Kap. 5:

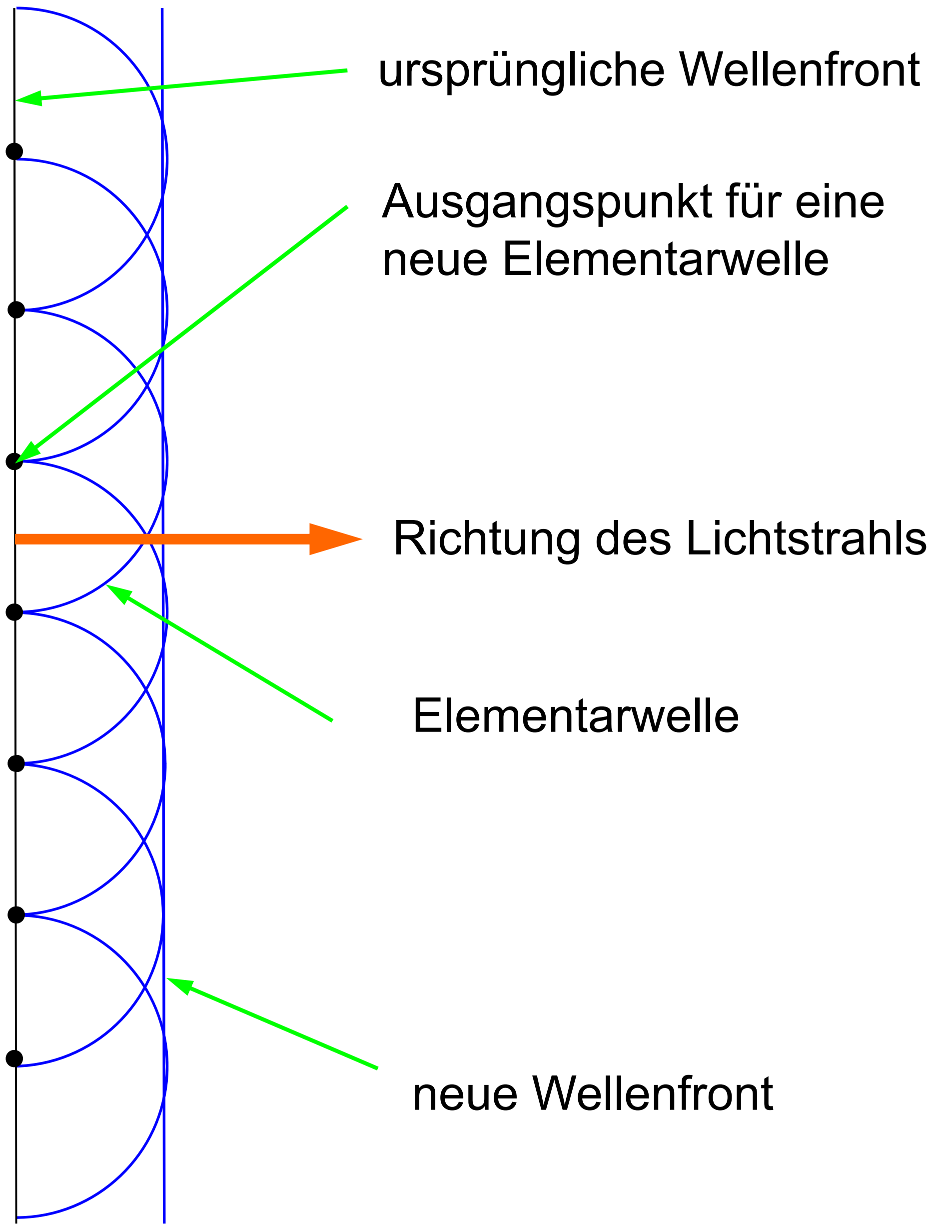
Das Photon

Licht: Welle und Teilchen

Newton:
Licht besteht aus
kleinen Teilchen

Huygens:
Licht ist eine Welle

Huygenssches Prinzip



Jede Welle ist darstellbar als eine Überlagerung von Kugelwellen

Entwicklung einer ebenen Welle nach Kugelwellen

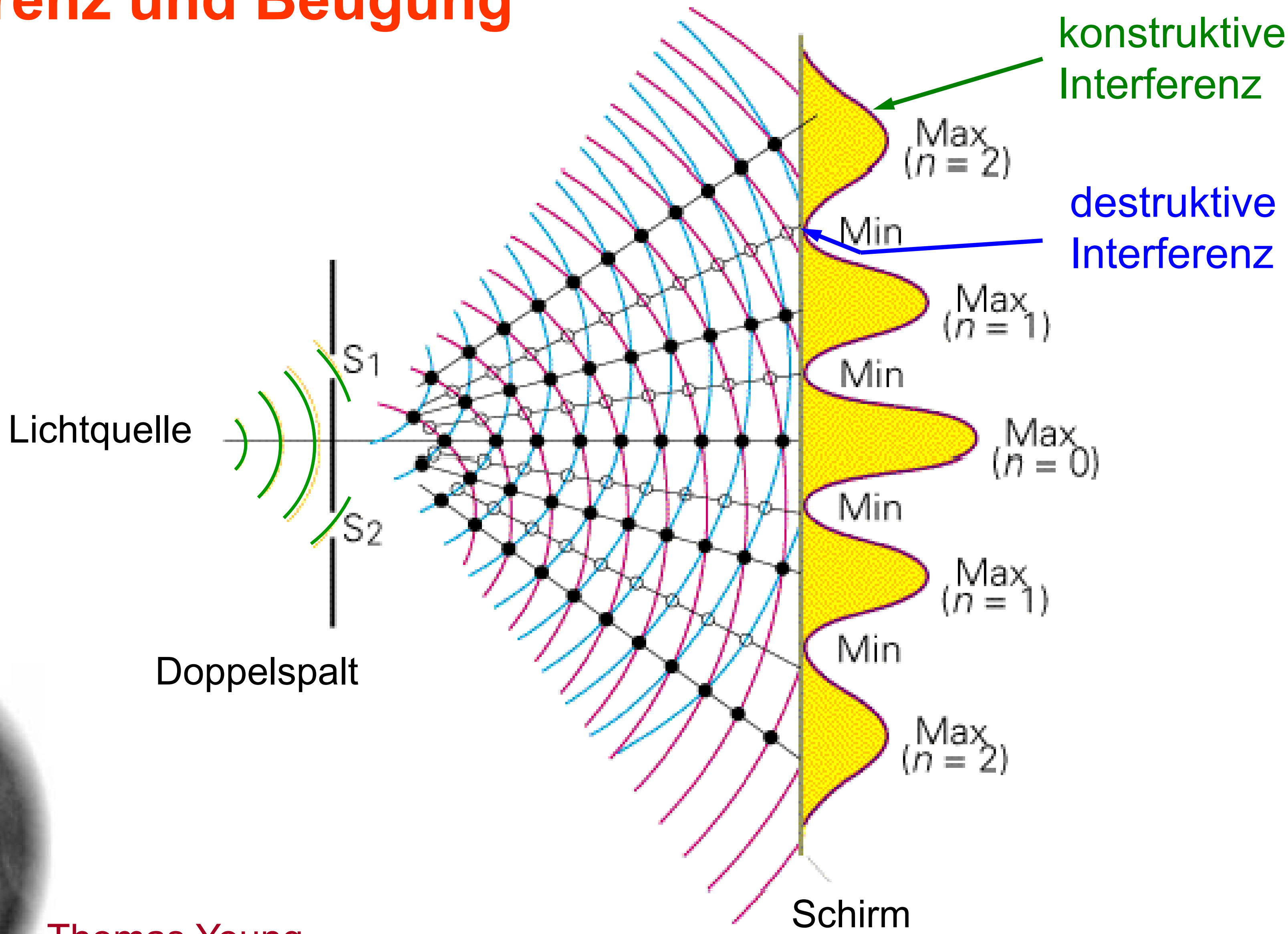
Rayleigh 1894 für Schallwellen

Streuung einer ebenen Welle an einem Objekt bei r = 0,
Wellenfunktion in Kugelkoordinaten, weit entfernt vom Objekt

$$\Psi = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\underbrace{\frac{e^{-ikr}}{r}}_{\text{einlaufende Kugelwelle}} - \underbrace{\eta_l}_{\text{Amplitudenänderung}} \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{auslaufende Kugelwelle}} \right) P_l(\cos\vartheta)$$

$P_l(x)$: Legendre Polynome
$k = 2\pi / \lambda$

Wellennatur des Lichts: Interferenz und Beugung



Thomas Young
Doppelspaltexperiment (1801)

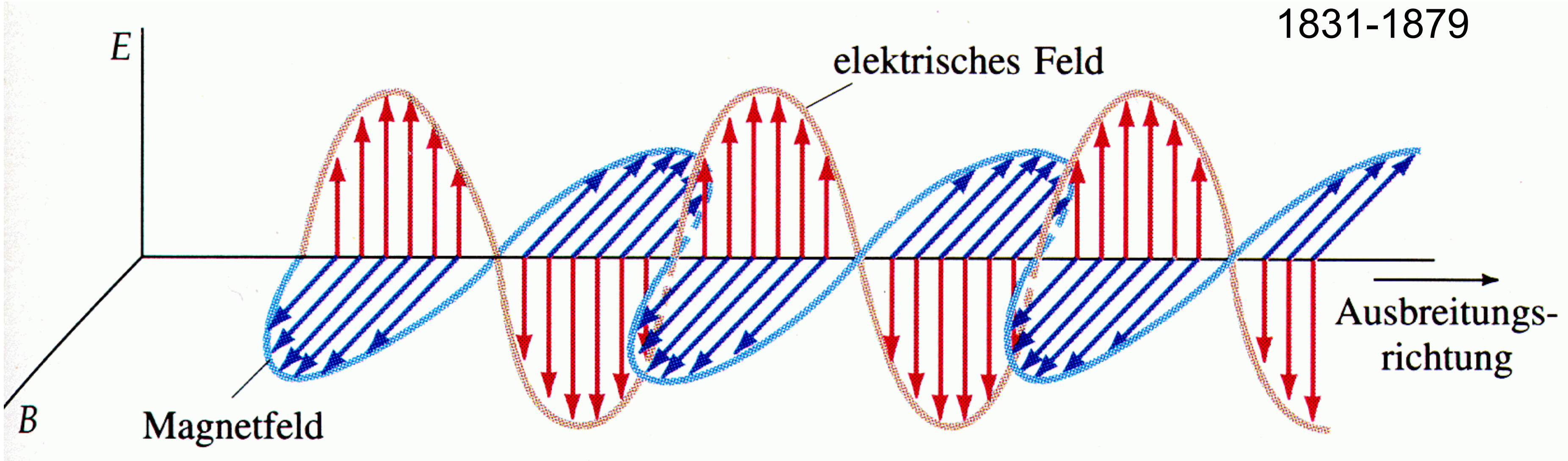
Elektromagnetische Strahlung, Lichtwellen

Aus den Maxwellgleichungen ergibt sich für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Vakuum eine partielle Differentialgleichung, die Wellengleichung für den Vektor $\vec{E}$ des elektrischen Felds

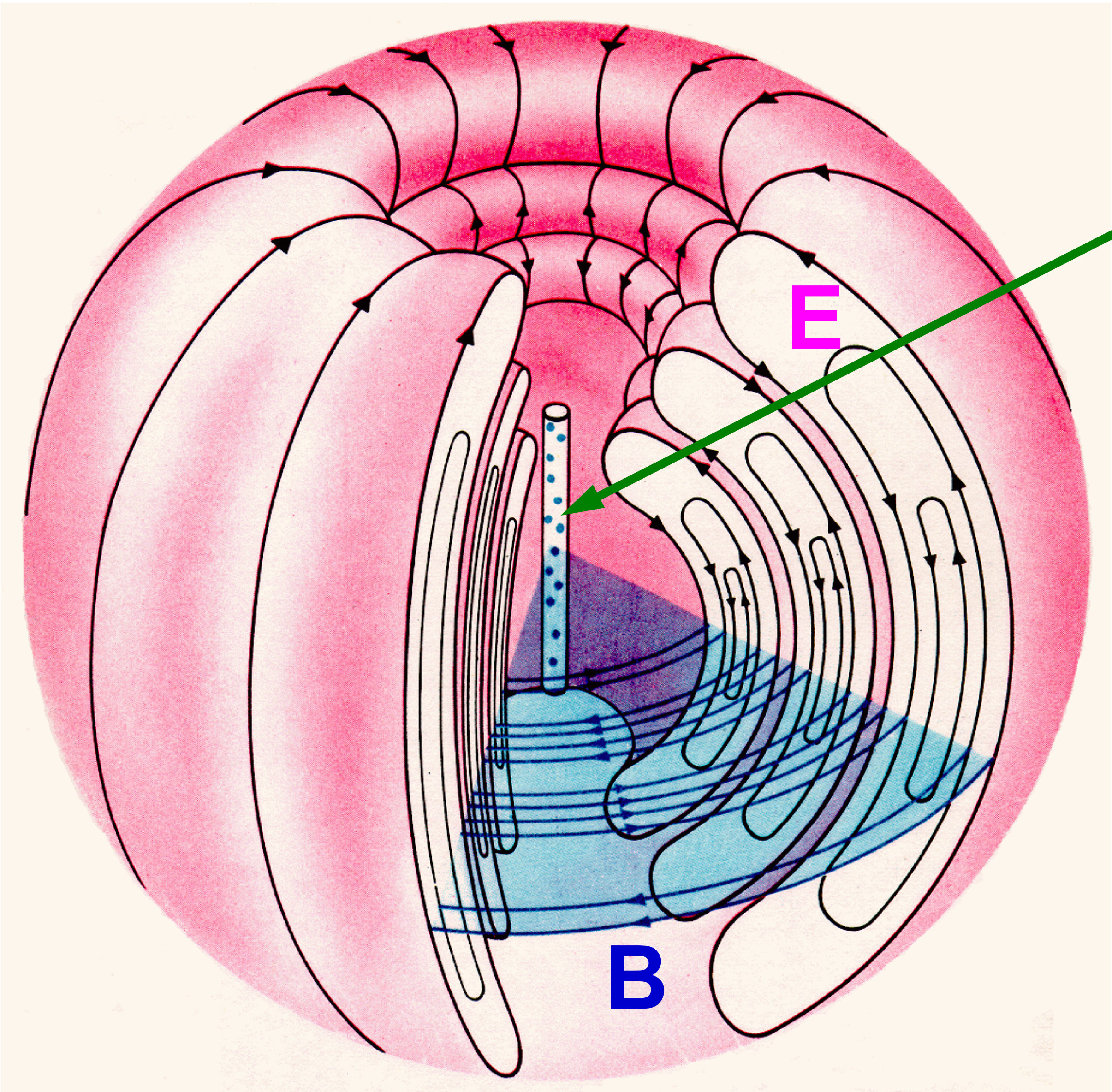
$$\boxed{\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}}$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c

James Clerk Maxwell
1831-1879



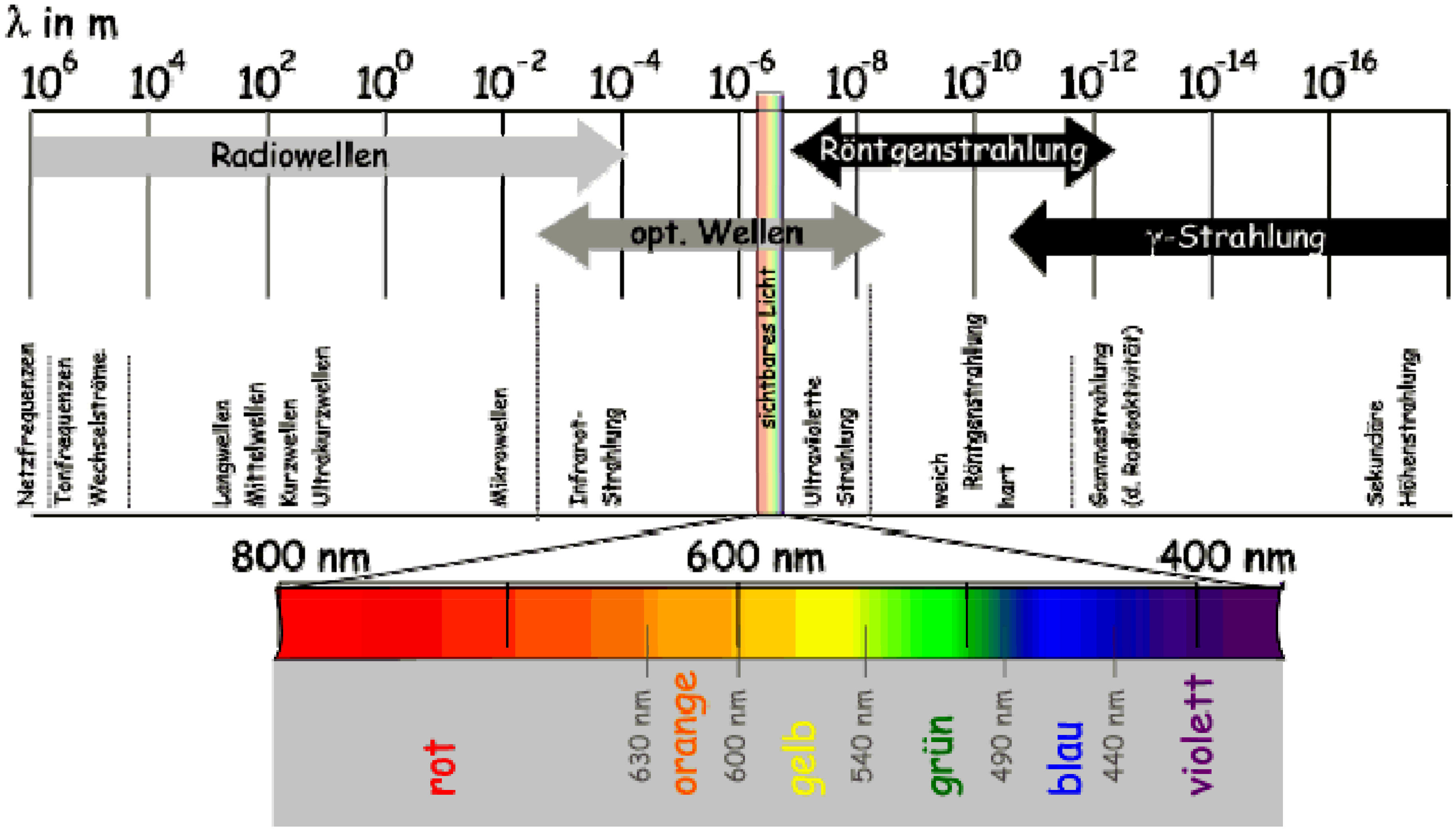
Elektromagnetische Strahlung, Licht



Schwingender Dipol (Hertz)

