Dann ist $\frac{d}{dt}(V \circ (x,y,z))(t) = \frac{d}{dt}(x(t)^2 + \sigma y(t)^2 + \sigma z(t)^2)$
$= 2x(t)\dot{x}(t) + 2\sigma y(t)\dot{y}(t) + 2\sigma z(t)\dot{z}(t)$
$= 2(x(t)+\sigma(y(t)-x(t))+\sigma y(t)(rx(t)-y(t)-x(t)z(t)))+\sigma z(t)(x(t)y(t)-bz(t))$
$= 2(\sigma xy - \sigma x^2 + \sigma rxy - \sigma y^2 - \sigma xyz + \sigma xyz - \sigma bz^2)$
$= -2\sigma(x^2 + y^2 - xy(1+r)) - 2\sigma bz^2$

$xy \geq 0: \; 2\sigma xy(1+r) \leq 2\sigma xy(1+1)$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(V \circ (x,y,z))(t) \leq -2\sigma(x^2 + y^2 - 2xy) - 2b\sigma z^2$$
$$= -2\sigma(x-y)^2 - 2b\sigma z^2 \begin{cases} < 0 & ,(x,y,z) \neq 0 \\ = 0 & ,(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$xy \leq 0: \; xy(1+r) < 2xyr$
$$\frac{d}{dt}(V \circ (x,y,z))(t) \leq< -2\sigma(x^2 + y^2 - 2xyr) - 2\sigma bz^2$$
$$-2\sigma x^2 < -2\sigma x^2 r \Rightarrow ... \leq -2\sigma(r^2x^2 + y^2 - 2xyr) - 2\sigma bz^2$$
$$= -2\sigma(rx-y)^2 - 2\sigma bz^2 = \begin{cases} < 0 & ,(x,y,z) \neq 0 \\ = 0 & ,(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ V eine (strikte) Liapunov-Funktion
0 ist striktes lokales Minimum
Um Satz 10.7 anzuwenden fehlt noch, dass 0 ein isoliertes Gleichgewicht von Lorenz-System ist.
Dazu suchen wir weitere Gleichgewichte vom Lorenz-System, falls überhaupt weitere Vorhanden.

Seien $(x,y,z) \in \mathbb{R}$ Gleichgewichte, d.h.
$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(y-x) && \Rightarrow x = y \\ 0 &= rx - y - xz && \Rightarrow 0 = x(r-1-z) \\ 0 &= rx - bz && \Rightarrow 0 = x^2 - bz \end{aligned}$$
$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow bz = x^2 = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow (x,y,z) = 0$
$x \neq 0 \Rightarrow r - 1 - z = 0 \Rightarrow z = r - 1 < 0 \; (da \; r < 1)$
$\quad \Rightarrow 0 \leq x^2 = bz < 0 \; (Widerspruch!)$
$\Rightarrow$ 0 einziges Gleichgewicht,insbesondere ein isoliertes Gleichgewicht!

Jetzt können wir Satz 10.7 anwenden und erhalten, dass 0 stabil ist.

Aufgabe 3

Bewegungsgleichung Kosmonaut: $r_L(t) = 1, \;\; \varphi_L(t) =$t
Linse: r, φ mit $r(0) = 1, \;\; \dot{r}(0) = v_0 < 0, \;\; \varphi(0) = 0, \;\; \dot{\varphi}(0) = 1$

$$\phi_1 = \phi_L, \;\; r_1 = r_L$$
$$r = r_L + r_1 v_0 + O(v_0^2)$$
$$\varphi = \varphi_L + \varphi_1 v_0 + O(v_0^2)$$

Es gilt: $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{r^2} = 0, \;\; r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$

$$0 = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{r^2} = \ddot{r}_1 v_0 + O(v_0^2) - \underbrace{((1 + r_1 v_0 + O(v_0^2))(1 + \dot{\varphi}_1 v_0 + O(v_0^2)))^2}_{=(1+\dot{\varphi}_1 v_0 + O(v_0^2) + r_1 v_0 + r_1 \dot{\varphi}_1 v_0^2 + r_1 v_0 O(v_0^2) + O(v_0^2) + \dot{\varphi}_1 v_0 O(v_0^2) + O(v_0)^2)(1 + \dot{\varphi}_1 v_0 + 0)}$$
$$+ \frac{1}{(1 + r_1 v_0 + O(v_0^2)^2}$$
$$= \ddot{r}_1 v_0 + O(v_0^2) - (1 + 2\dot{\varphi}_1 v_0 + r_1 v_0) + O(v_0^2) + 1 + (-(2)\tfrac{1}{1}) r_1 v_0 + (3\tfrac{1}{1}) O(v_0^2)$$
$$= \ddot{r}_1 v_0 - 1 - 2\dot{\varphi}_1 v_0 - 2r_1 v_0 + 1 - r_1 v_0 + O(v_0^2)$$