Heinrich Hertz
1857-1894

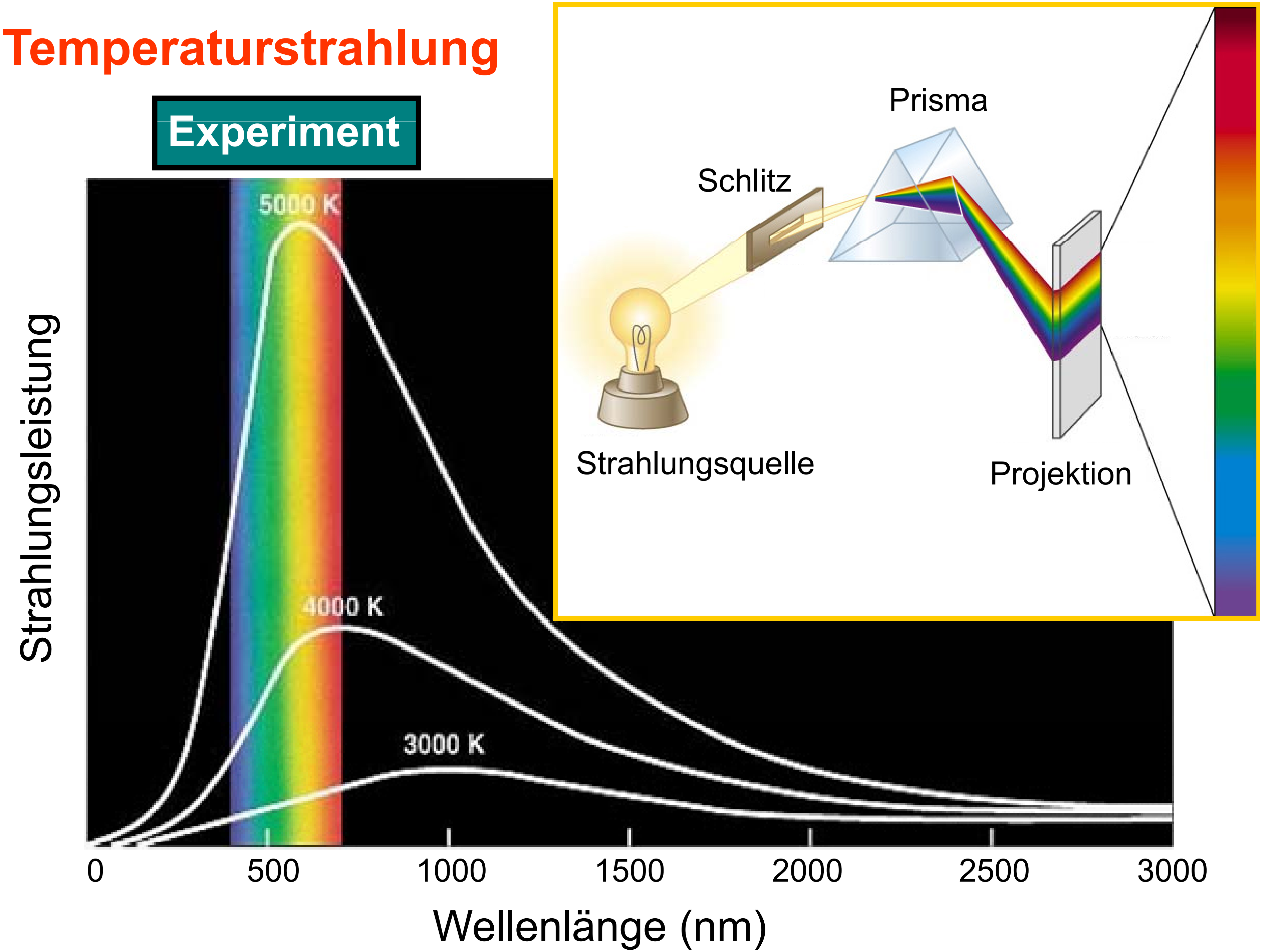
Elektromagnetisches Spektrum



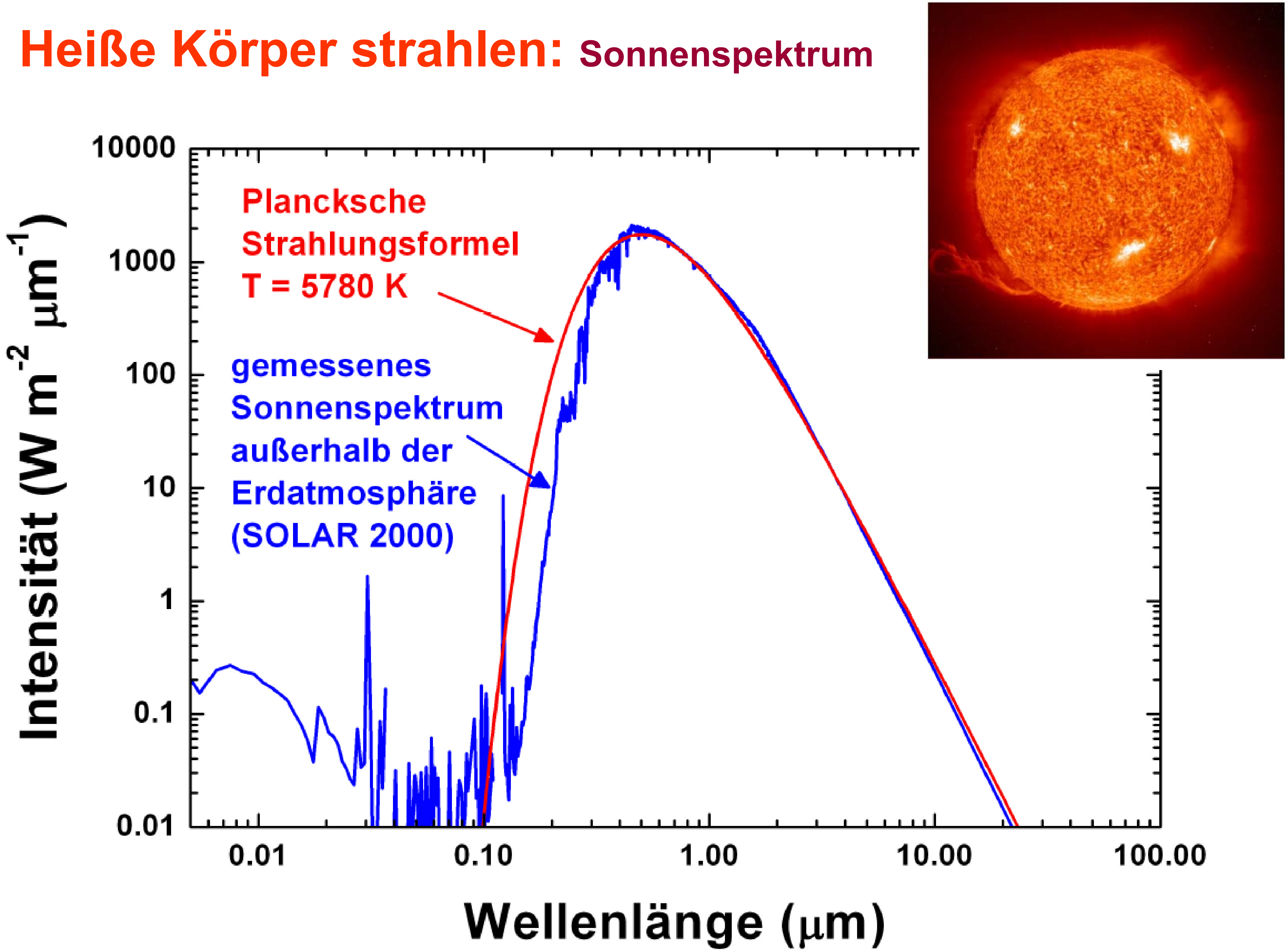

Temperaturstrahlung

Temperaturstrahlung

Experiment



Heiße Körper strahlen: Sonnenspektrum

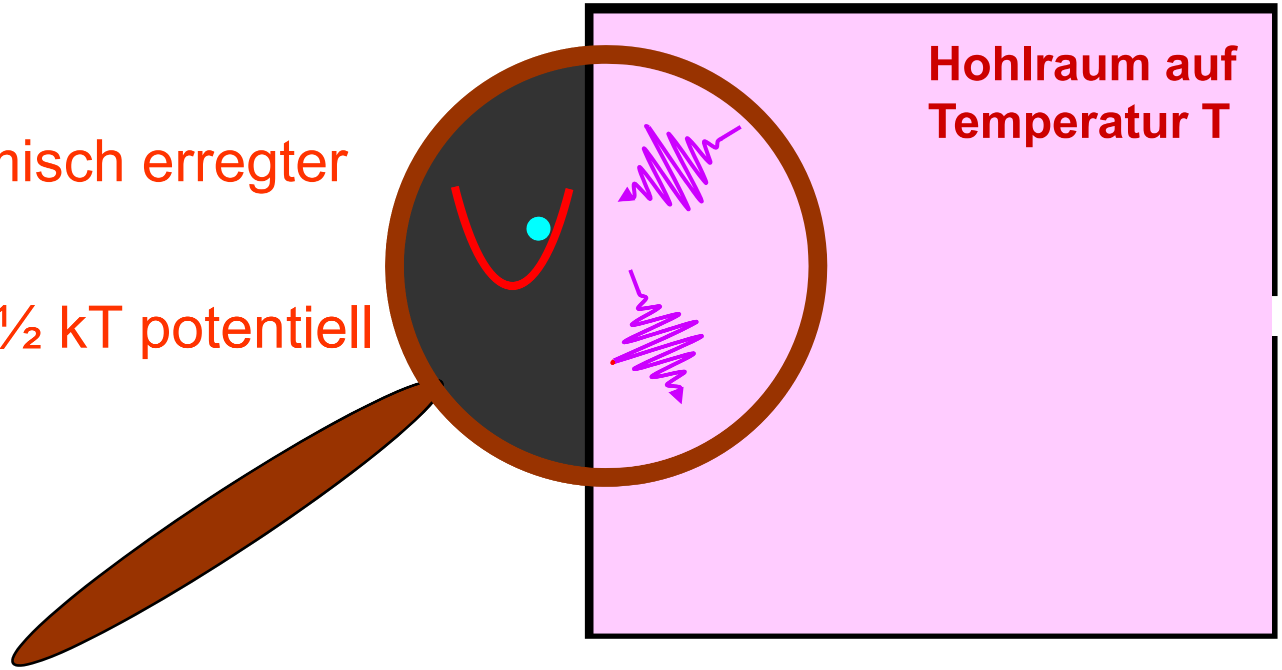


Wechselwirkung von Wand und Strahlung

Wandmaterial besteht aus harmonischen Oszillatoren
(schwingende Ladungen)

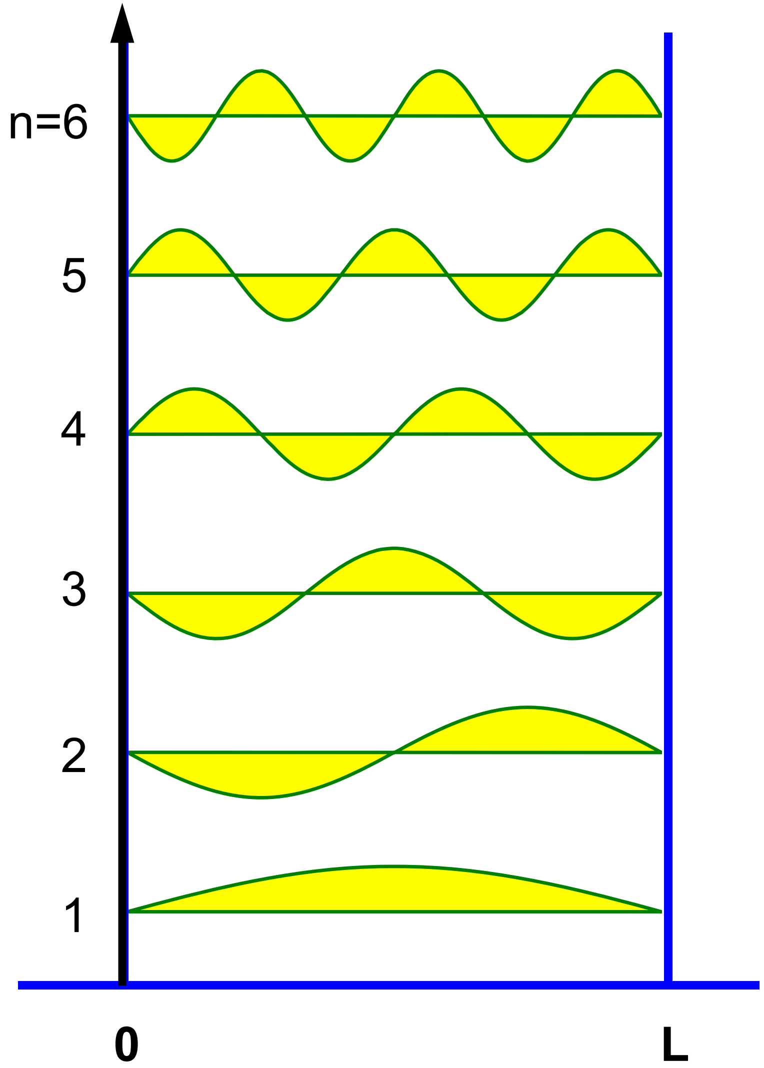
klassischer, thermisch erregter Oszillator:

½ kT kinetisch + ½ kT potentiell



Thermisches Gleichgewicht zwischen Absorption und Emission

Schwingungsmoden im eindimensionalen Hohlraum



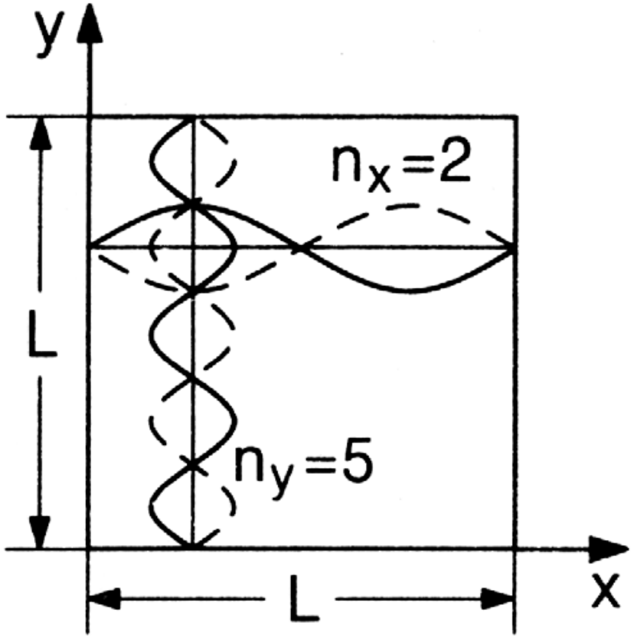
stehende Wellen haben in einem innen komplett verspiegelten Kasten an den Wänden verschwindende Feldstärke (Knoten);

sie müssen die Bedingung

$$n\frac{\lambda}{2} = L\,, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

erfüllen.

Schwingungsmoden in einem kubischen Hohlraum



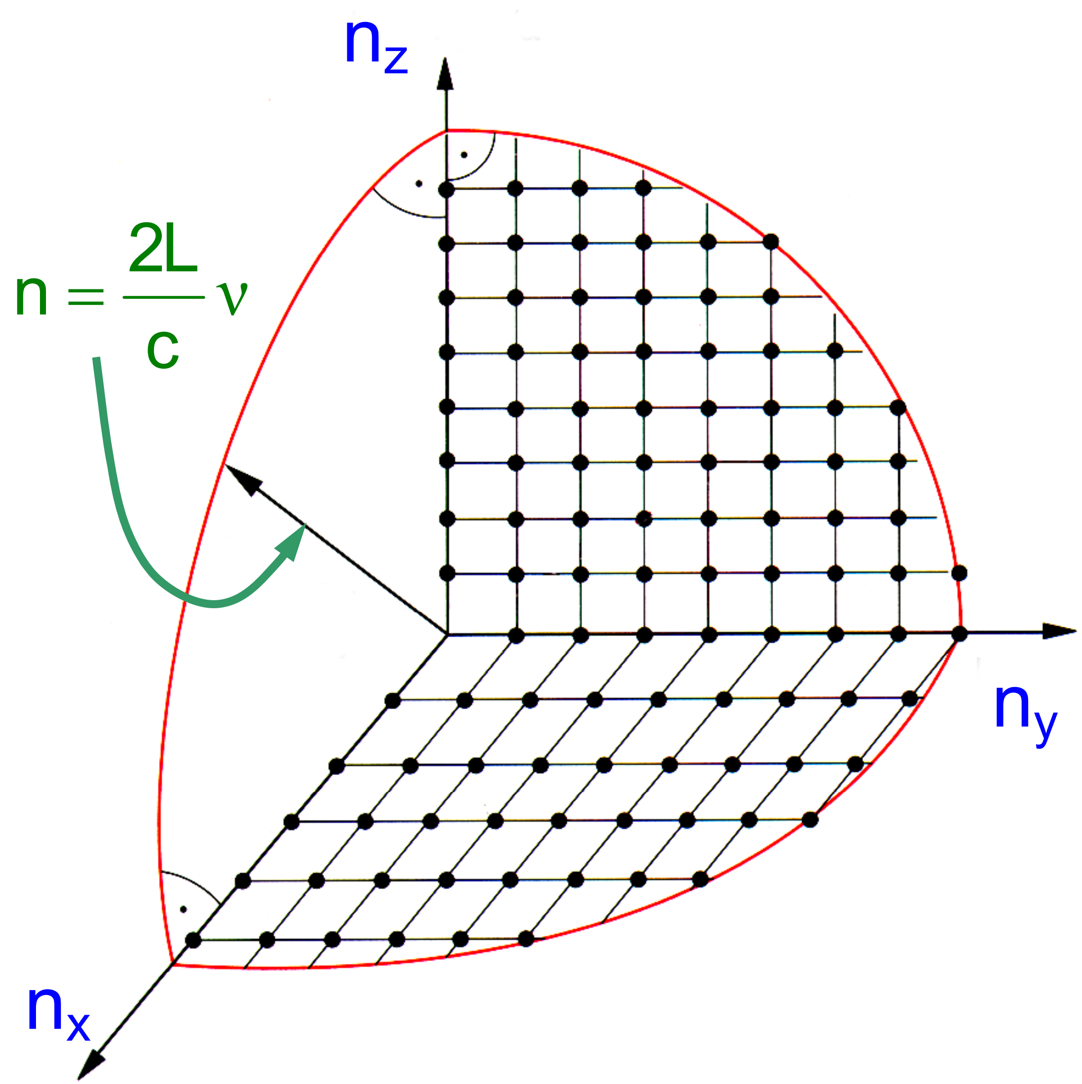
$$n_x \frac{\lambda_x}{2} = L \qquad n_y \frac{\lambda_y}{2} = L \qquad n_z \frac{\lambda_z}{2} = L$$

$$n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\nu L}{c}\right)^2$$

$$n_x = 1,2,3,\ldots \qquad n_y = 1,2,3,\ldots \qquad n_z = 1,2,3,\ldots$$

Jede Schwingungsform (Schwingungsmode) ist in diesem Bild durch ein Zahlentripel (n_x n_y n_z) festgelegt. Berücksichtigt man zwei mögliche voneinander unabhängige Polarisationsrichtungen, so gehören zu jedem Tripel 2 Moden (mit z.B. aufeinander senkrecht stehenden Polarisationsebenen).

Zahl der möglichen Schwingungsmoden in einem kubischen Hohlraum



Tripel ganzer Zahlen mit

$n_x, n_y, n_z \geq 0$

nehmen nur den ersten Oktanden der Kugel mit dem Radius

$$n = \frac{2L}{c}\nu$$

ein. Jedes Tripel charakterisiert einen Gitterpunkt, der für zwei mögliche Moden steht.
Bei großen Werten von L/λ liegen die Gitterpunkte sehr eng –gleichsam kontinuierlich.

Spektrale Energiedichte im Hohlraum

Im positiven Oktanden der Kugelschale zwischen n und n+dn findet man

$$dZ = 2 \cdot \frac{1}{8} 4\pi n^2 \, dn = \pi \left(\frac{2L}{c} \nu \right)^2 \left(\frac{2L}{c} \right) d\nu = \frac{8\pi L^3}{c^3} \nu^2 d\nu$$

Moden. $V=L^3$ ist das Volumen des Hohlraums. Damit wird die Zahl der Schwingungsformen des elektromagnetischen Felds pro Volumen- und Frequenzeinheit

$$\frac{dZ}{L^3 d\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$$

und die spektrale Energiedichte, d.h. die mittlere Energie pro Volumeneinheit und pro Frequenzeinheit, ist dann

$$u_\nu = u_\nu(T) = \frac{dZ}{L^3 d\nu} \bar{\varepsilon} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{\varepsilon}$$

Frage: wie groß ist die mittlere Energie $\bar{\varepsilon}$ pro Schwingungsform?

Mittlere Energie pro Mode, klassisch

Nach der klassischen Thermodyamik kommen Zustände mit Energie E in einem System, das sich bei der Temperatur T in einem thermischen Gleichgewicht befindet, mit der Wahrscheinlichkeit exp(-E/(kT) vor (Boltzmann-Statistik)

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty E \cdot e^{-\frac{E}{kT}}\, dE}{\int_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}}\, dE} = kT$$

Damit wäre die spektrale Energiedichte im Hohlraum (schwarzer Strahler):

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

Dies ist das falsche, in der Natur nicht beobachtete Ergebnis von **Rayleigh** und **Jeans** (Ultraviolett-Katastrophe)

Lord Rayleigh
Nobelpreis 1904

Sir J. H. Jeans

Mittlere Energie pro Mode, heuristisch

W. Wien fand empirisch, dass mit der Annahme

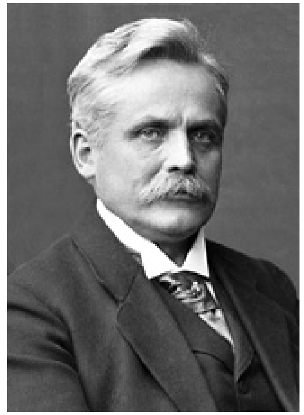
$$\boxed{\bar{\varepsilon} = A \cdot \nu \cdot e^{-\frac{A \cdot \nu}{kT}}}$$

mit einer anzupassenden Konstanten A die experimentell beobachtete spektrale Energiedichte im Hohlraum (Schwarzer Strahler)

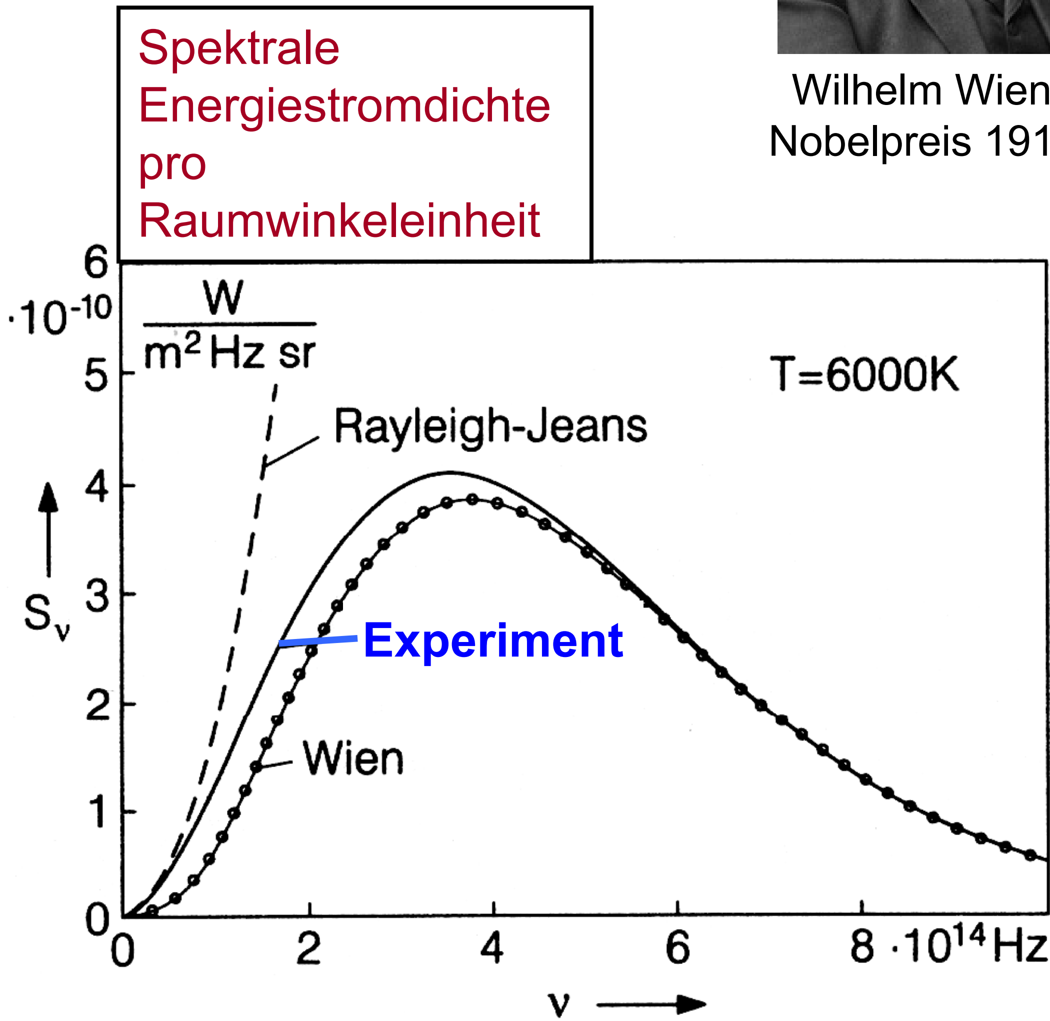
$$u_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\bar{\varepsilon} =$$

$$= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} A \cdot \nu \cdot e^{-\frac{A \cdot \nu}{kT}}$$

recht gut reproduziert werden konnte:



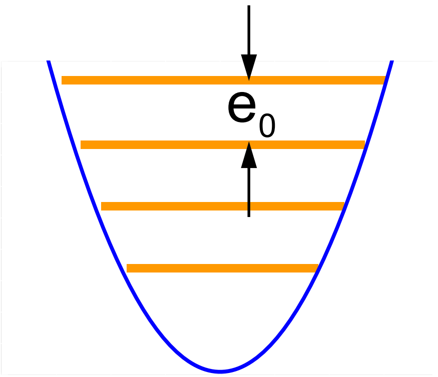
Wilhelm Wien
Nobelpreis 1911



Plancks revolutionäre Annahme:

Oszillatorenergien diskret: ganzzahlige Vielfache von Energiepaketen e_0

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty E \cdot e^{-\frac{E}{kT}}\,dE}{\int_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}}\,dE} \rightarrow \frac{\sum_{n=0}^{\infty} ne_0 \cdot e^{-\frac{ne_0}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{ne_0}{kT}}} = \frac{e_0}{e^{\frac{e_0}{kT}} - 1}$$

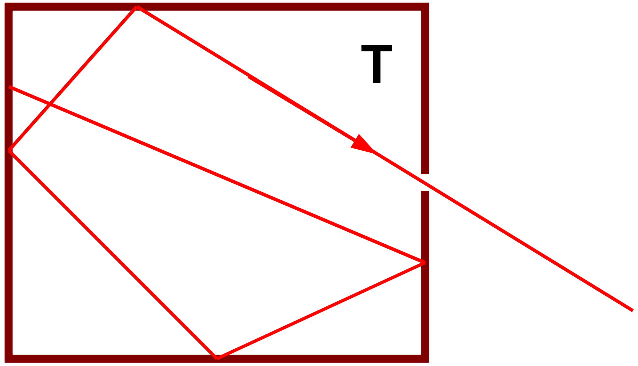


$$\boxed{E = ne_0}$$

$$\boxed{e_0 = h\nu}$$

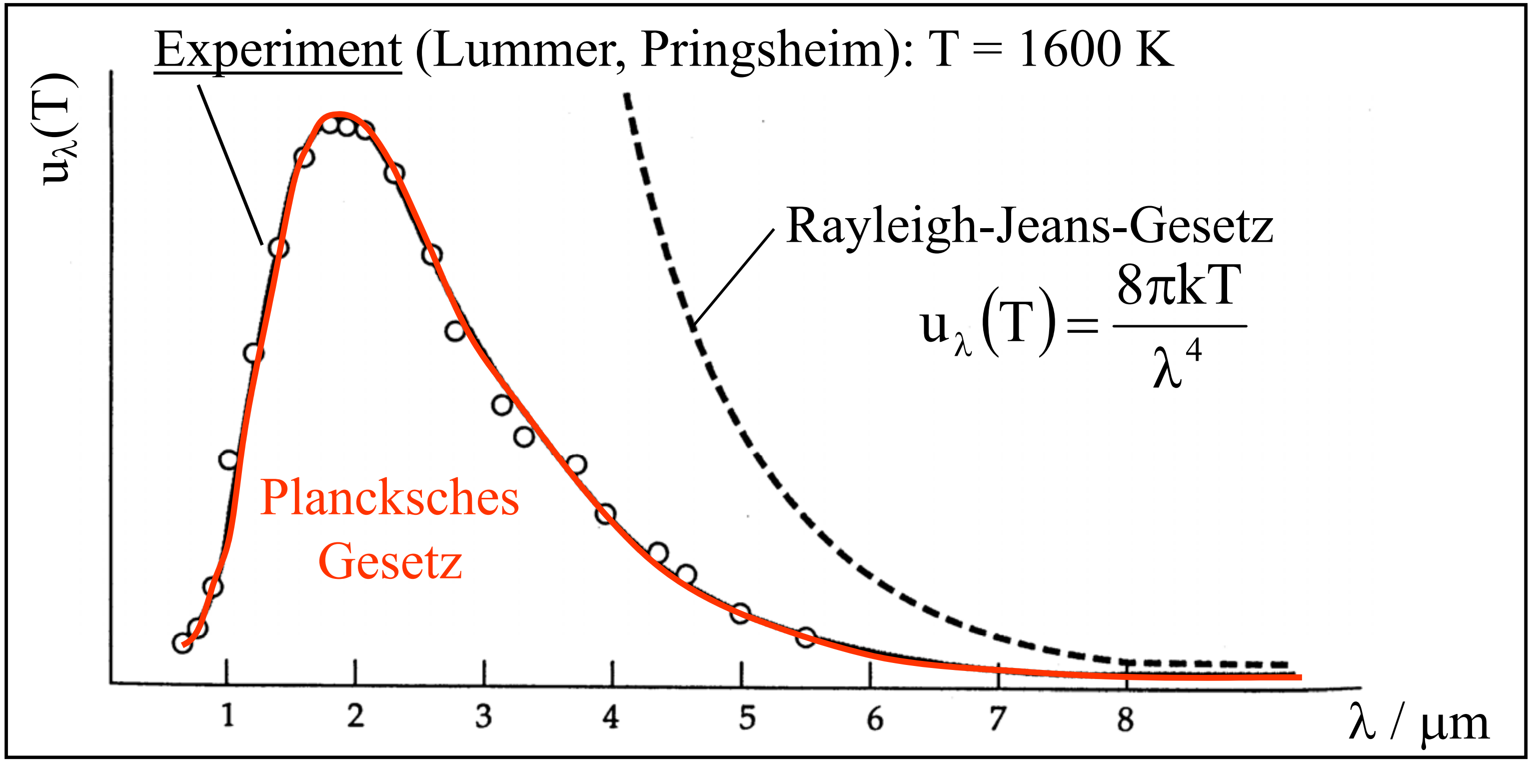
Max Planck

Hohlraumstrahlung

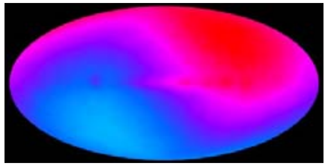


Plancksches Gesetz:
Spektrale Energiedichte im Hohlraum

$$u_\lambda(T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

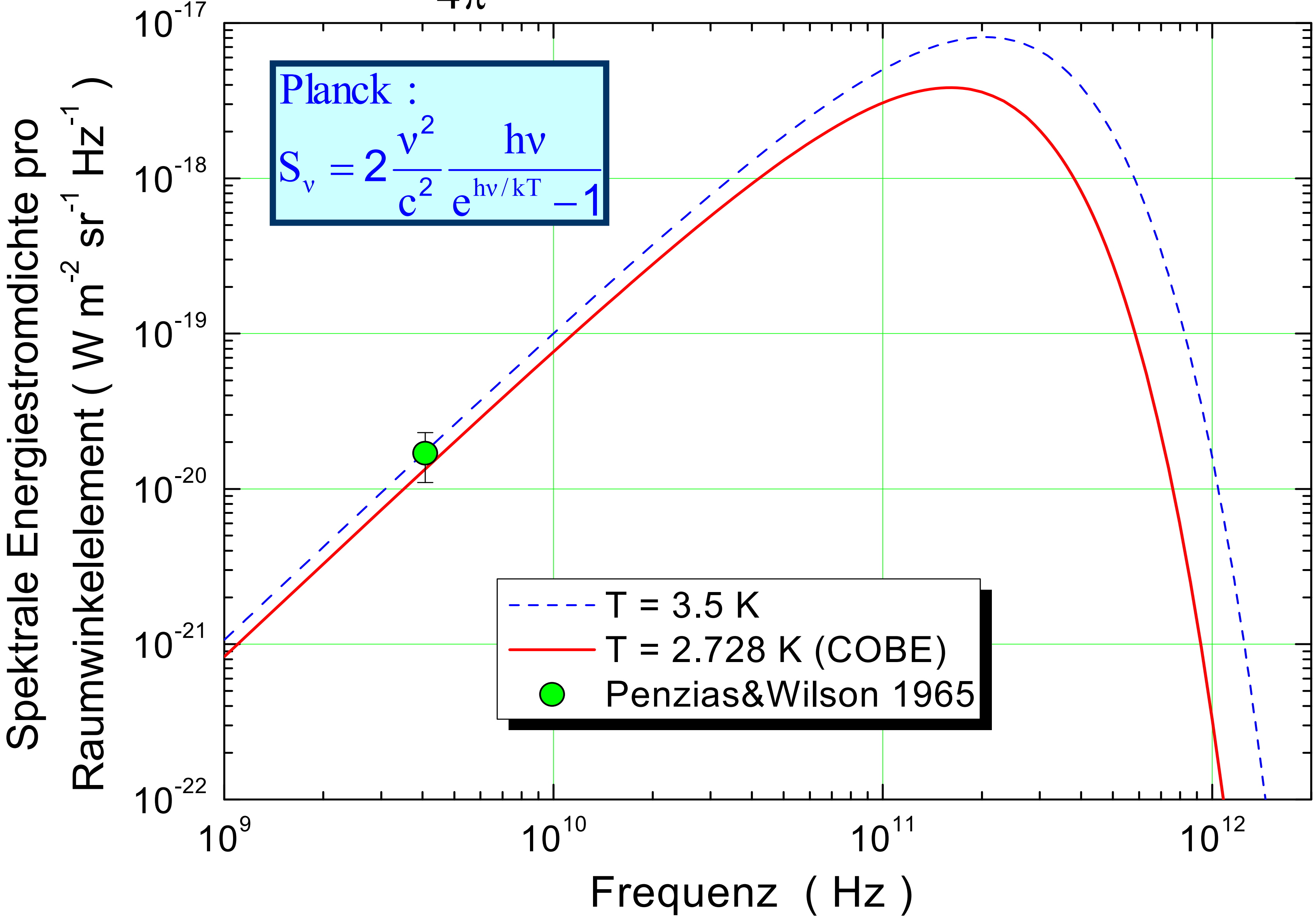


Kosmische Hintergrundstrahlung



COsmic Background Explorer

$$S_\nu = u_\nu \cdot \frac{c}{4\pi}$$



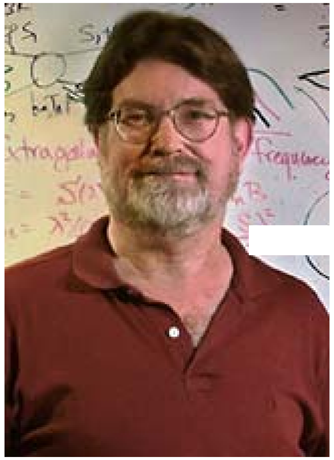
Entdeckung der Kosmischen Hintergrundstrahlung
A. Penzias und R. Wilson 1965

Nobelpreis 1978

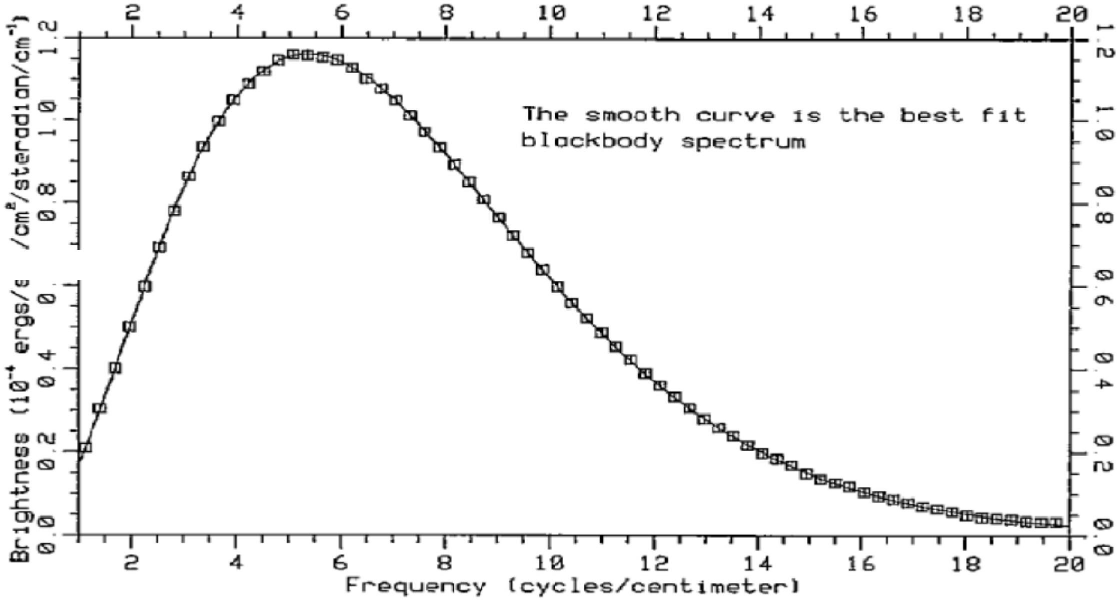
Die Preisträger vor der Hornantenne, mit der sie 1965 bei einer Mikrowellenfrequenz von 4.08 GHz (λ = 7.35 cm) eine isotrope spektrale Energiestromdichte pro Raumwinkelelement von $1.7 \cdot 10^{-20}$ W cm^{-2} sr^{-1} Hz^{-1} gemessen hatten.

Entdeckung der Anisotropie der Kosmischen Hintergrundstrahlung: Nobelpreis 2006

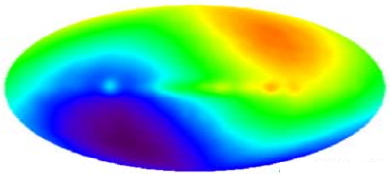
J. C. Mather
NASA



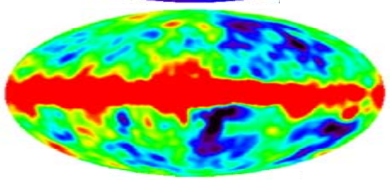
G. F. Smoot
Univ. Berkeley



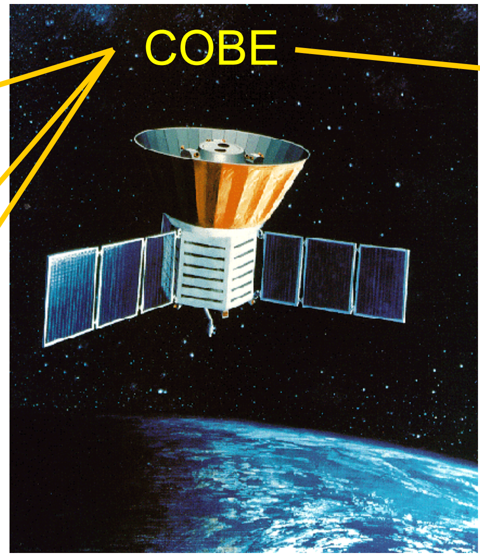
T=2.728K

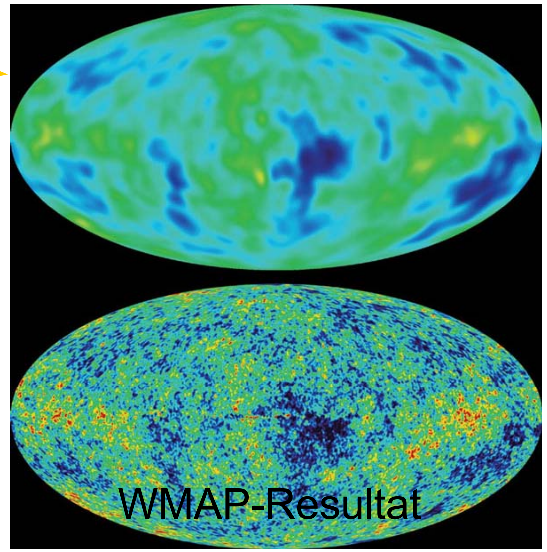


ΔT=3.353mK

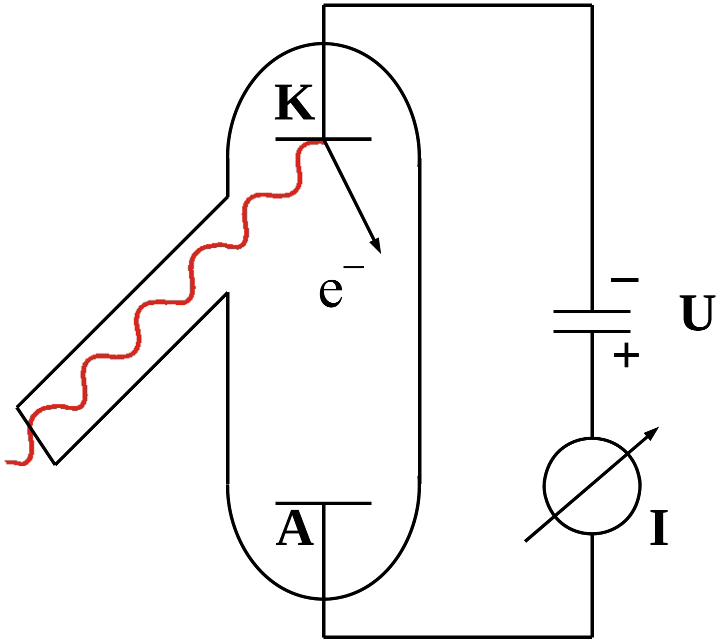


ΔT=18μK





Photoeffekt: Licht als Strom von Energiepaketen



Von H. Hertz (1887) entdeckt und weiter untersucht von P. Lenard (1900)

Licht trifft in einer Röhre auf die Kathode und löst dort Elektronen aus, die zur Anode beschleunigt und als Photostrom registriert werden

Einsteins Erklärung der Experimente: Licht besteht aus Photonen der Energie hν

Ein durch Licht ausgelöstes Elektron erhält die Energie eines einzigen Photons

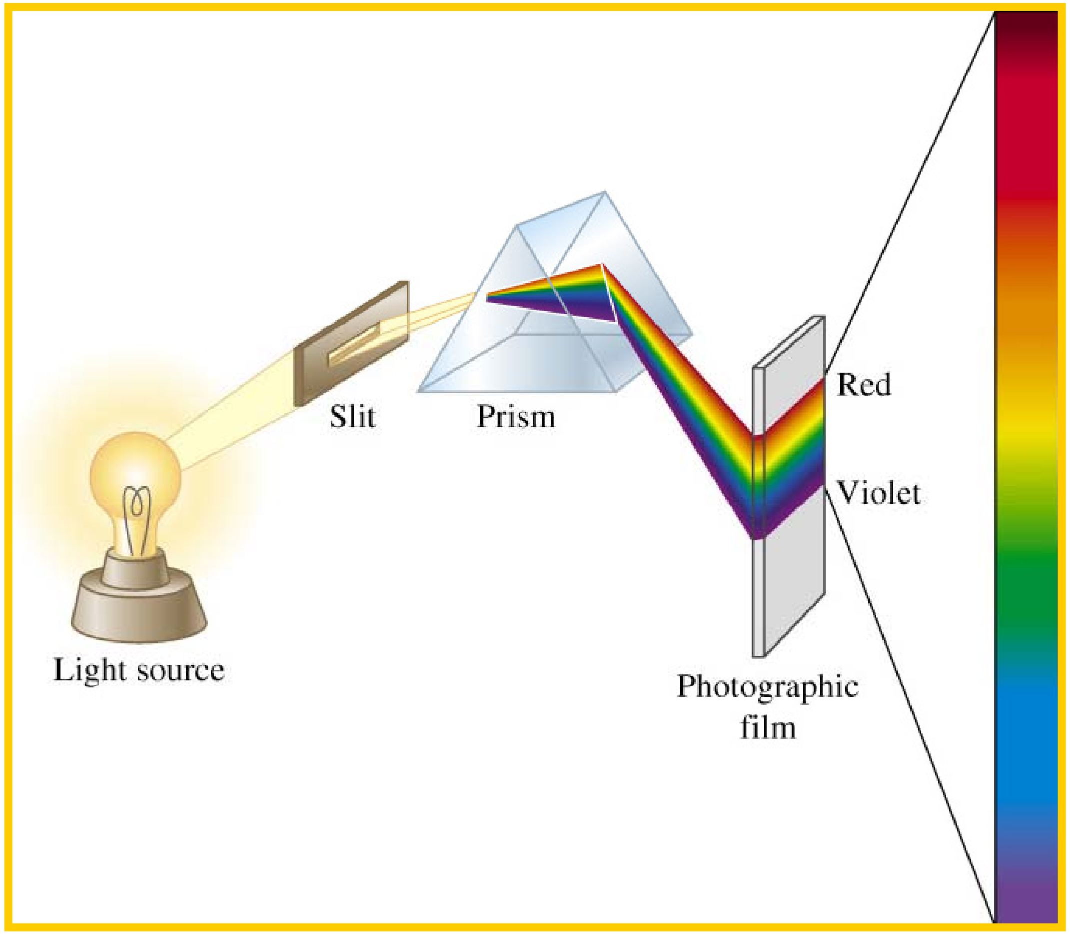
$$E_e = h\nu - W_A$$

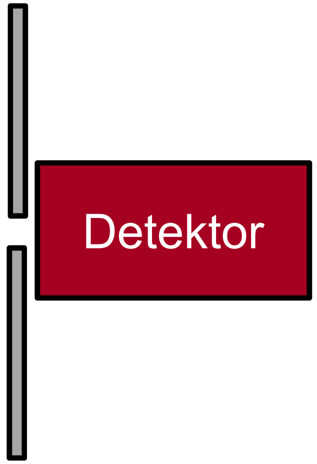
(W_A: Austrittsarbeit)

Freisetzen von Elektronen aus einer Metallschicht

Experiment

K-Schicht: 2.3 eV
gelbgrünes Licht



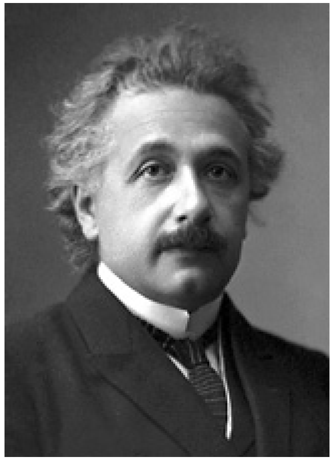


Photoeffekt: Experiment und Theorie

Experimente zum Photoeffekt

Philipp Eduard Anton von Lenard
Nobelpreis für Physik 1905
für seine Arbeiten zur Aufklärung von Kathodenstrahlen

Lehrbuch (1936, 4 Bände): „Deutsche Physik“

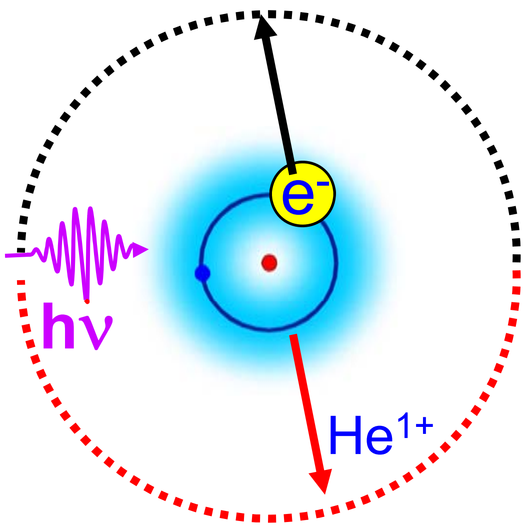


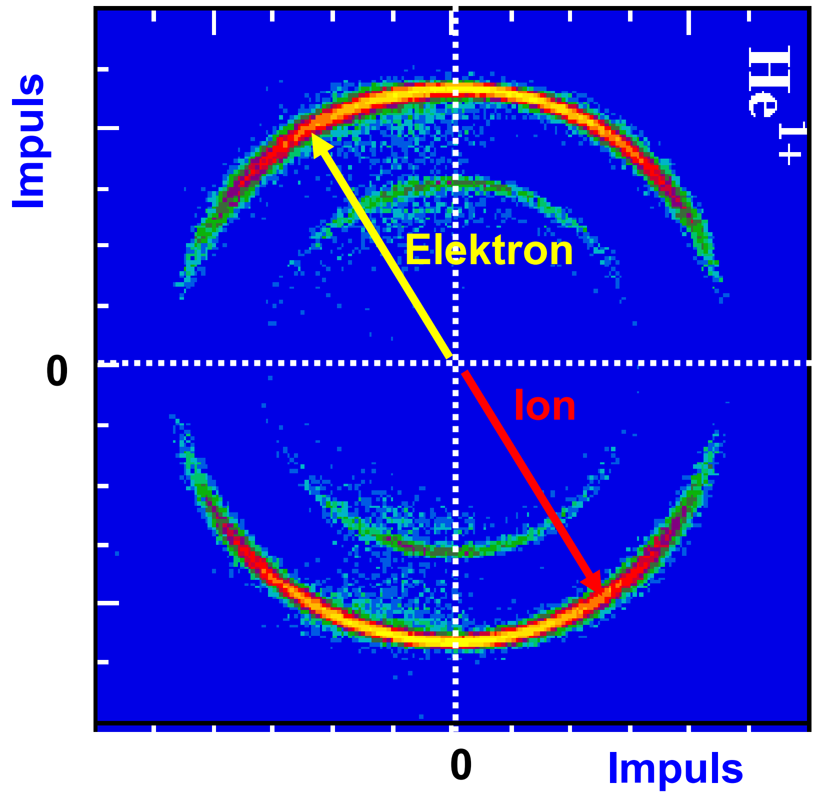
Erklärung des Photoeffekts (1905)

Albert Einstein
Nobelpreis für Physik 1921
Für seine Verdienste um die Theoretische Physik und die Entdeckung des Gesetzes des Photoeffekts

Photoeffekt: Energie- und Impulserhaltung

R. Dörner et al., Frankfurt



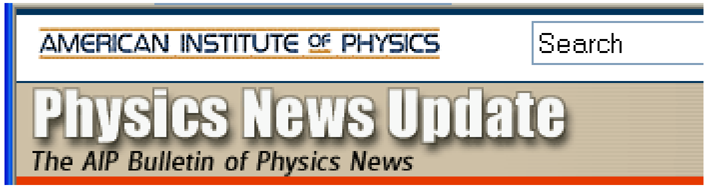


99 eV, linear polarisiertes Licht

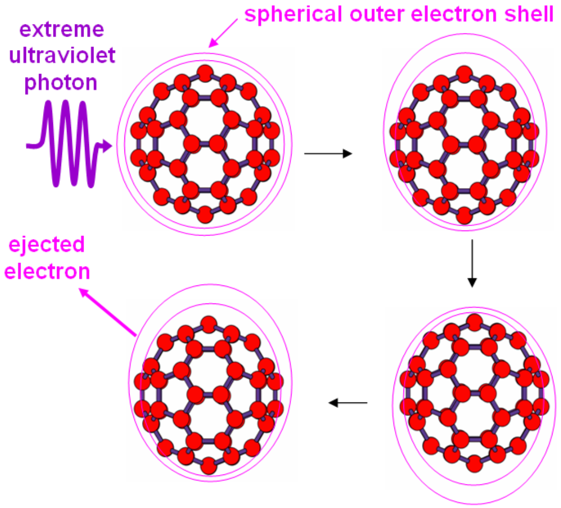
γ + He → He^{1+} + e^{-}

Photoeffekt: Energieübertrag auf viele Elektronen

S. W. J. Scully, E. D. Emmons, M. F. Gharaibeh, R. A. Phaneuf A. L. D. Kilcoyne, A. S. Schlachter, S. Schippers, A. Müller, H. S. Chakraborty, M. E. Madjet, and J. M. Rost
Physical Review Letters 94 (2005) 065503



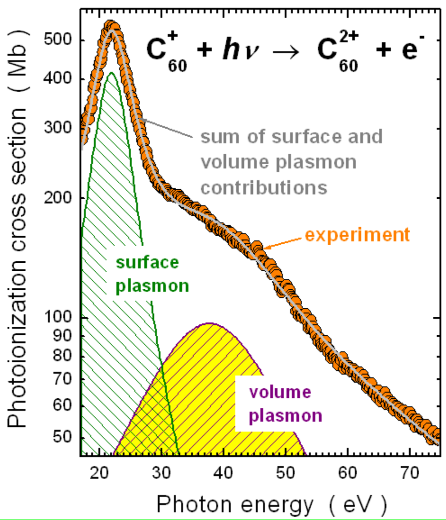
Photoexcitation of a Volume Plasmon in C_{60}^{+} Ions

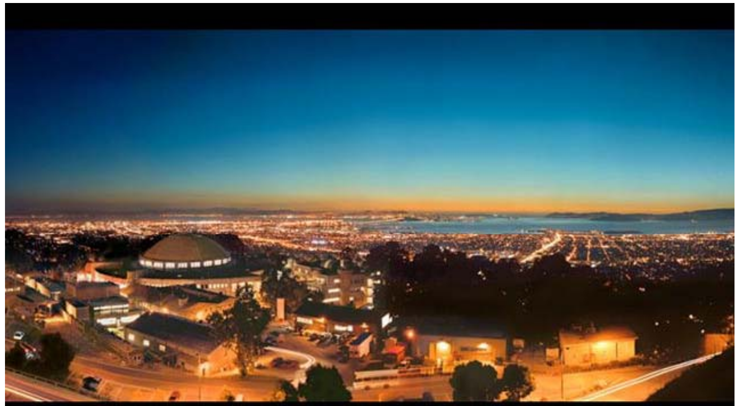


After approximately one period of oscillation of the outer electron shell, one electron may be ejected, resulting in photoionization.

S.W.J. Scully et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 065503 (2005).

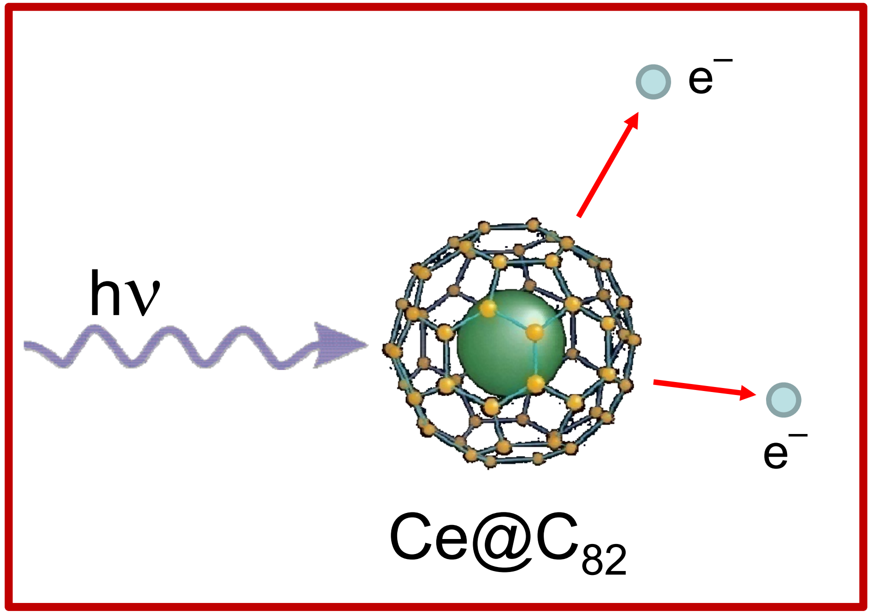
Experiments show evidence for photoexcitation of two distinct modes of collective oscillation of the 239 valence electrons that bind the C_{60}^{+} molecular ion. Both modes may result in the ejection of an electron.