$= \ddot{r}_1 v_0 - 2\dot{\varphi}_1 v_0 - 3r_1 v_0 + O(v_0^2) \Leftrightarrow 0 = \ddot{r}_1 - 2\dot{\varphi}_1 - 3r_1 + O(v_0)$ (mit $v_0 \neq 0$)

$0 = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$
$= (1 + r_1 v_0 + O(v_0^2))(\ddot{\varphi}_1 v_0 + O(v_0^2)) + 2(\dot{r}_1 v_0 + O(v_0^2))(1 + \dot{\varphi}_1 v_0 + O(v_0^2))$
$= \ddot{\varphi}_1 v_0 + O(v_0^2) + 2\dot{r}_1 v_0 + O(v_0^2)$
$= \ddot{\varphi}_1 v_0 + 2\dot{r}_1 v_0 + O(v_0^2)$
$\Leftrightarrow 0 = \ddot{\varphi}_1 + 2\dot{\vec{r}}_1 + O(v_0)$

Jetzt: $O(v_0) \approx 0 \Rightarrow$ Wir vernachlässigen die Terme $O(v_0)$
$\Rightarrow 0 = \ddot{\varphi}_1 + 2\dot{r}_1, \quad 0 = \ddot{r}_1 - 2\varphi_1 - 3r_1$
$\ddot{\varphi}_1 = -2\dot{r}_1$
$\Rightarrow \dot{\varphi}_1(t) = \dot{\varphi}_1(0) + \int\limits_0^t \underbrace{\ddot{\varphi}_1(s)}_{=-2\dot{r}_1(s)} \, ds$
$= \ddot{\varphi}_1(0) - 2r_1(t) + 2r_1(0)$

$1 = r(0) = 1 + r_1(0)v_0 \Rightarrow r_1(0) = 0$
$v_0 = \dot{r}(0) = \dot{r}_1(0)v_0 \Rightarrow \dot{r}_1(0) = 1$
$0 = \varphi(0) = \varphi_1(0)v_0 \Rightarrow \varphi_1(0) = 0$
$1 = \dot{\varphi}(0) = 1 + \dot{\varphi}_1(0)v_0 \Rightarrow \dot{\varphi}_1(0) = 0$

$\Rightarrow \dot{\varphi}_1 = -2r_1$
$\Rightarrow \ddot{r}_1 = 2\dot{\varphi}_1 + 3r_1 = r_1$

Lösungsraum und Randwertbedingung

$\dot{x} = f(x),\ f : \vec{r}^n \to \mathbb{R}^n,\ linear$
$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$
Lösungsraum $\{R \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \phi(t)x_0 | x_0 \in \mathbb{R}^n\}$
$(*)\ \ \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(t),\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $(*)$
Dann sind alle Lösugen von $(*)$ gegeben durch:
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \phi(t)x_0 + \xi(t), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n$
Denn: $\frac{d}{dt}(\phi(t)x_0 + \xi(t)) = \dot{\phi}(t)x_0 + \dot{\xi}(t)$
$= f(\phi(t)x_0) + f(\xi(t)) + g(t)$
$= f(\phi(t)x_0 + \xi(t)) + g(t)$ (*da f linear!*)

(Aufgabe 4: $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \xi(x) = \frac{1}{2}e^x$)

Randwertproblem (Beispiel):$\dot{u}(x) = f(u(x)) + g(x),\ u(0) = a,\ u(1) = b \in \mathbb{R}^n$
Finde $a_0 \in \mathbb{R}^n$, so dass $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \phi(x)a_0 + \xi(x)$ Randwertbedingung erfüllt
(Aufgabe 4: $g(x) = e^x$; Aufgabe 5: $g(x) = 0$)