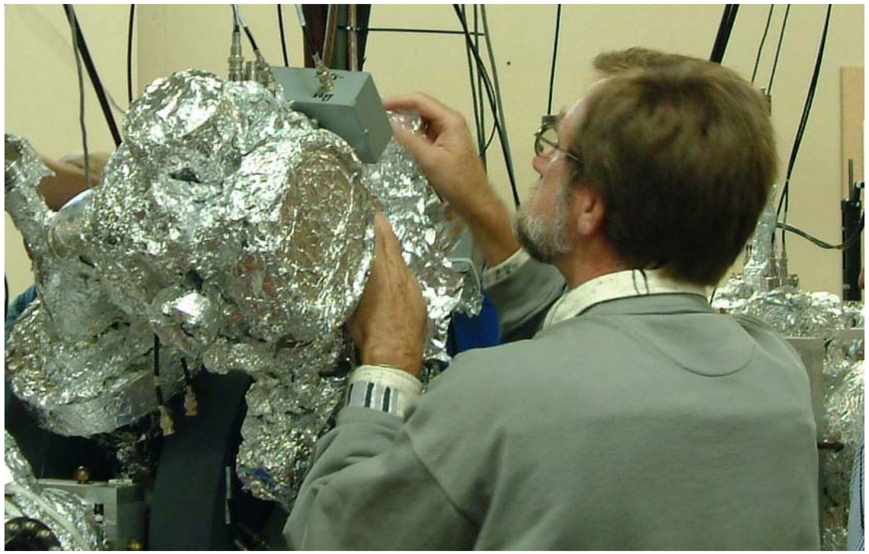


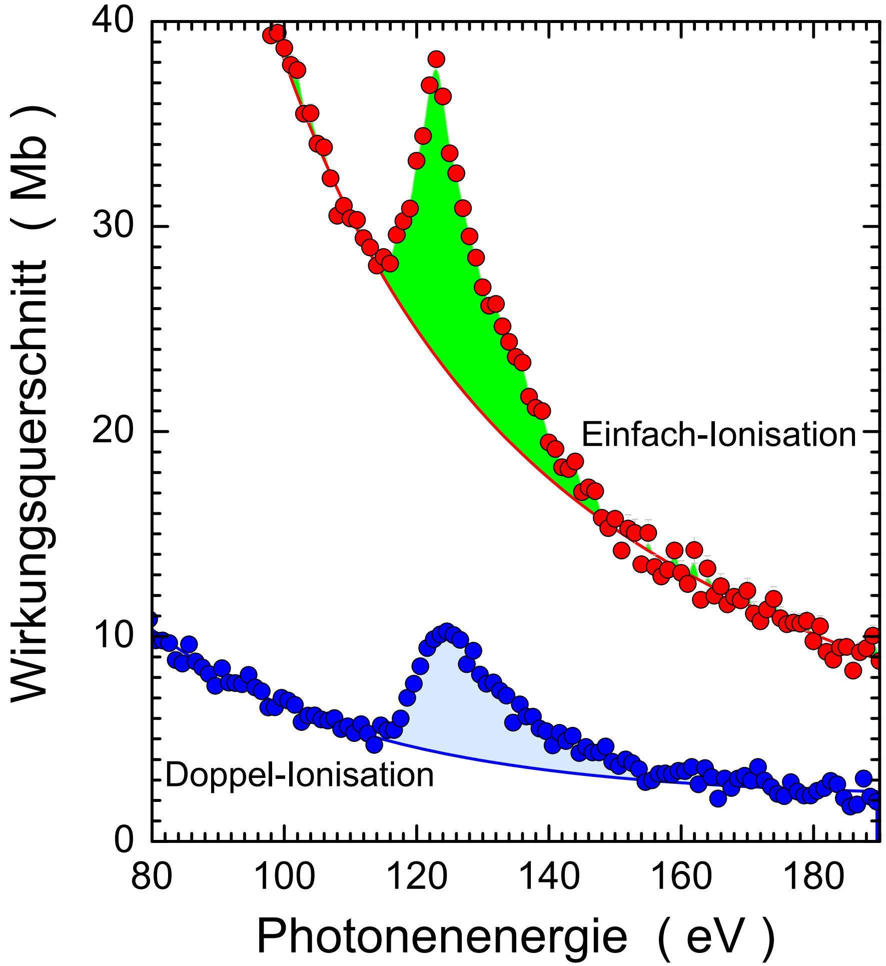


Photoeffekt an einem eingekapselten Cer Atom

A. Müller, S. Schippers, M. Habibi, D. Esteves, J. C. Wang, R. A. Phaneuf, A. L. D. Kilcoyne, A. Aguilar, and L. Dunsch, <u>Physical Review Letters 101 (2008) 133001</u>

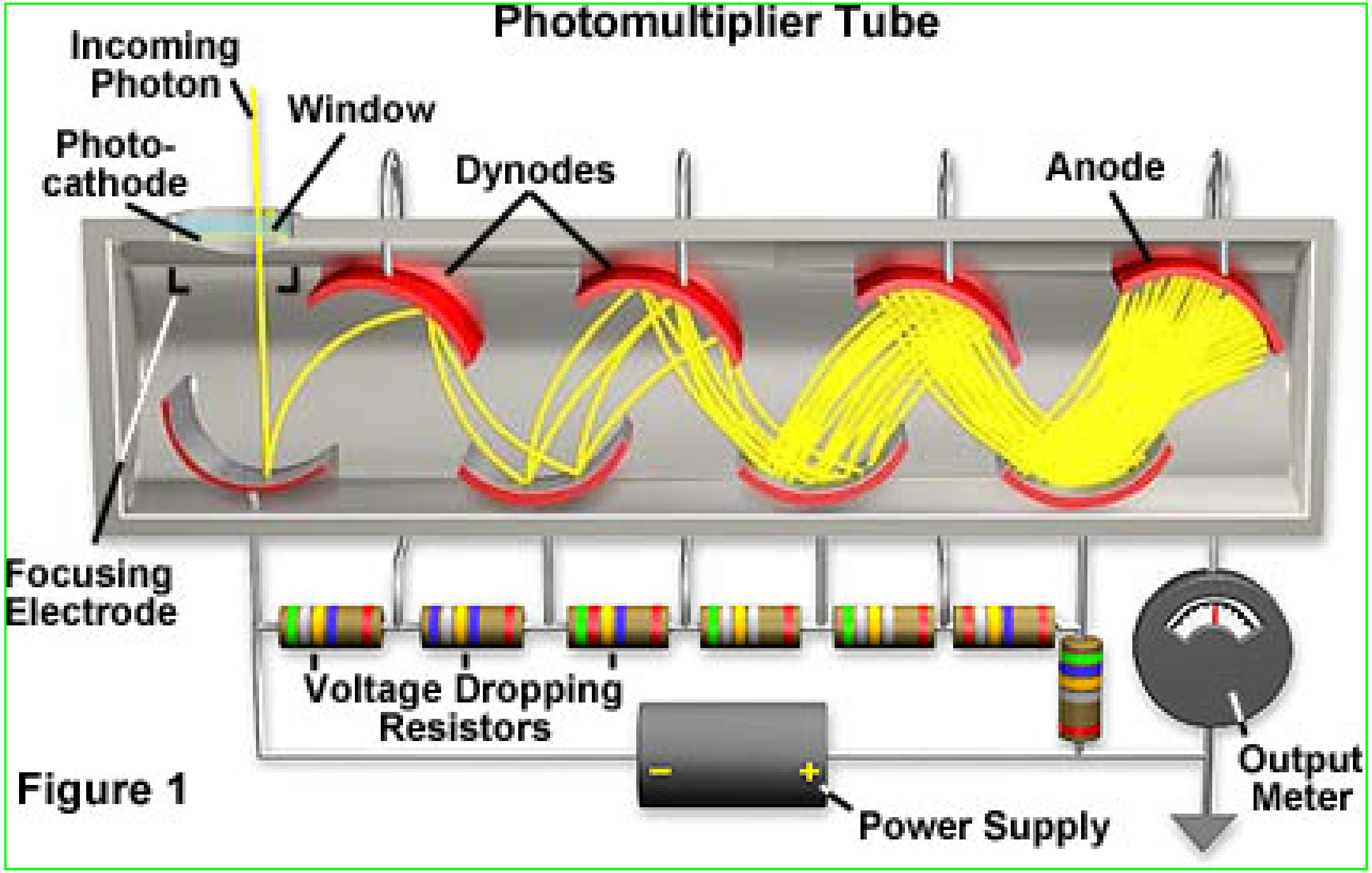






Photoeffekt: Nachweis einzelner Photonen

Photovervielfacher



Lichtstreuung an Elektronen

Thomson: elektrisches Feld der Lichtwelle beschleunigt das Elektron; dessen Schwingungen (Hertzscher Dipol) führen zur Emission von Dipolstrahlung mit identischer Frequenz

Rayleigh: kohärente Anregung der Atomelektronen; Schwingungen führen zur Emission von Licht identischer Frequenz; Streuquerschnitt größer bei blauem als bei rotem Licht

Die Streustrahlung ist polarisiert

Ähnliche Ansätze bei der Lichtstreuung an größeren Teilchen (Staub, Aerosolteilchen, Metallkügelchen, Kolloidteilchen, Clustern)

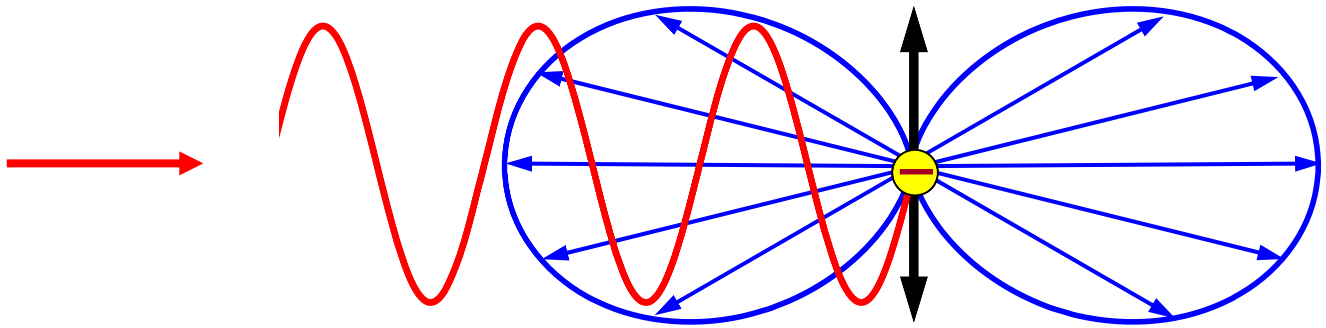
Streuung von Licht an freien Elektronen:

Thomson Streuung (unabhängig von der Energie)

Einstrahlung einer **linear polarisierten Welle auf** ein **freies Elektron**

→ erzwungene harmonische Schwingung

→ Abstrahlung mit Dipolcharakteristik



Differentieller Streuquerschnitt: $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2\theta$$

Totaler Streuquerschnitt: $$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} = 2.82 \cdot 10^{-15}\,\text{m}$$ klass. Elektronradius

Streuung von Licht an gebundenen Elektronen

Einstrahlung einer **polarisierten Welle auf** ein harmonisch **gebundenes Elektron**

$\rightarrow$ erzwungene Schwingung mit rücktreibender Kraft $m_e(\omega_{osc})^2 x$

$\rightarrow$ Resonanzanregung bei Kreisfrequenz $\omega=\omega_{osc}$

Reibungskraft repräsentiert eine Zustandsbreite (γ)

$$\boxed{m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = eE_0 \cos\omega t}$$

Totaler Streuquerschnitt:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_{osc}^2\right)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

Grenzfall $\omega \ll \omega_{osc}$, $\omega\gamma \ll (\omega_{osc})^2$:

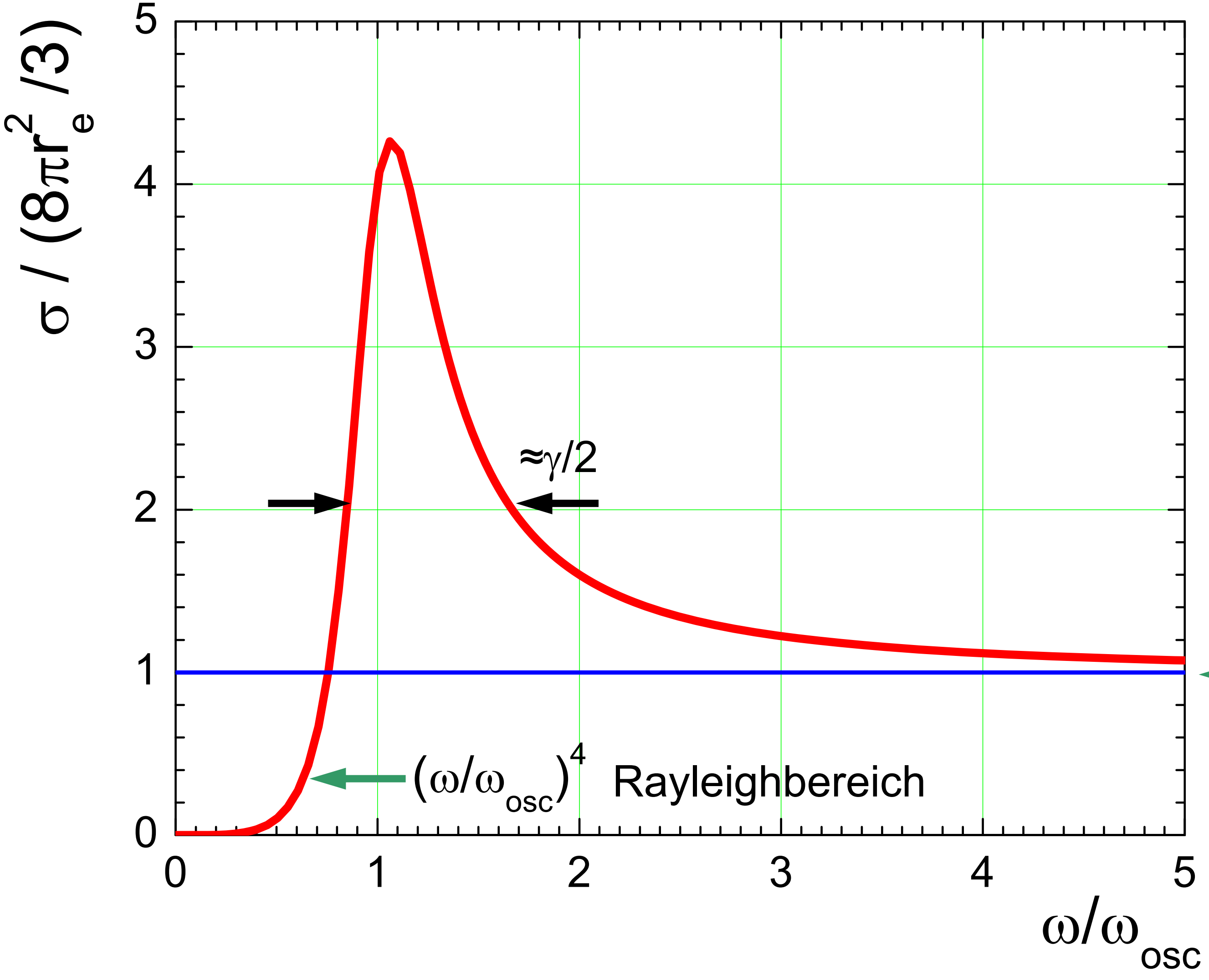
Rayleigh-Streuung

Licht hoher Frequenz wird stark gestreut

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{\omega_{osc}^4}$$

Streuung von Licht an gebundenen Elektronen:

klassisches Resonanzphänomen



Wirkungsquerschnitt für kohärente Streuung an Z Elektronen eines Atoms:

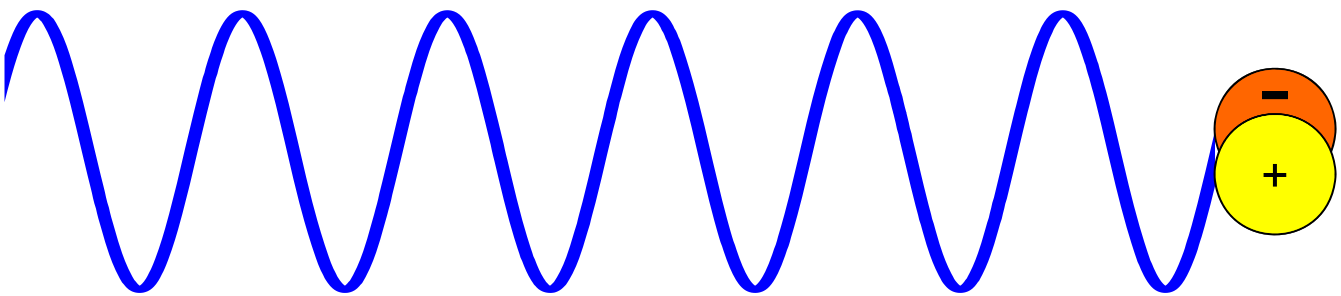
$\sigma \sim Z^2$

Thomson-Streuquerschnitt (bei hohen Energien sind die Atomelektronen quasi-frei)

Wirkungsquerschnitt für inkohärente Streuung an Z Elektronen eines Atoms: $\sigma \sim Z$

Klassisches Bild der Streuung von Licht

Ein oszillierendes elektromagnetisches Feld greift an klassischen Oszillatoren an

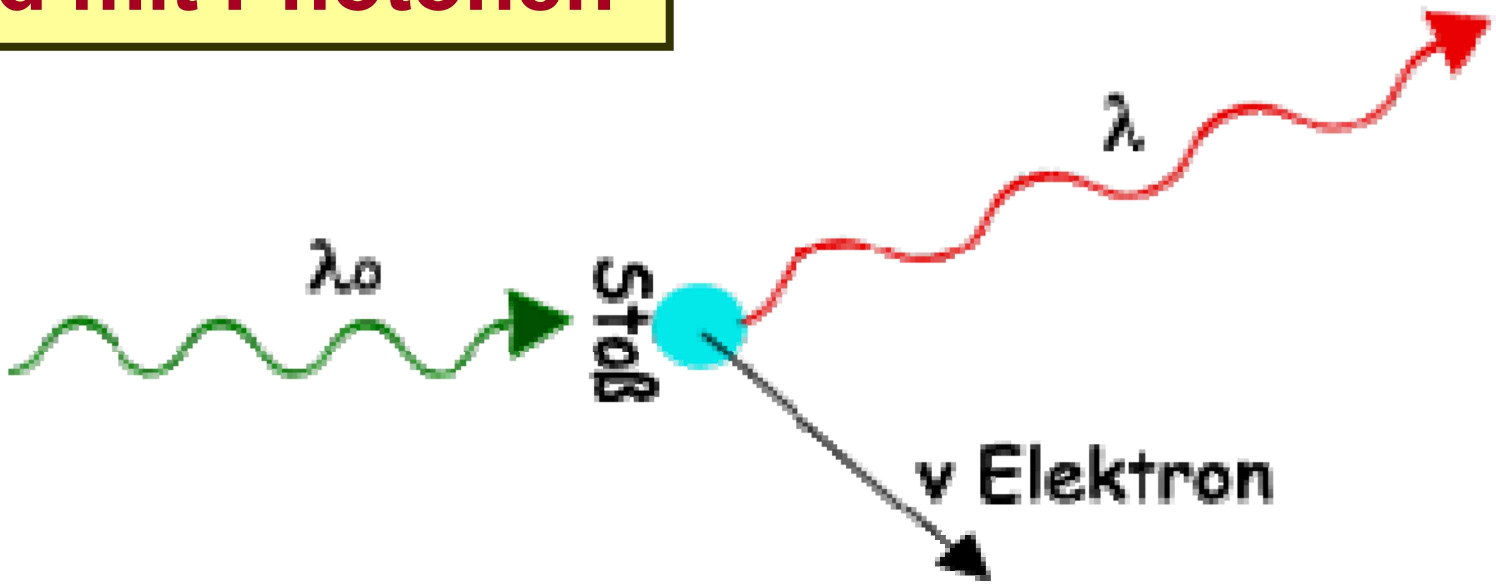


$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx)$$

Streuung von kurzwelligem Licht an Elektronen

Licht als Strom von diskreten Wellenpaketen:

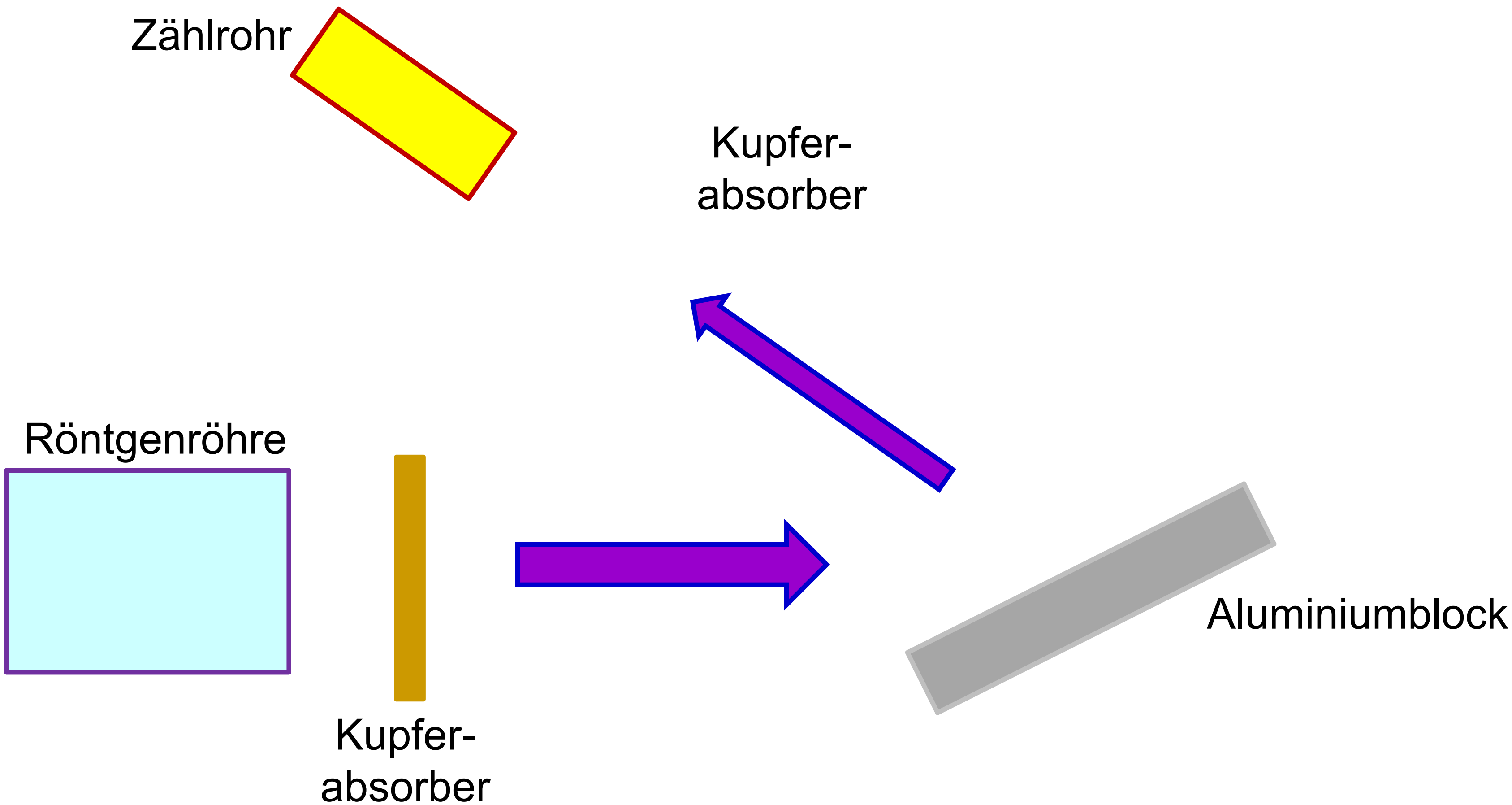
Billard mit Photonen



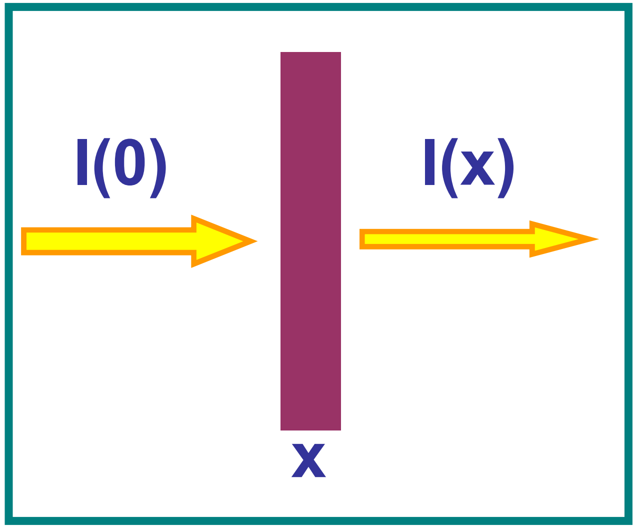
Impuls eines Photons: $p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h}{\lambda}$

Streuung von Röntgenstrahlen an Aluminium

Experiment



Abschwächung von Röntgenstrahlen in Materie



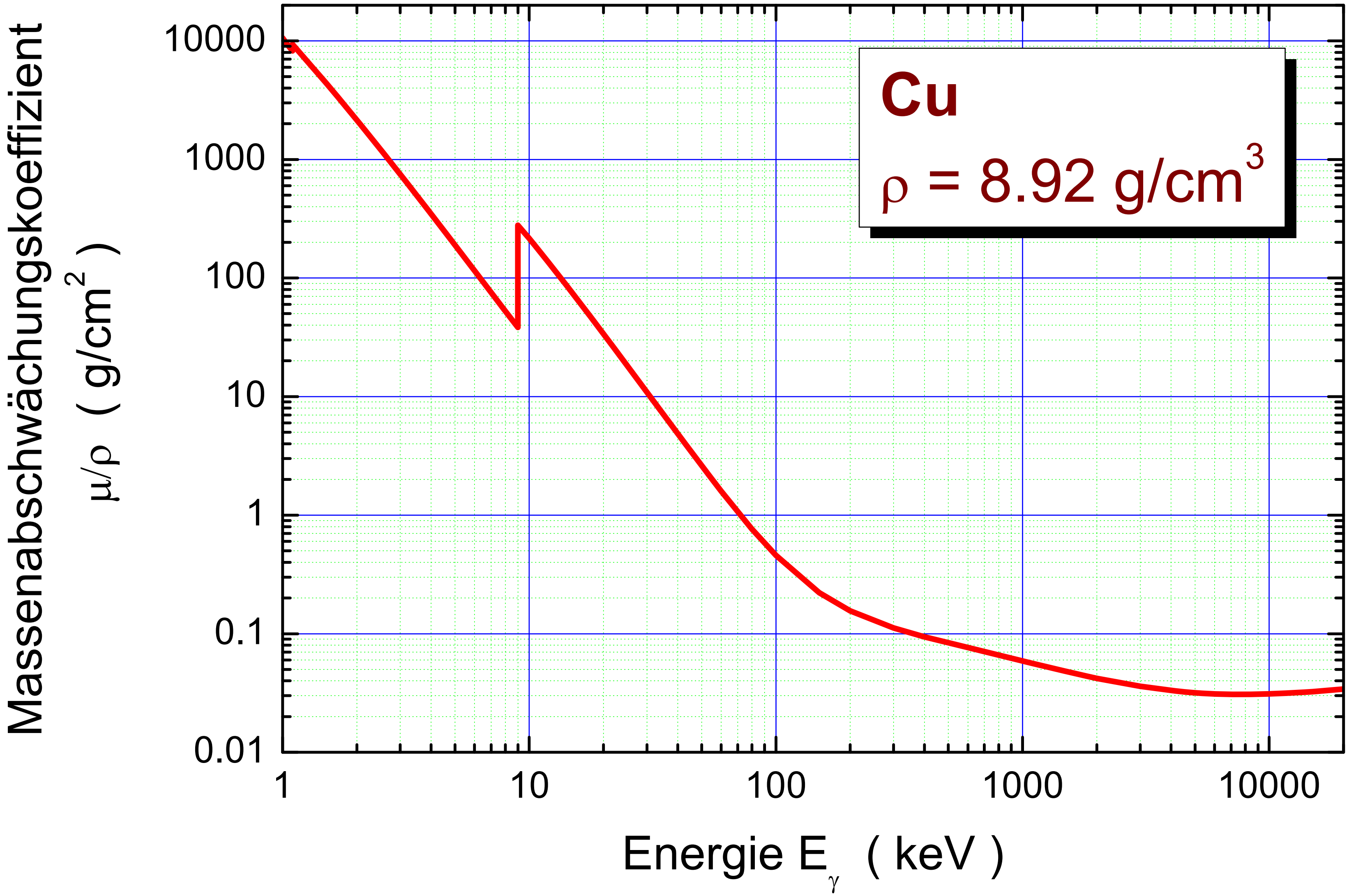
x geometrische Dicke des Absorbers

μ Schwächungskoeffizient

ρ Massendichte des Absorbers

$$I(x) = I(0)\, e^{-\mu x} = I(0)\, e^{-\frac{\mu}{\rho}\rho x}$$

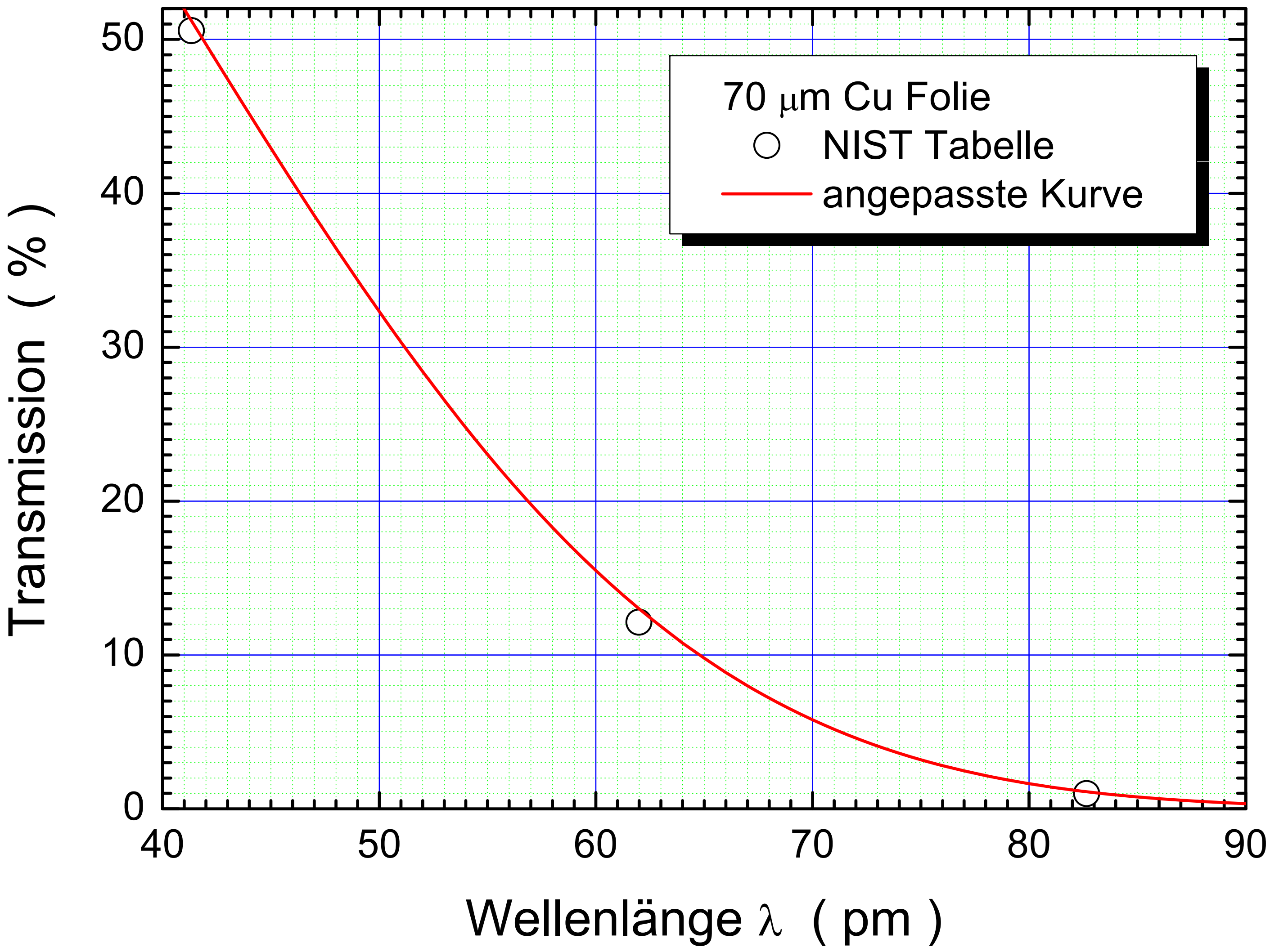
Abschwächung von Röntgenstrahlen in Kupfer



http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/tab3.html

Abschwächung von Röntgenstrahlen der Wellenlänge λ in 70 µm dicker Kupferfolie

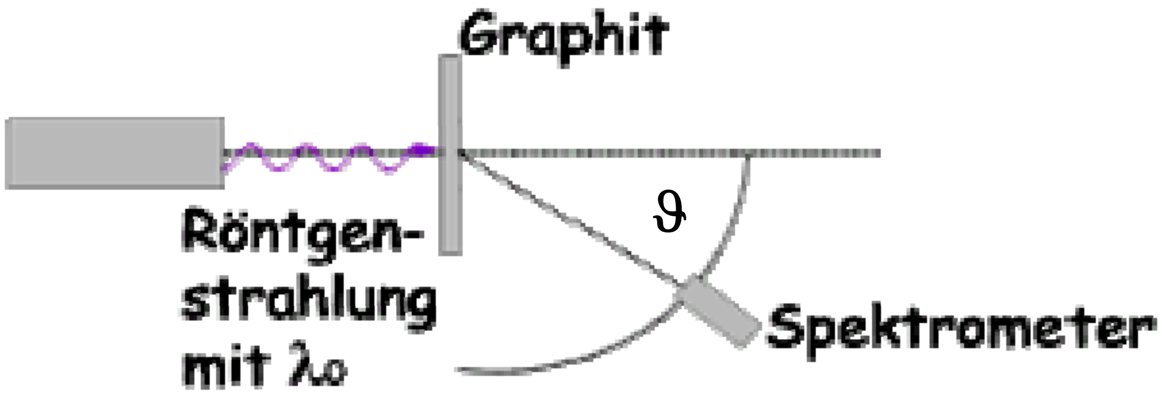
Idee: aus der Änderung der Transmission kann man auf eine Änderung der Wellenlänge schließen

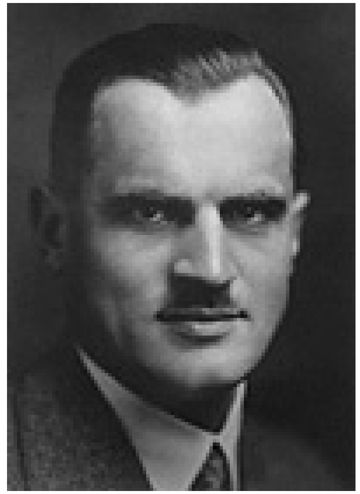


Comptonstreuung

Streuung von Röntgenstrahlung an Materie

Comptons Experiment (Phys. Rev. 22, 1923)



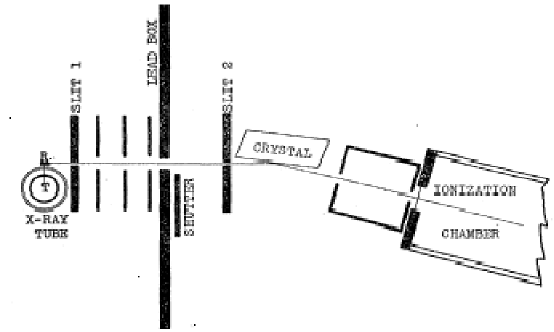


Arthur Holly Compton

Nobelpreis 1927

Charakteristische Röntgenstrahlung Mo-K_α : λ_0

Bestimmung der Streuwellenlänge mit Bragg-Kristall und Ionisationskammer



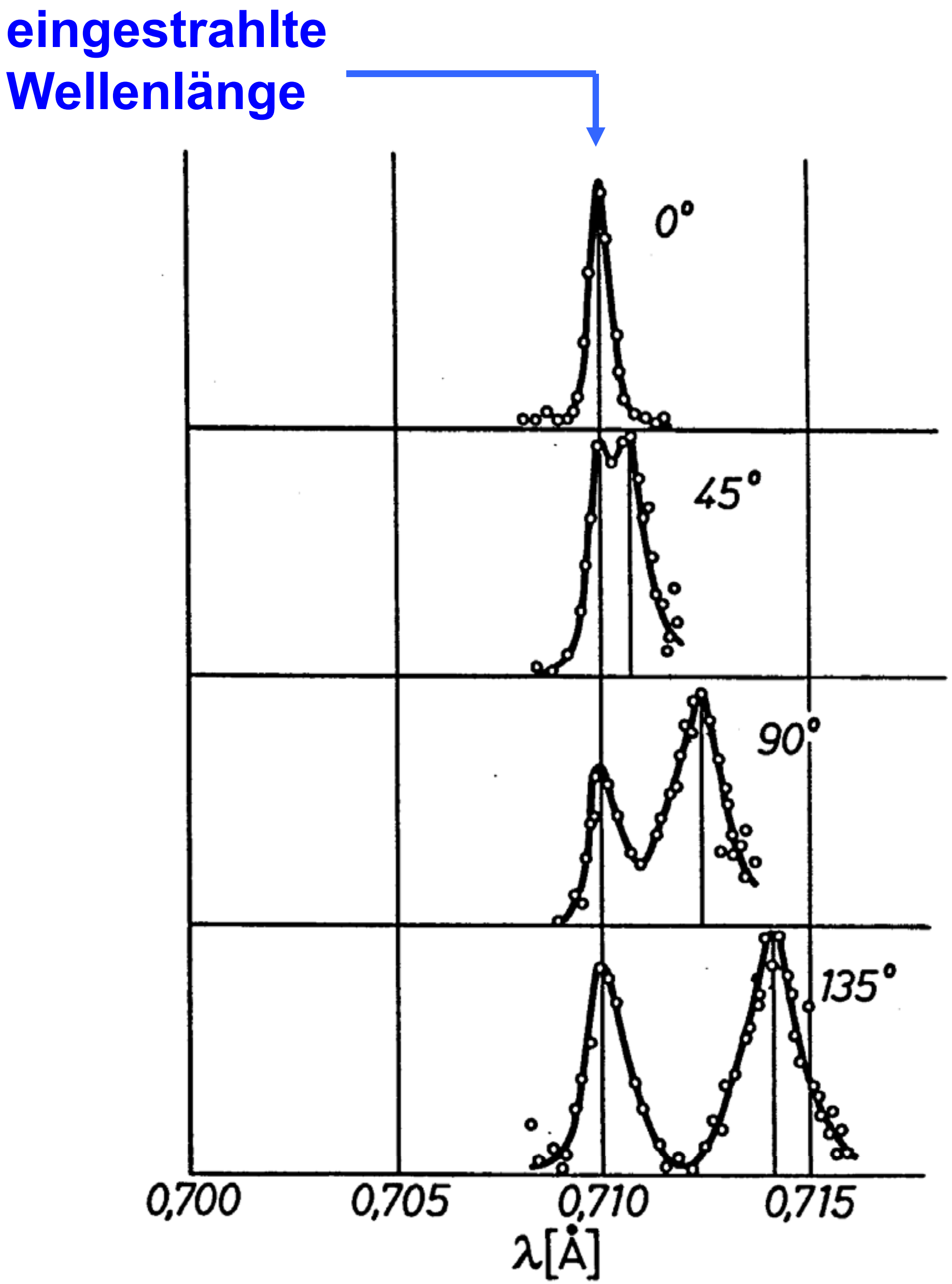
Comptons Resultat

Beobachtung größerer Wellenlängen im Spektrum der gestreuten Röntgenstrahlung

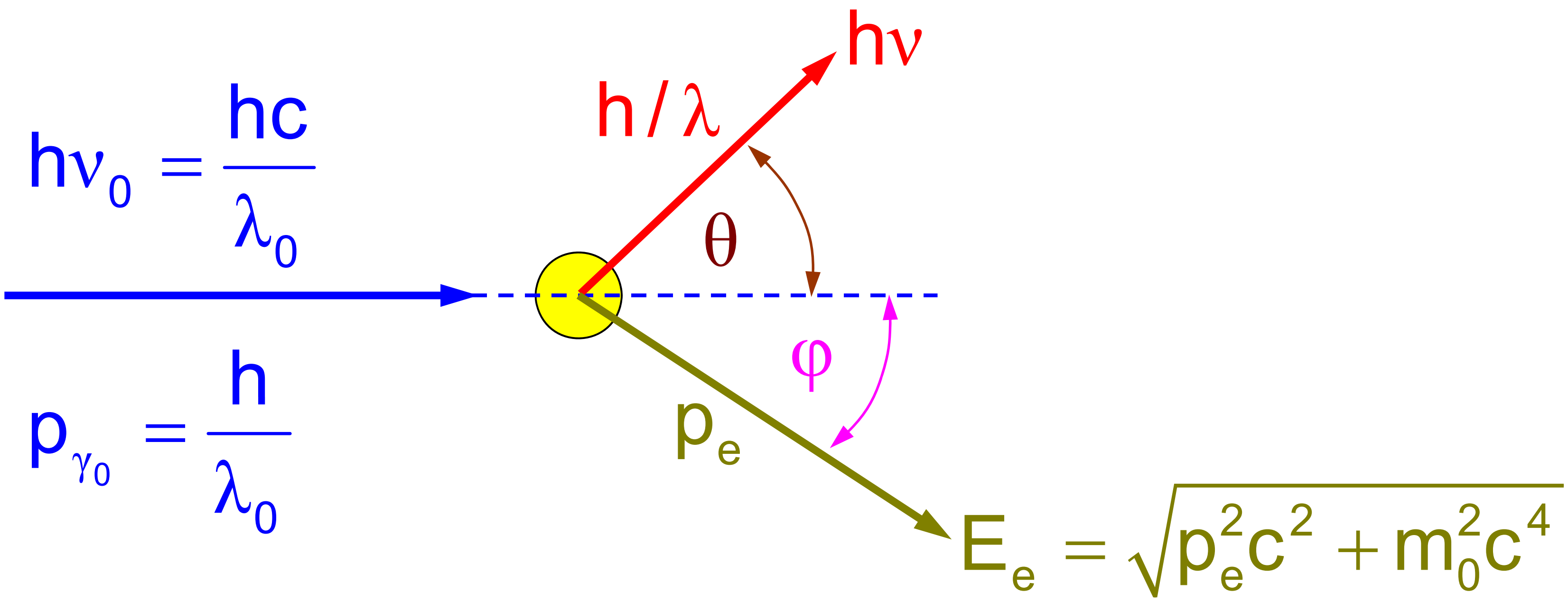
$$\boxed{\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\theta\right)}$$

Compton-Wellenlänge des e^-:

$$\boxed{\lambda_C = \frac{h}{mc} = 2.4 \times 10^{-12}\,\mathrm{m}}$$



Comptoneffekt



Annahme: **Streuung an freiem, ruhendem Elektron**

Impulserhaltung:

$$\vec{p}_{vor} = \vec{p}_{\gamma_0} = \vec{p}_e + \vec{p}_\gamma = \vec{p}_{nach}$$

Energieerhaltung:

$$E_{vor} = m_0 c^2 + h\nu_0 = E_e + h\nu = E_{nach}$$

Streuwellenlänge beim Comptoneffekt

$$\vec{p}_{vor} = \vec{p}_{nach}$$

$$x: \quad \frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{\lambda}\cos\theta + p_e \cos\varphi$$

$$y: \quad 0 = \frac{h}{\lambda}\sin\theta - p_e \sin\varphi$$

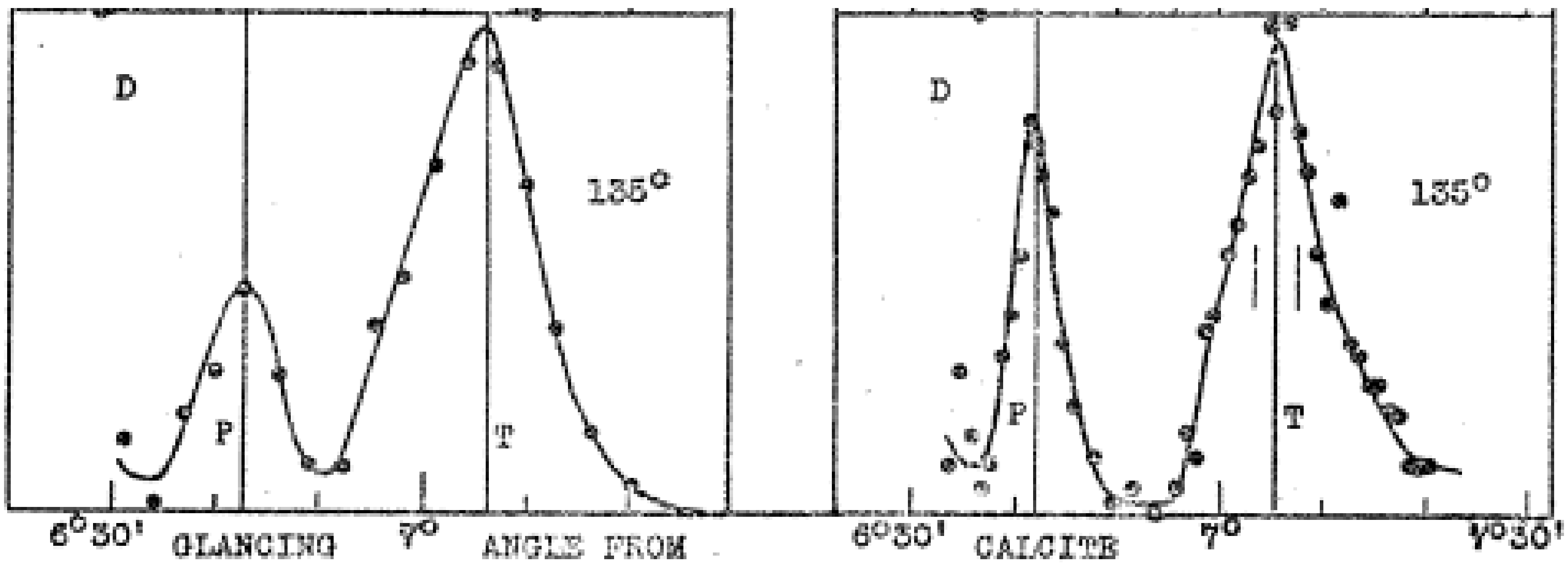
$$E_{vor} = E_{nach}$$

$$\frac{hc}{\lambda_0} + m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda} + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

Vorgehen: löse Impulsgleichungen nach den Impulskomponenten des Elektrons auf; eliminiere φ durch Quadrieren und Addieren der beiden Gleichungen; das resultierende $(p_e)^2$ wird mit dem aus der Energiegleichung gewonnenen $(p_e)^2$ gleichgesetzt; dann wird zusammengefasst und nach $(\lambda - \lambda_0)$ aufgelöst:

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

Comptonprofil gebundener Elektronen



Aus Comptons Originalarbeit

rechts: Schlitzbreite verkleinert → höhere Auflösung der Bragg-Analyse

Energiebreite der gestreuten Photonen deutlich erhöht als Folge der Impulsverteilung gebundener Elektronen: Comptonprofil

Eigenschaften des Photons

Energie: $E = h\nu$

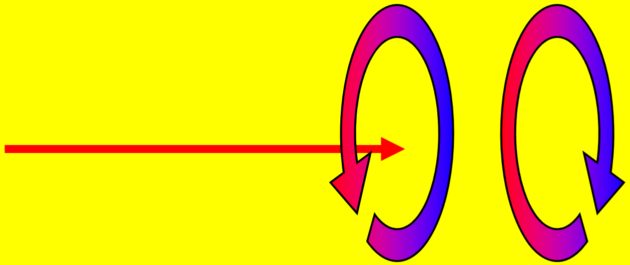
Impuls: $p = h/\lambda = h\nu/c$

"Masse": $m = E/c^2 = h\nu/c^2$

Ruhemasse: $m_0 = 0$

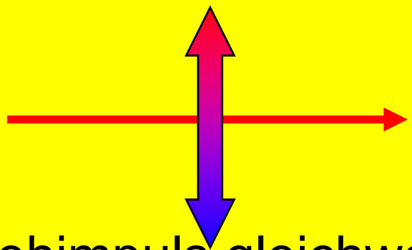
Eigendrehimpuls: $s_{ph} = \hbar$

zirkularpolarisiertes Licht



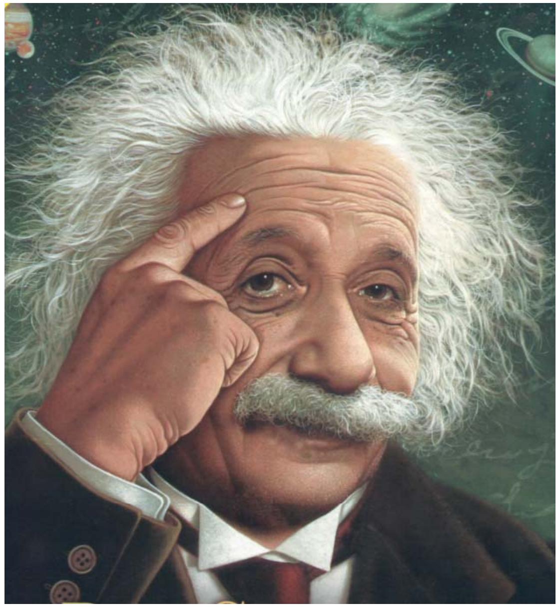
Photonendrehimpuls $\pm \hbar$

linear polarisiertes Licht



Drehimpuls gleichwahrscheinlich
in oder gegen Ausbreitungsrichtung

Was wiegen Photonen?



Einstein: **Licht** wird **in Gravitationsfeldern** abgelenkt. Photonen der Energie **$E=h\nu$** verhalten sich so, als hätten sie die **Masse $m_\gamma=h\nu/c^2$**

Photonen, die in einem homogenen Schwerefeld der Beschleunigung g von z=0 auf z=H aufsteigen, verlieren damit die Energie:

$$\Delta E = h\Delta\nu = m_\gamma gH = \frac{h\nu}{c^2} gH$$

Dementsprechend ist die bei z=H gemessenen Frequenz verringert auf:

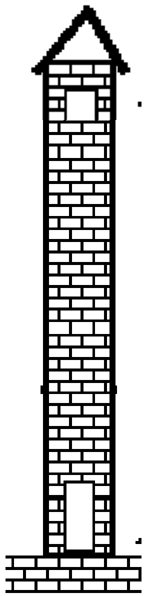
$$\boxed{\nu' = \nu - \Delta\nu = \nu\cdot\left(1-\frac{gH}{c^2}\right)}$$

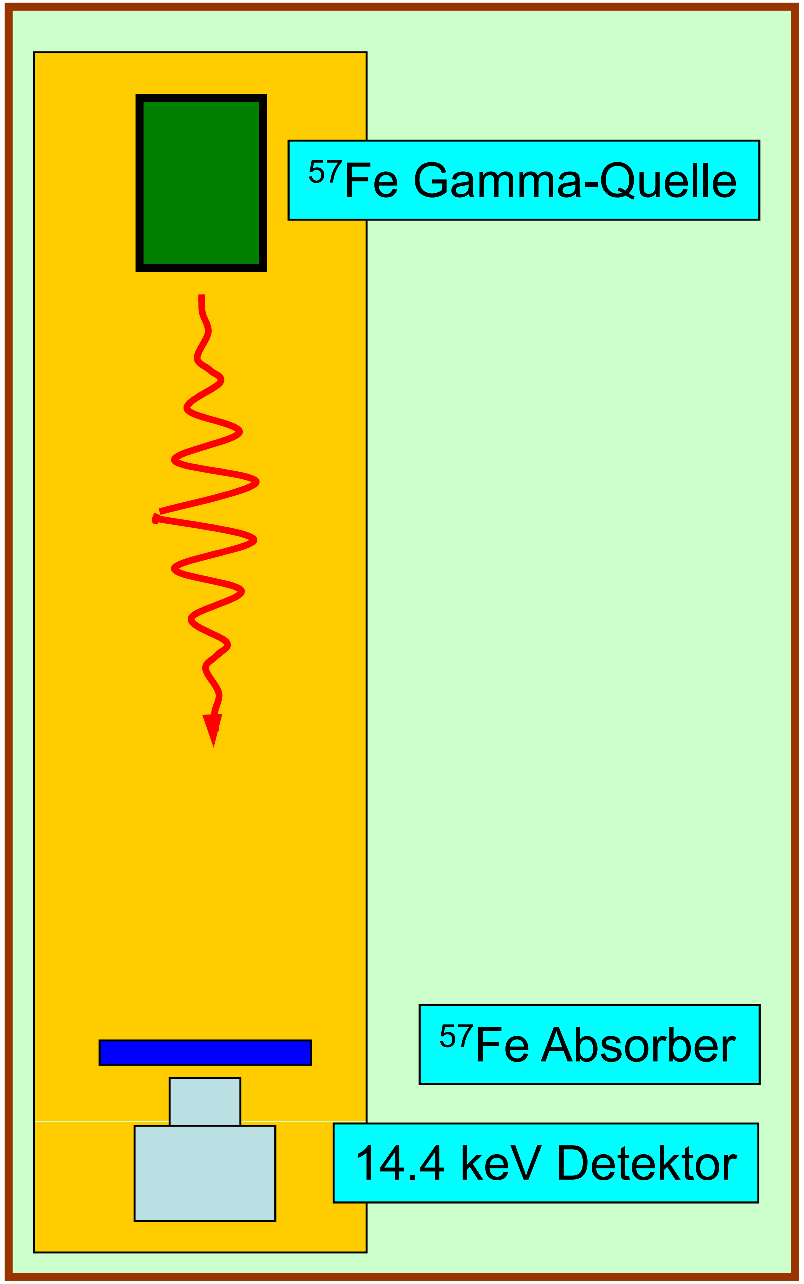
Frequenzverschiebung fallender Photonen

„Fällt" ein Photon der Anfangsfrequenz ν von einem Turm der Höhe **H=22.5m**, so ist die relative Frequenzverschiebung

$$\boxed{\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gH}{c^2} \approx 2.45 \cdot 10^{-15}}$$

1959: Vorschlag von **R.V. Pound** und **G. A. Rebka**, Universität Harvard, diese Verschiebung über den Mößbauer-Effekt an einem Turm zu messen





Mößbauer-Effekt

Rudolf Mößbauer
geb. 1929
Nobelpreis 1961

Frage:
kann die von einem Fe-57 Kern emittierte γ-Strahlung von einem zweiten Fe-57 Kern absorbiert werden?

Probleme:
freie Atome bewegen sich und verursachen **Doppler-Verschmierung** der Strahlungsenergie;

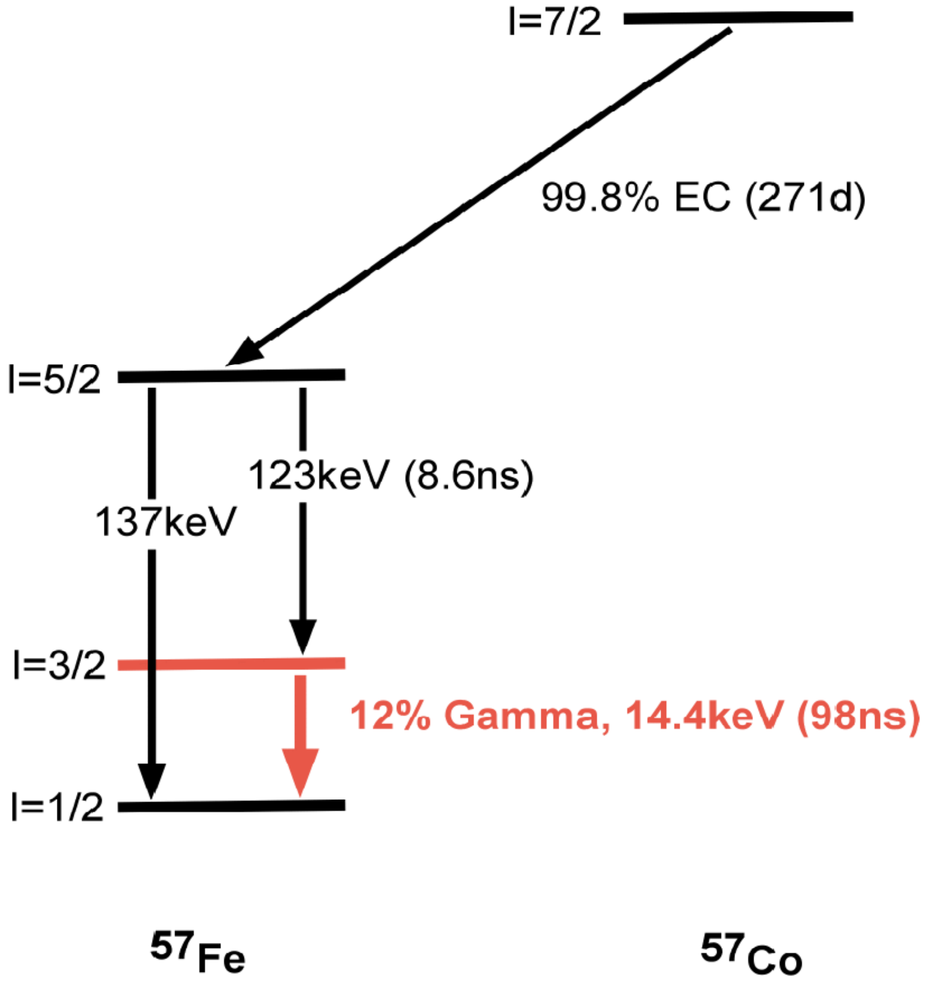
Energiereiche Photonen übertragen so viel **Rückstoß-Impuls** auf den emittierenden und den absorbierenden Kern, dass die Photonenenergie nicht mehr für eine Anregung des identischen Zustands ausreicht

Mößbauers Lösung:
Einbau der Kerne bzw. Atome **in Kristalle**, die teilweise Impuls aber keine Energie aufnehmen.

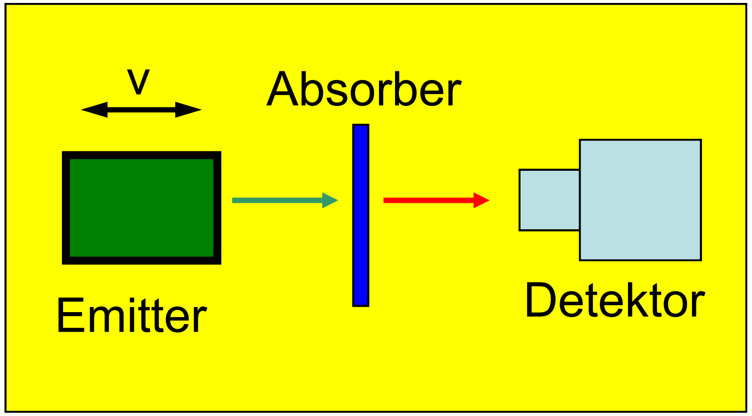
Resonanzanpassung durch „**Doppler tuning**“, d.h. periodische Bewegung des Emitters auf der Strahlachse zum Absorber.

Rückstoßfreie Resonanzfluoreszenz

14.4 keV γ-Linie in ^{57}Fe



Mößbauer-Aufbau (schematisch)



Mößbauer-Übergang

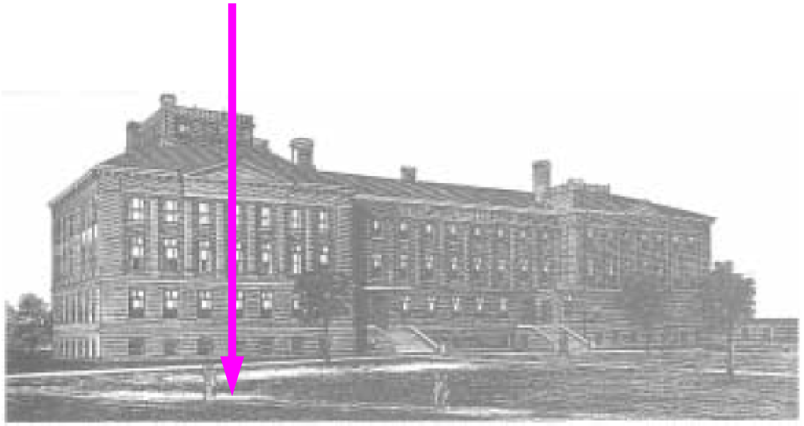
natürliche Linienbreite:

$$\boxed{\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{\hbar}{98\,\text{ns}} = 7 \cdot 10^{-9}\ \text{eV}}$$

Auflösung $5 \cdot 10^{-13}$

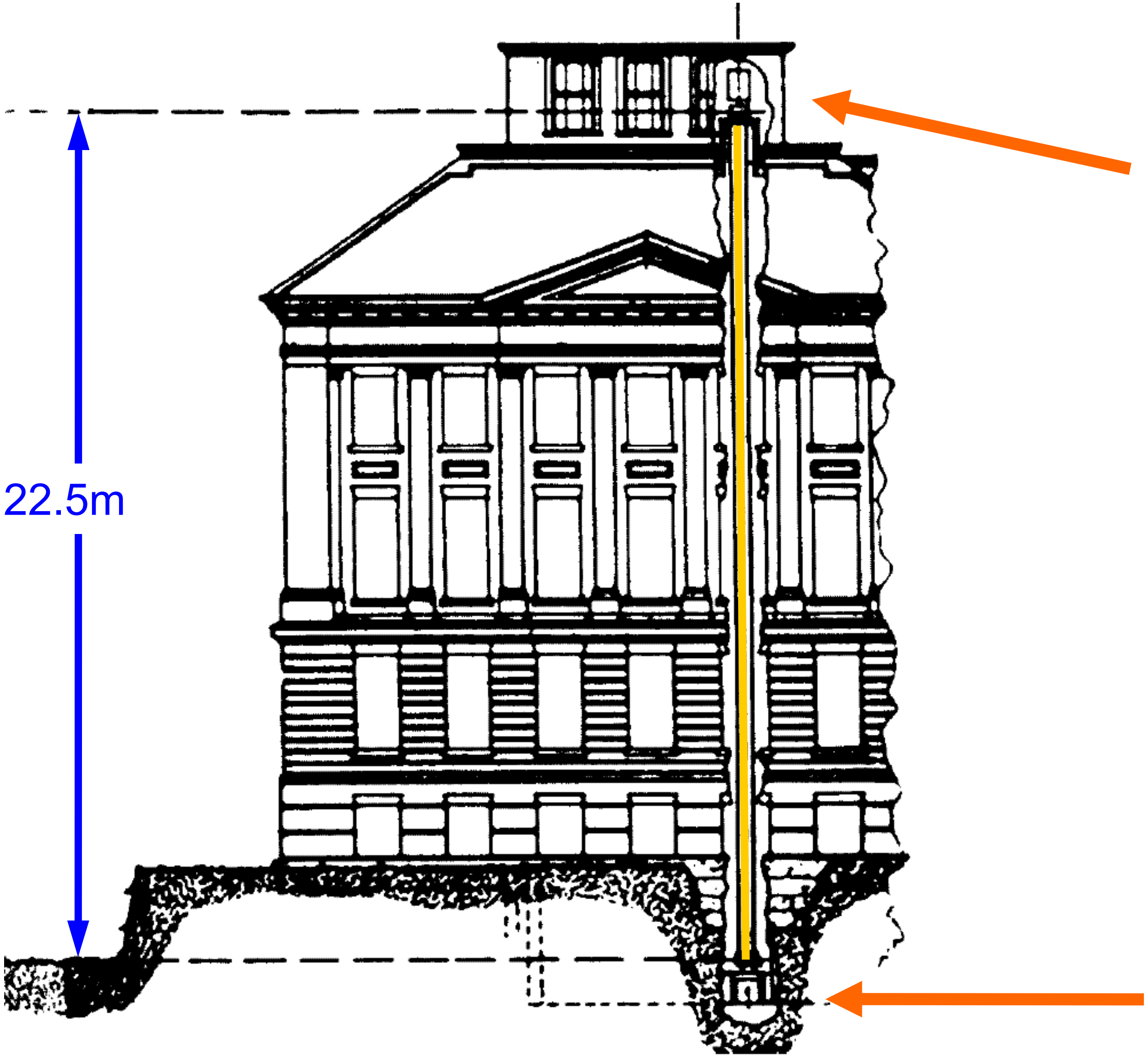
Jefferson Physics Laboratory in Cambridge

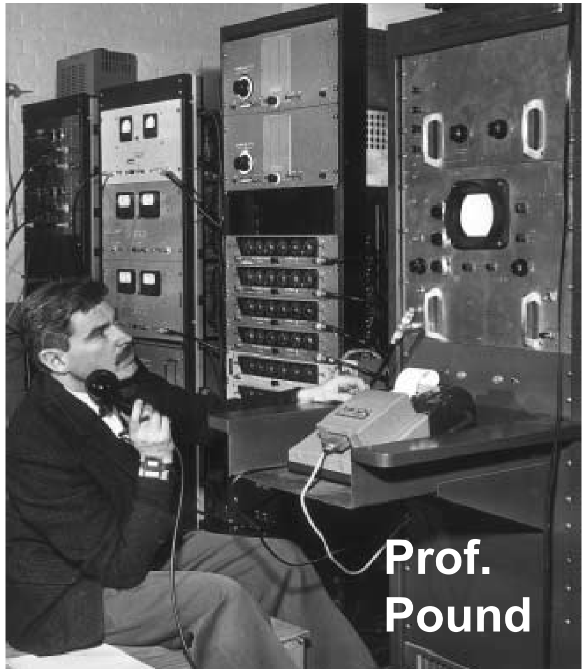
Ort des Experiments von Pound und Rebka

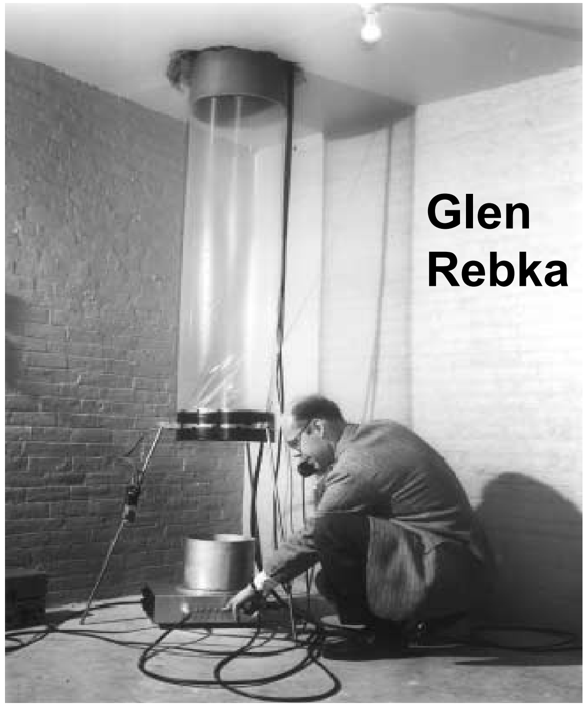


Präparation der Fallstrecke

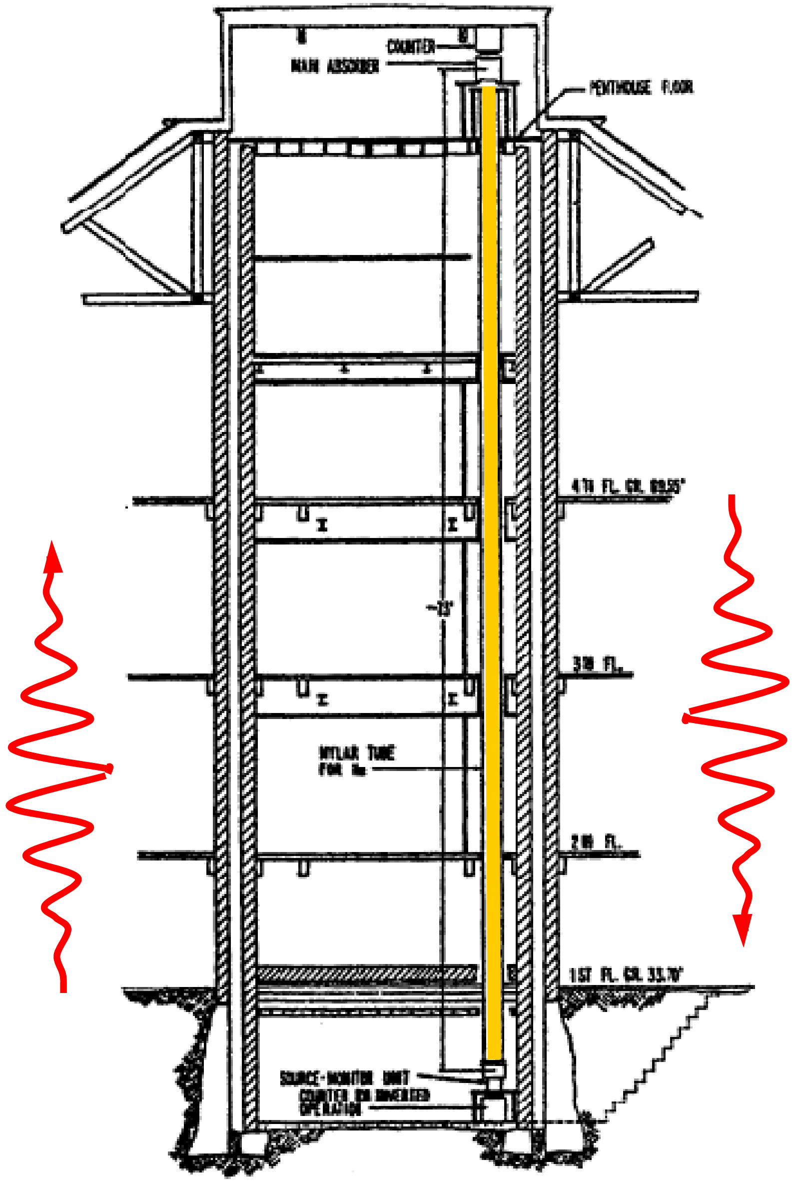
Experiment von Pound und Rebka







Ergebnis nach ca. 5 Jahren: Pound, Rebka, Snider



http://focus.aps.org/story/v16/st1

Photonen ließ man im Turm fallen und steigen.

Der relative **Frequenzunterschied** zwischen **Steigen** und **Fallen** wurde über Monate **gemessen** zu:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{2gH}{c^2} \approx 4.902 \cdot 10^{-15}$$

Die relative Gesamtunsicherheit dieses Resultats ist ca. 1%

Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 4.905 \cdot 10^{-15}$$

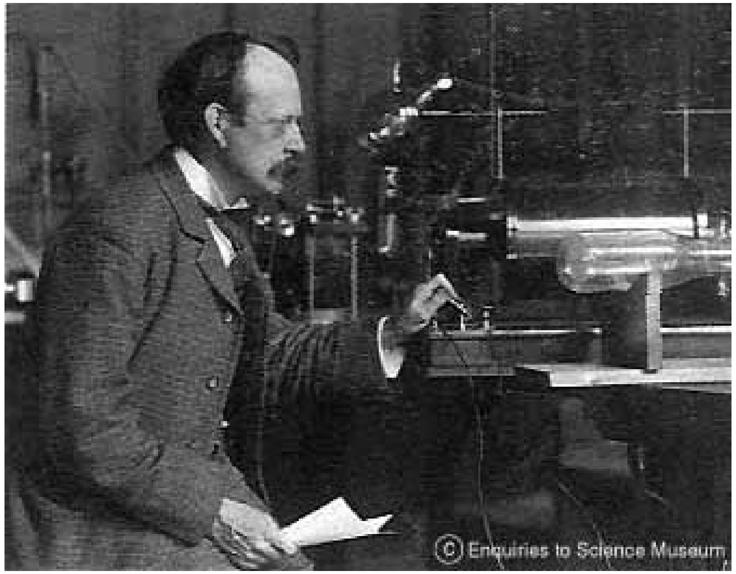
Kap. 6:

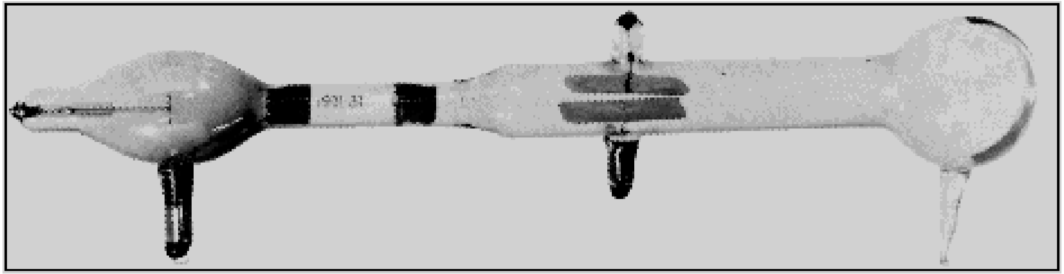
Das Elektron,

Materie-Teilchen und Welle

Entdeckung des Elektrons

1. Kathodenstrahlen werden durch Magnetfelder abgelenkt
2. Ebenso von elektrischen Feldern



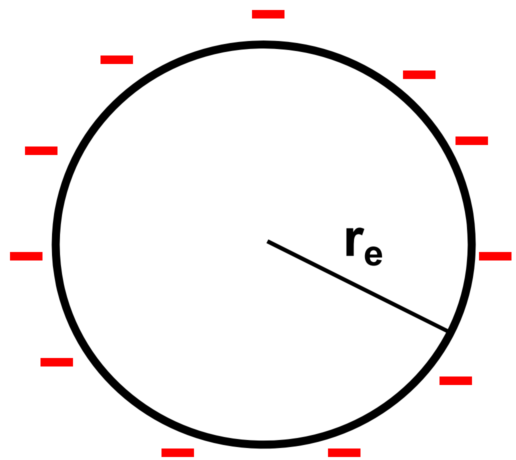


J. J. Thomson

3. Bestimmung von e/m ($=1.759 \cdot 10^{11}$ C/kg)

Größe des Elektrons

Der “klassische Elektronenradius”



Rein theoretischer Ansatz:
Mit Ladung e behaftete Kugel, deren elektrostatische Energie gleich der Ruheenergie ist (Ladung sitzt auf der Oberfläche – Faktor 1/2, homogene Ladungsverteilung – Faktor 3/5)

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot m_0 c^2} = 2.8 \cdot 10^{-15} m$$

(nur eine Definition!)

Nach heutigem Verständnis ist das Elektron punktförmig

Experimente zur Elektron-Elektron Streuung liefern $r_e < 10^{-18}$ m

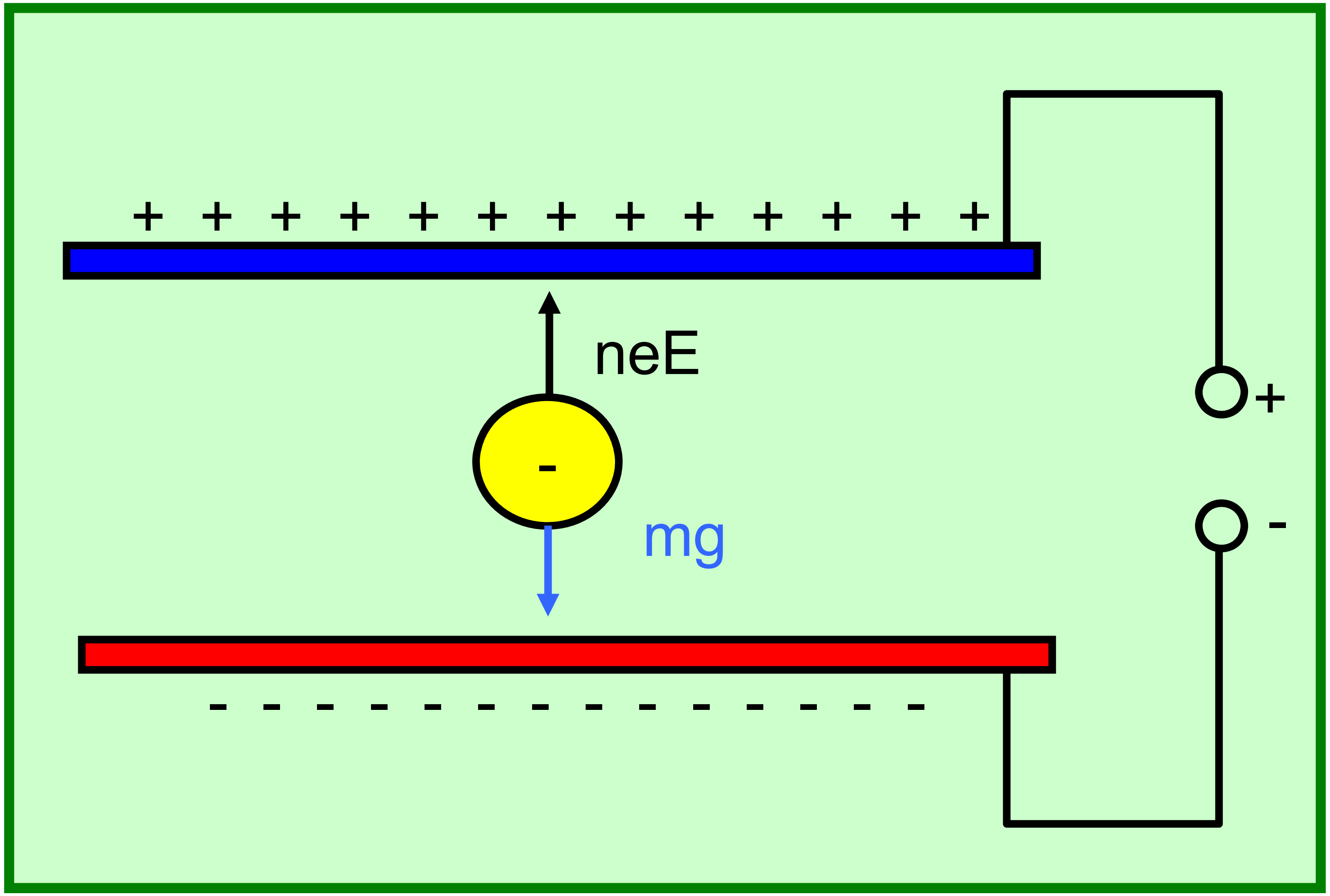
Millikan: Bestimmung der Elektronenladung

Robert A. Millikan
Nobelpreis 1923

Heute:

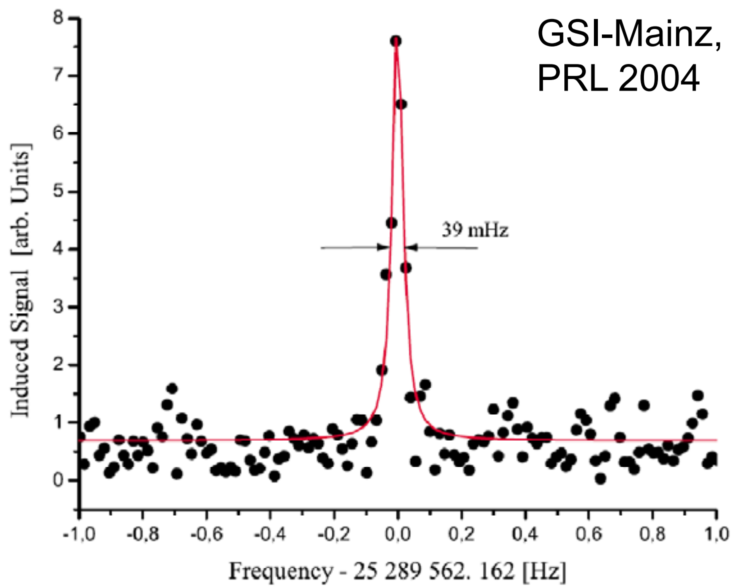
e = 1.602 176 53(14) x 10^{-19} C CODATA 2002:

1.602 176 487(40) x 10^{-19} C CODATA 2006:



Masse des Elektrons

- Massenspektrometer
- Fallen (über Frequenzmessung)



Cyclotron resonance spectrum of a single hydrogenlike oxygen ion in a Penning trap.

CODATA 2006

Ruhemasse des Elektrons $\quad \mathbf{m_0 = 9.109\,382\,15(45) \times 10^{-31}\ kg}$

$\mathbf{= 5.485\,799\,0943(23) \times 10^{-4}\ u}$

$= 511\ \mathrm{keV}/c^2$

$= 1/1836\ m_p$

Masse eines Elektrons
mit Geschwindigkeit v $\quad \mathbf{m = \gamma m_0 = m_0 / (1-\beta^2)^{1/2}}$

$\mathbf{\beta = v/c}$

Teilchen als Wellen

Louis de Broglie had the boldness to maintain that not all the properties of matter can be explained by the theory that it consists of corpuscles
(C.W. Oseen bei der Würdigung de Broglies zur Verleihung des Nobelpreises)

Louis-Victor
de Broglie
Nobelpreis 1929

1924: De Broglie Wellenlänge eines Teilchens:

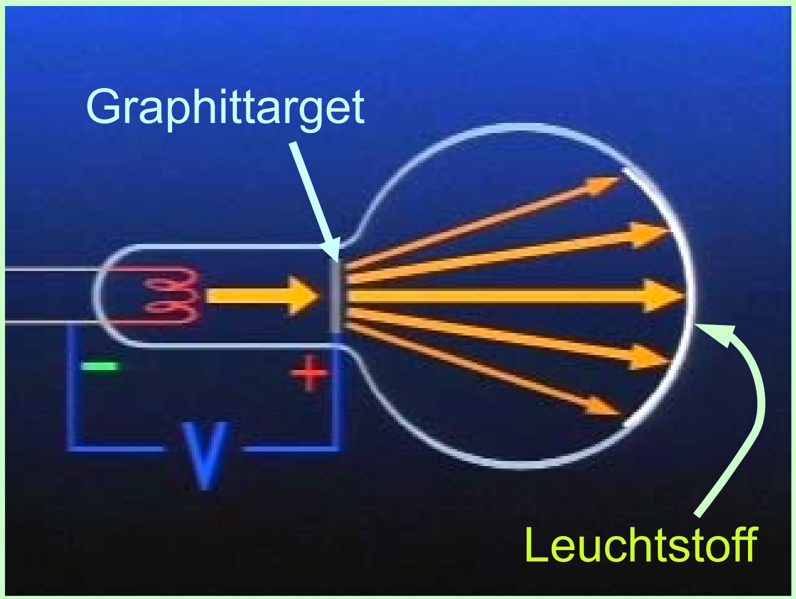
$$\lambda = h / p = h / (mv)$$

Auto mit 100 km/h $\lambda \approx 10^{-36}$ **m**

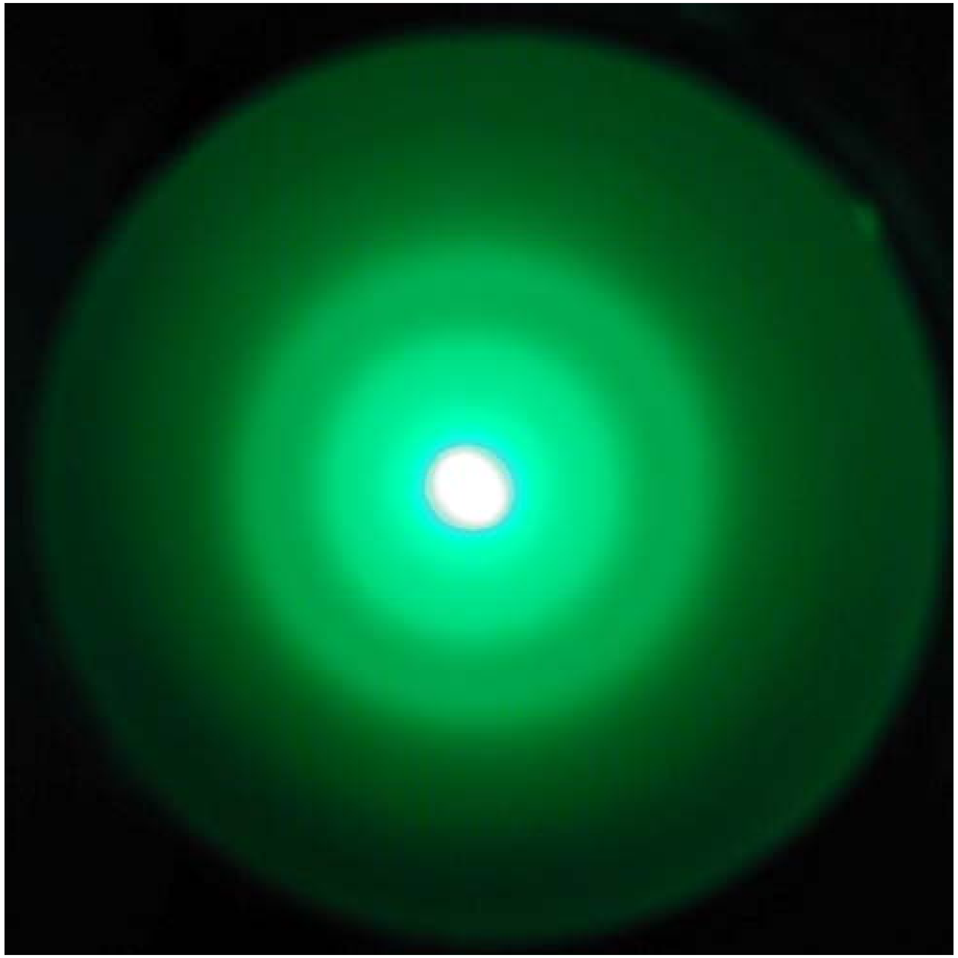
Elektron 100eV $\lambda = 1.2 \cdot 10^{-10}$ **m** → **Elektronenmikroskop, Sonden für Atomkerne**

Elektronen als Wellen

Experiment

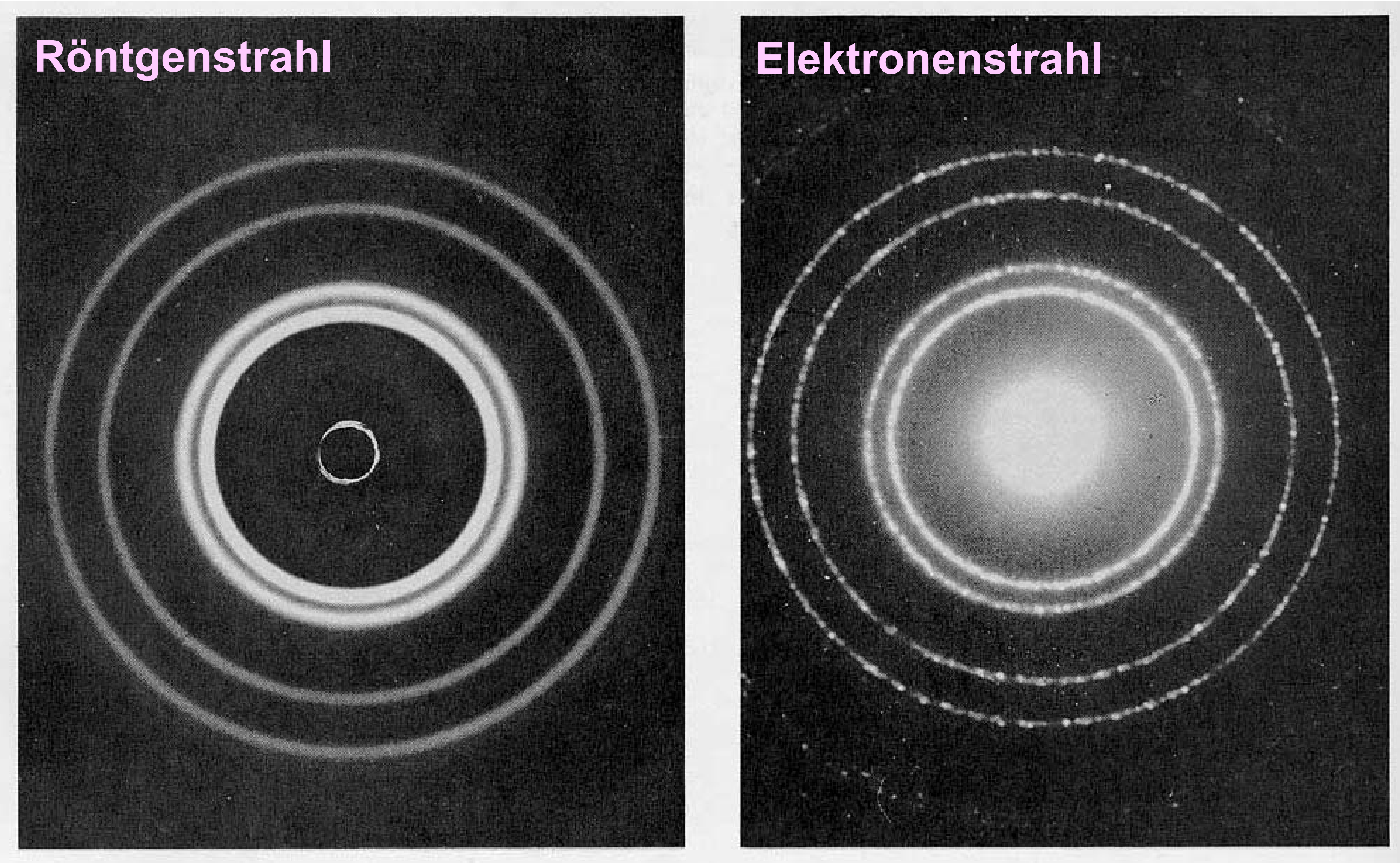


In einer Röhre wird ein Elektronen-strahl erzeugt. Dieser durchläuft eine Schicht von Graphitkriställchen. Auf einem Leuchtschirm erzeugen die auftreffende Elektronen Licht.



Auf dem Leuchtschirm zeichnen sich Beugungsringe ab, wie man sie in einem Debye-Scherrer Experiment mit monoenergetischen Röntgenstrahlen erwartet.

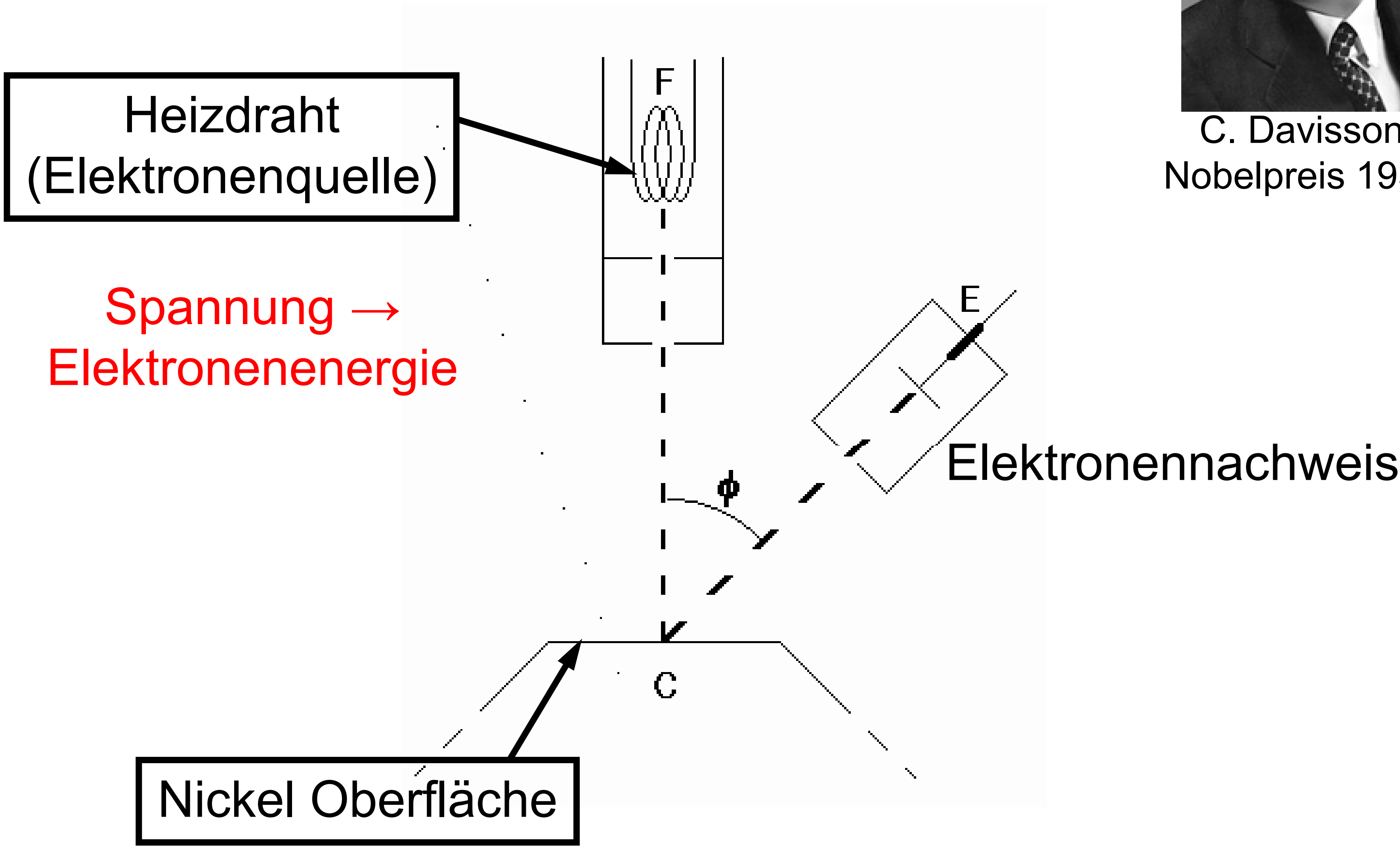
Beugung an einer Aluminium Folie



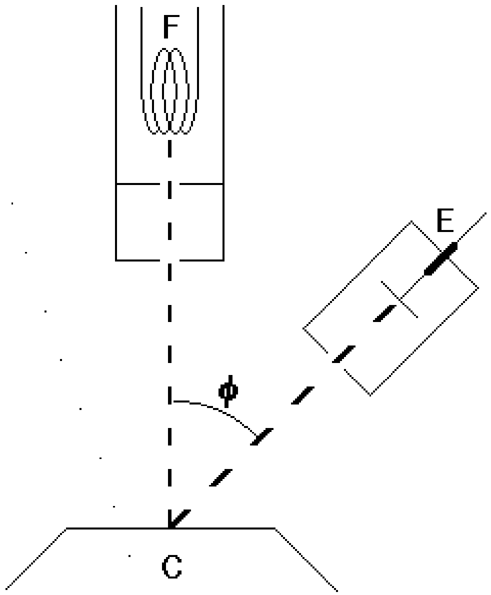
Welleneigenschaften von Elektronen

Experiment von Davisson und Germer 1927

C. Davisson
Nobelpreis 1937

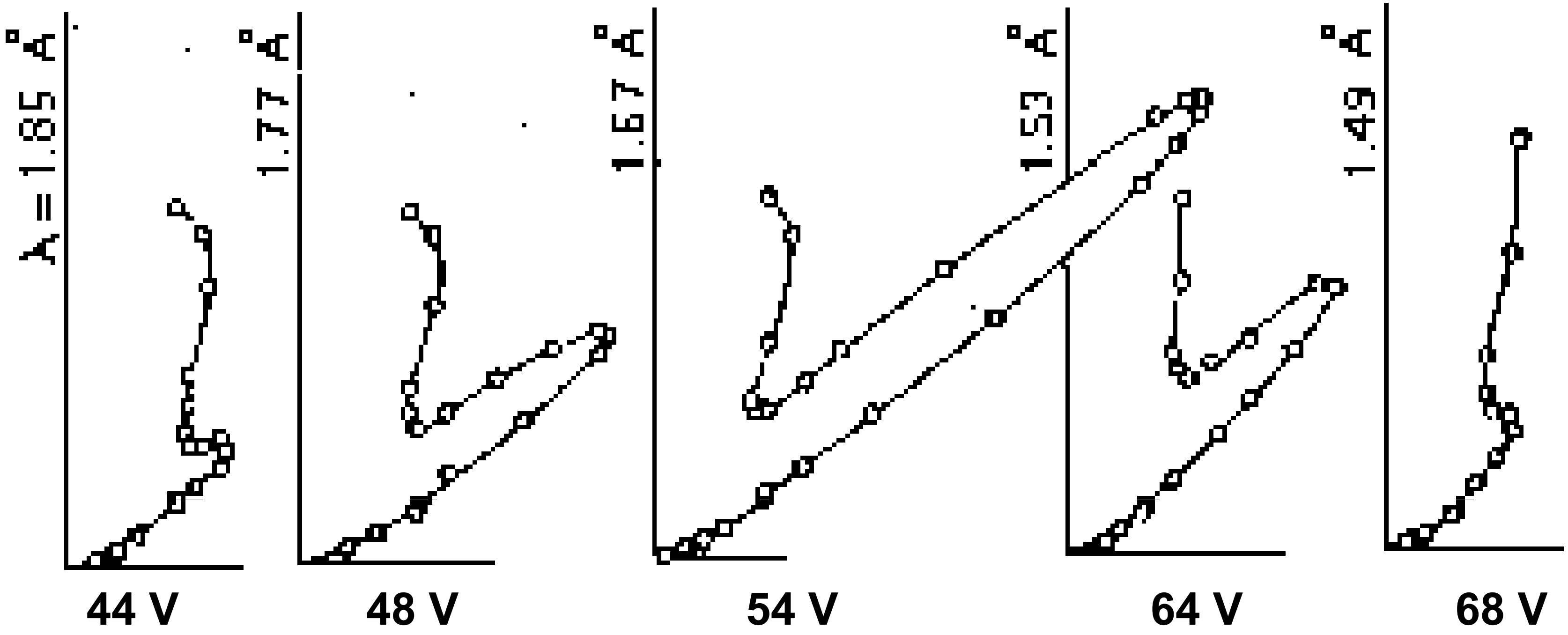


Bragg-Reflexion von Elektronen



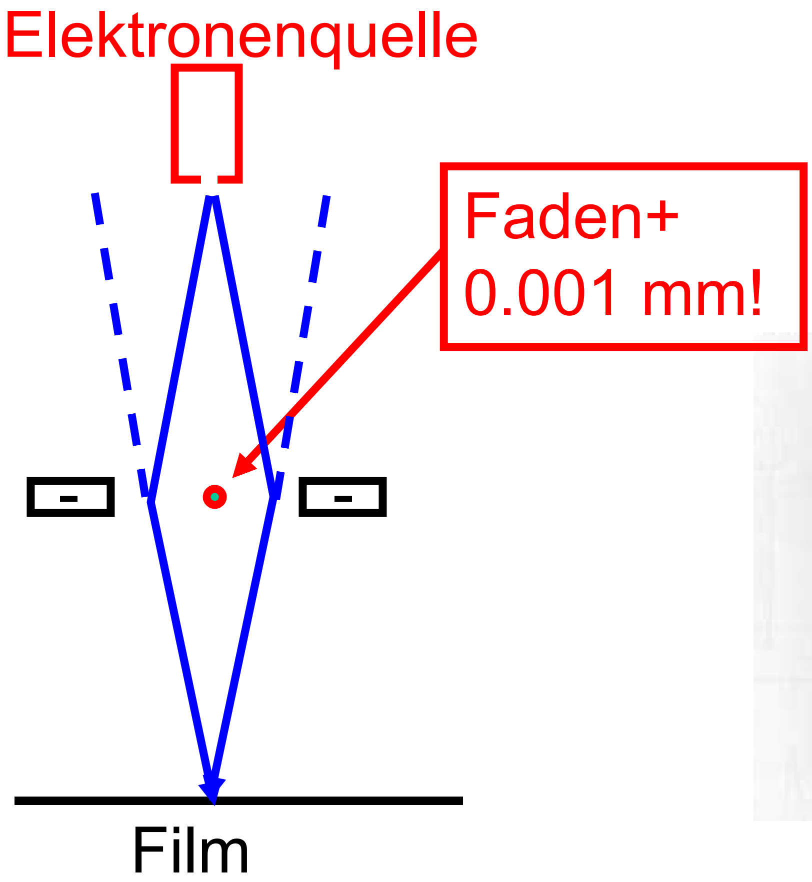
Davisson (left) and Germer (right) in 1927.

Polardiagramme für gemessene Elektronenintensitäten:

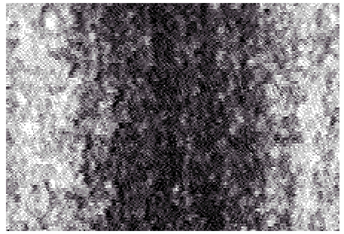


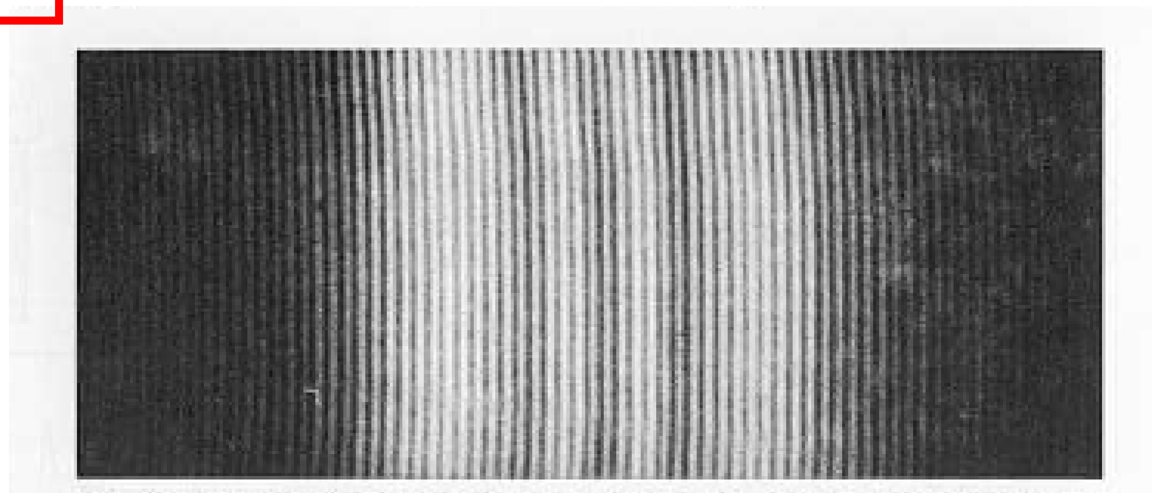
“Doppelspalt” Versuch mit Elektronen

Möllenstedt/Düker (1956) “Biprisma Experiment”



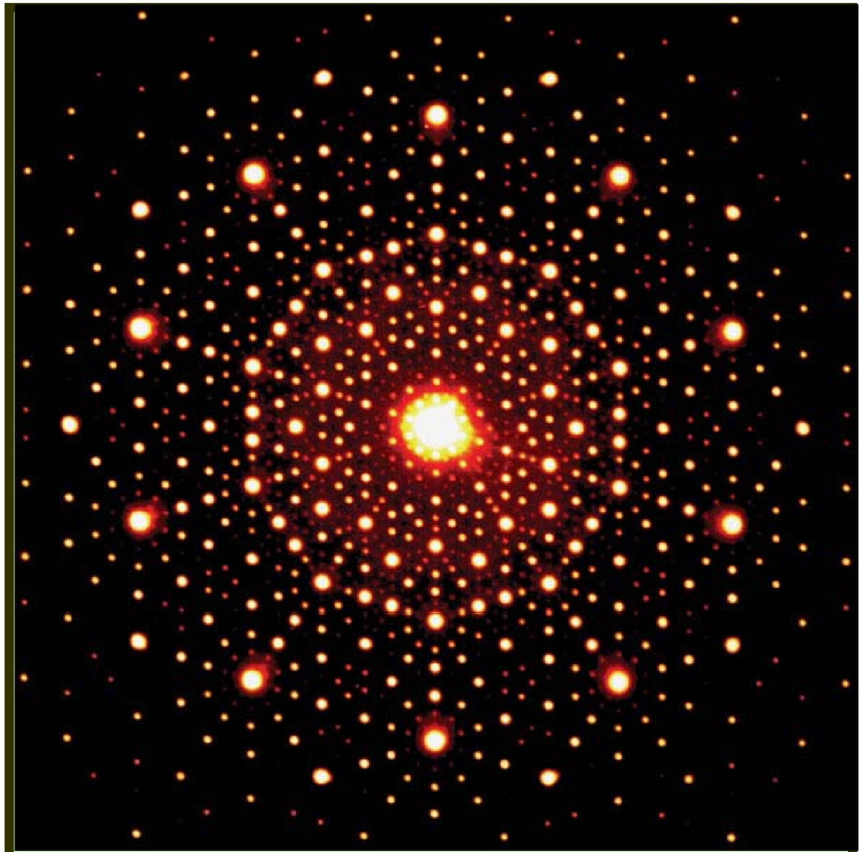
Ohne Spannung zwischen Quarzfaden und Elektroden: reiner Schattenwurf mit Beugung an den Kanten



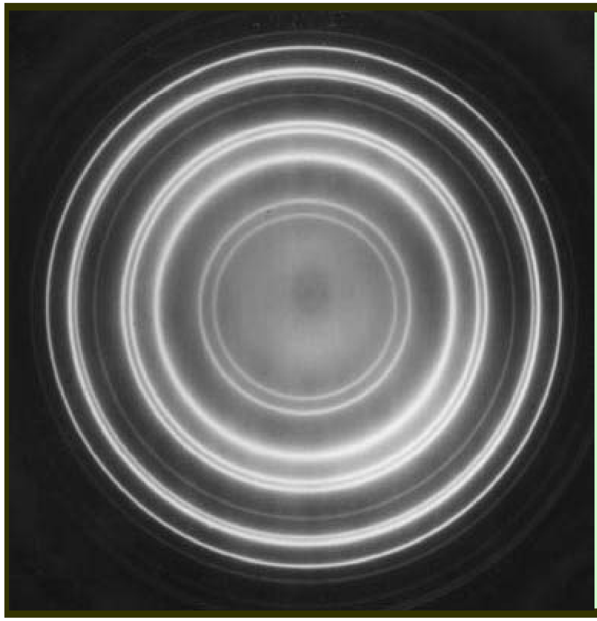


- Extrem vibrationsarmer Aufbau
- Sehr lokalisierte Elektronenquelle

Elektronenbeugung in der Materialforschung

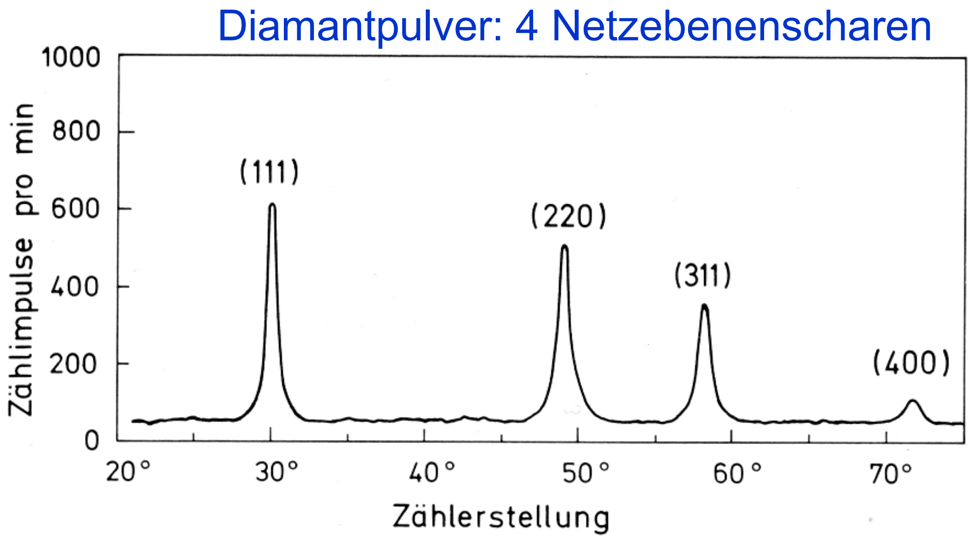


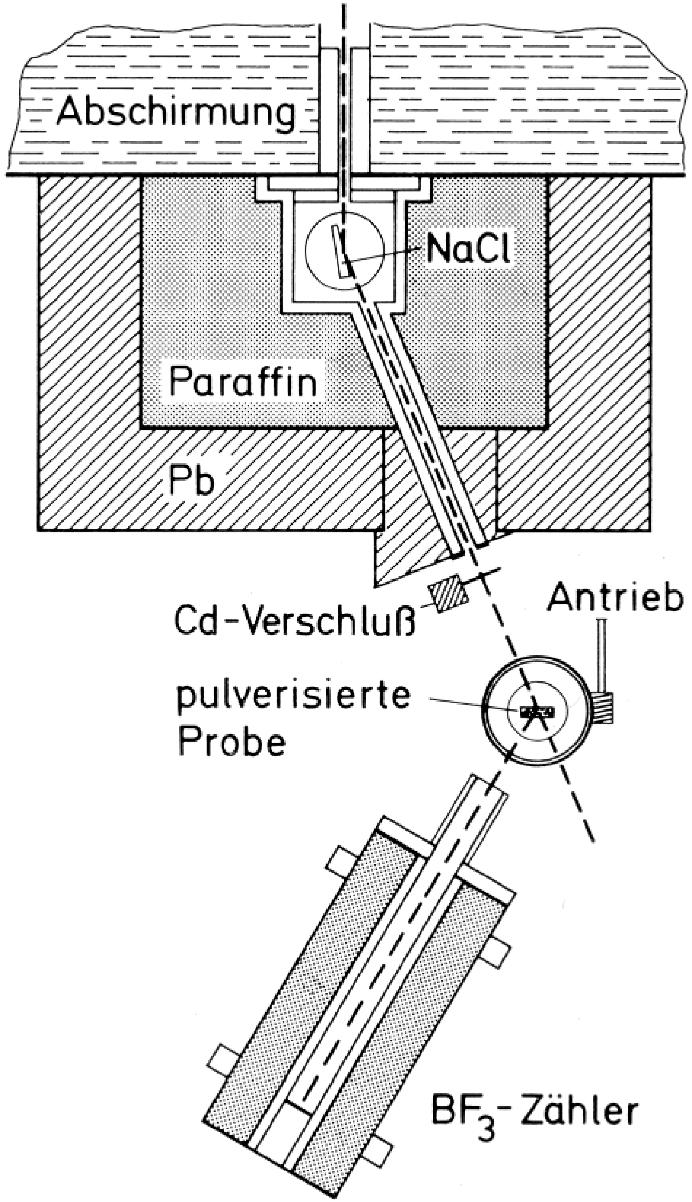
Elektronenbeugungsmuster aufgenommen entlang der 10-fach-Symmetrieachse eines $Al_{72}Ni_{20}Co_8$ Quasikristalls.



Beugungsmuster einer Thallium-chlorid Standard-probe zur Kalibrierung von Apparaturen für die Struktur-analyse durch Elektronen-beugung

Neutronenbeugung an Kristallen



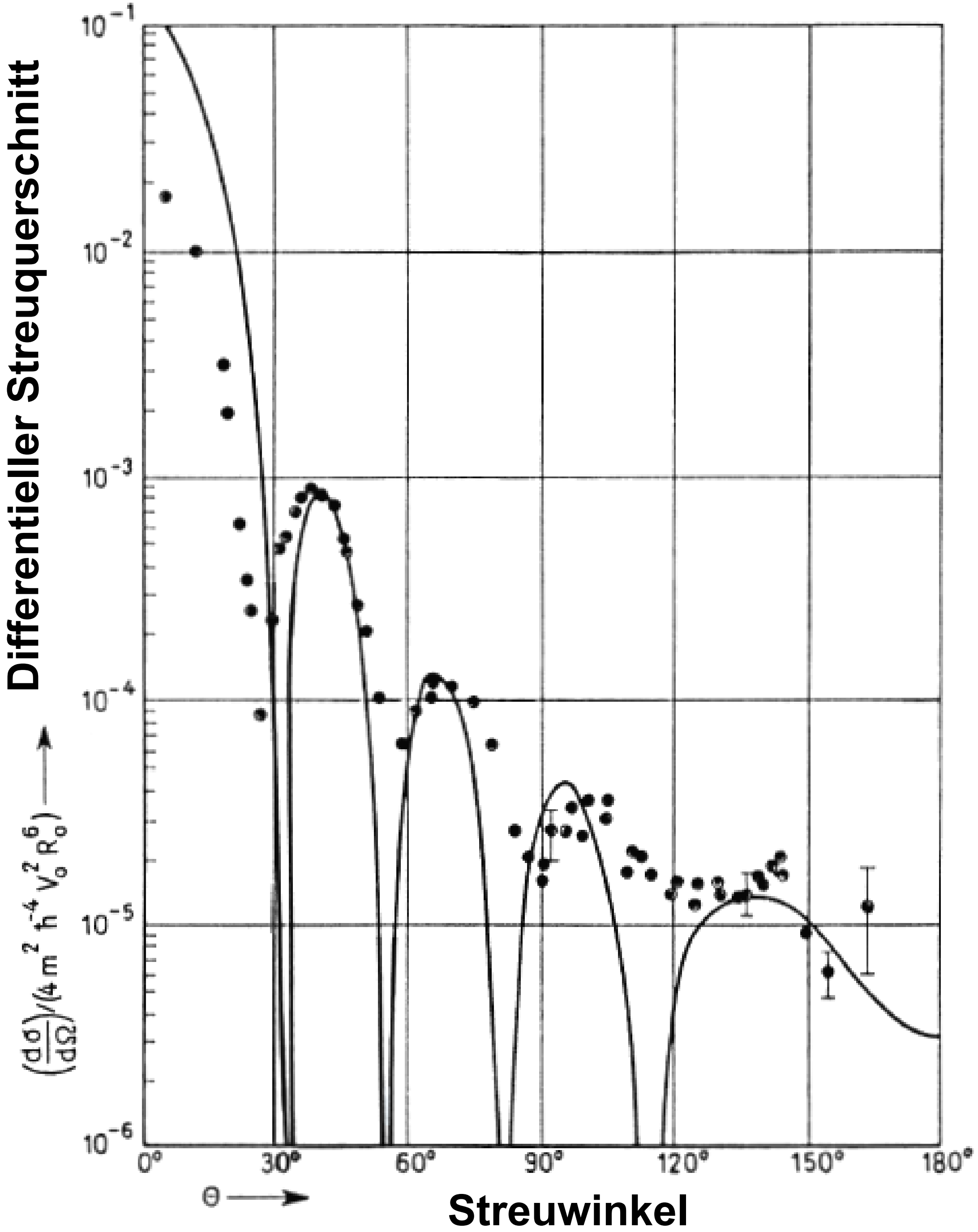


Elastische Streuung von Neutronen an Blei

E_{kin} = 14.5 MeV

λ = 5.6 fm

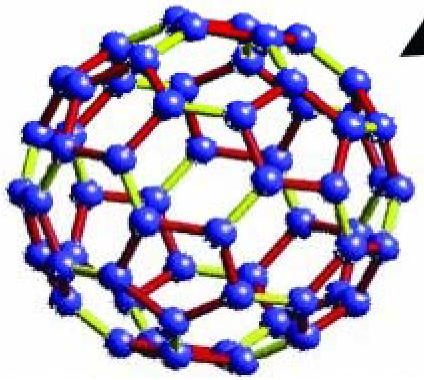
Kern als Beugungsscheibchen mit Radius 7.5 fm



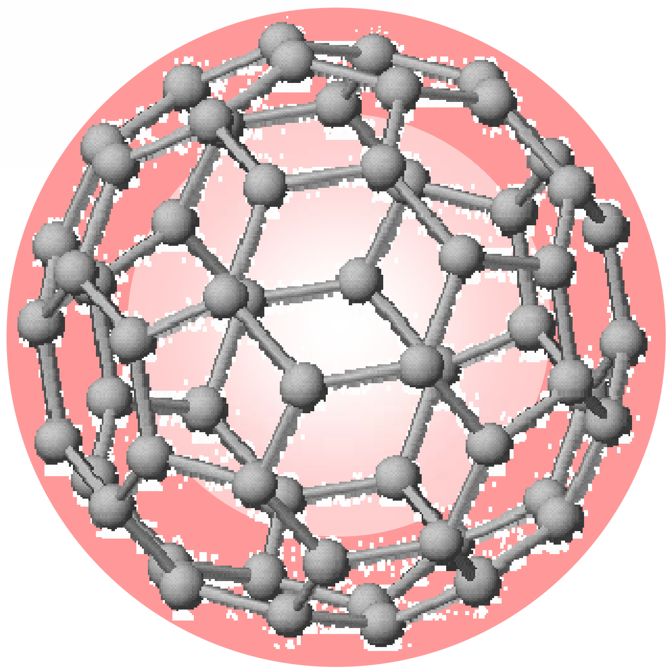
Welleneigenschaften von Fullerenen

C_{60}

Faktor 10^{-8}



M = 720 u

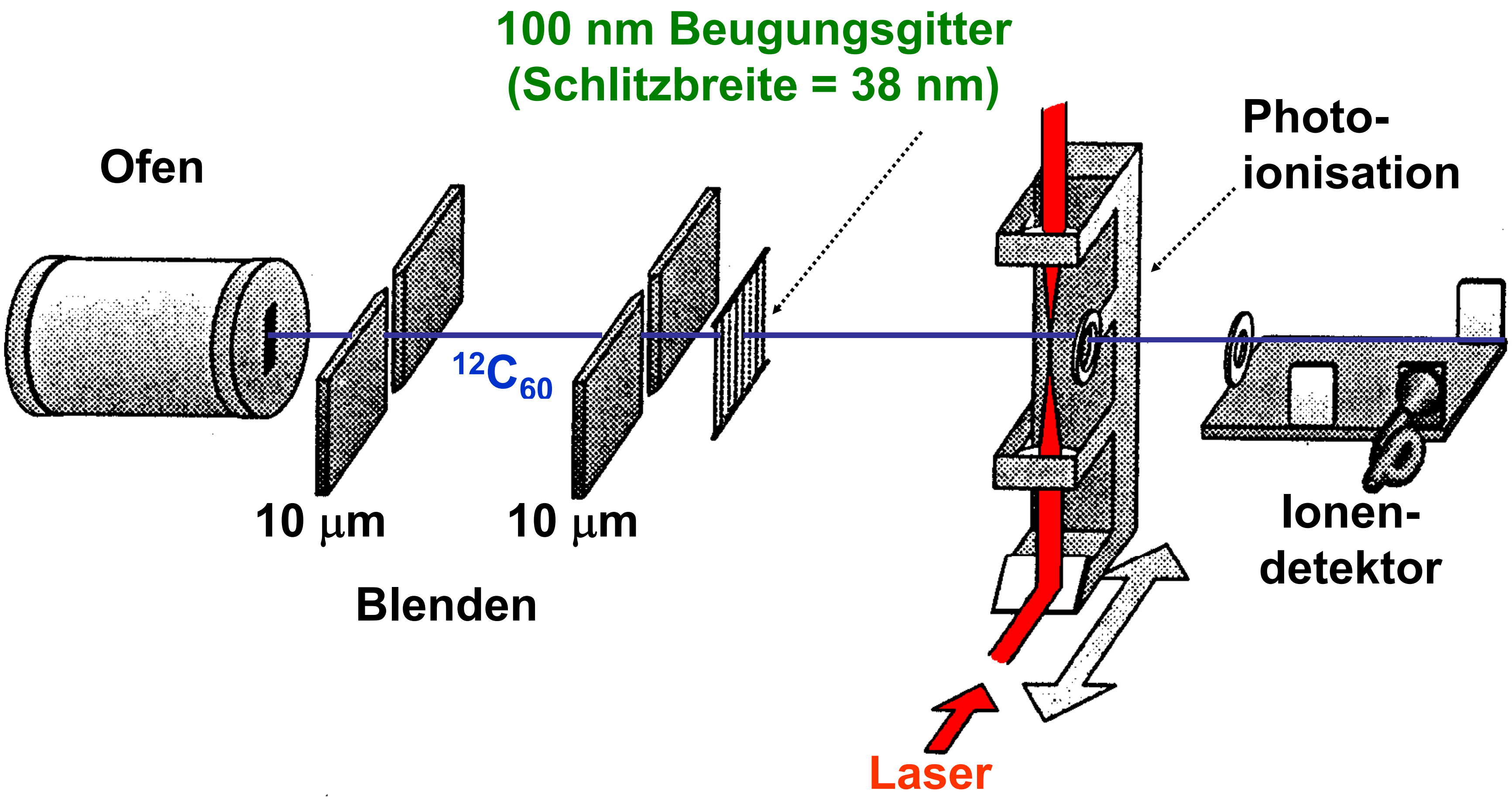


$8.6 \cdot 10^{-10}$ m

Kugelschale mit
R_i = 0.279 nm
R_o = 0.429 nm

Beugung von Fullerenen an einem Gitter

Nature 401 (1999) 680



Beugung von C_{60}

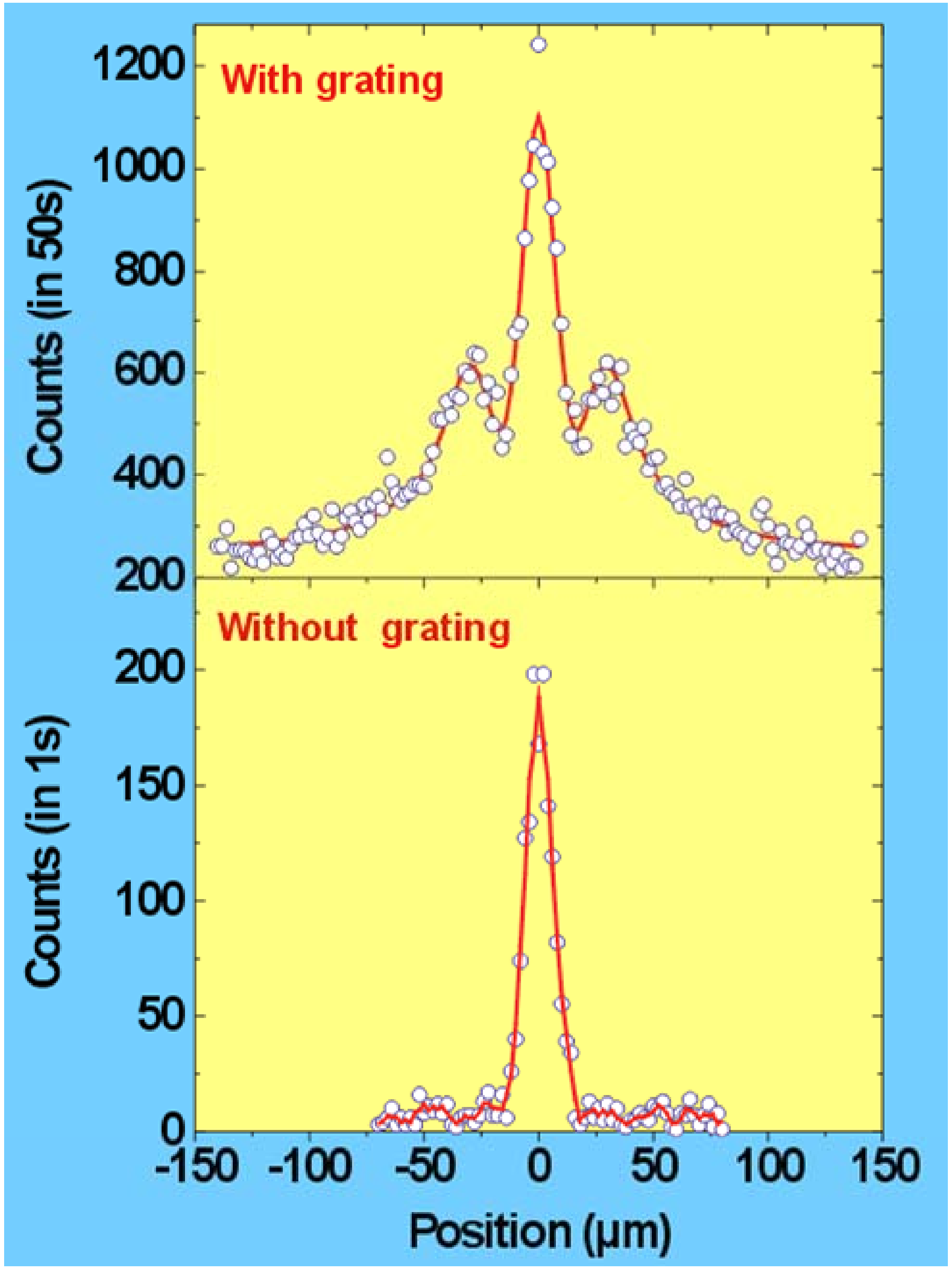
Nature 401 (1999) 680

$$v_{C_{60}} = 220\,{}^{m}\!/_{s}$$

$$M = 60 \cdot 12 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}\,kg$$

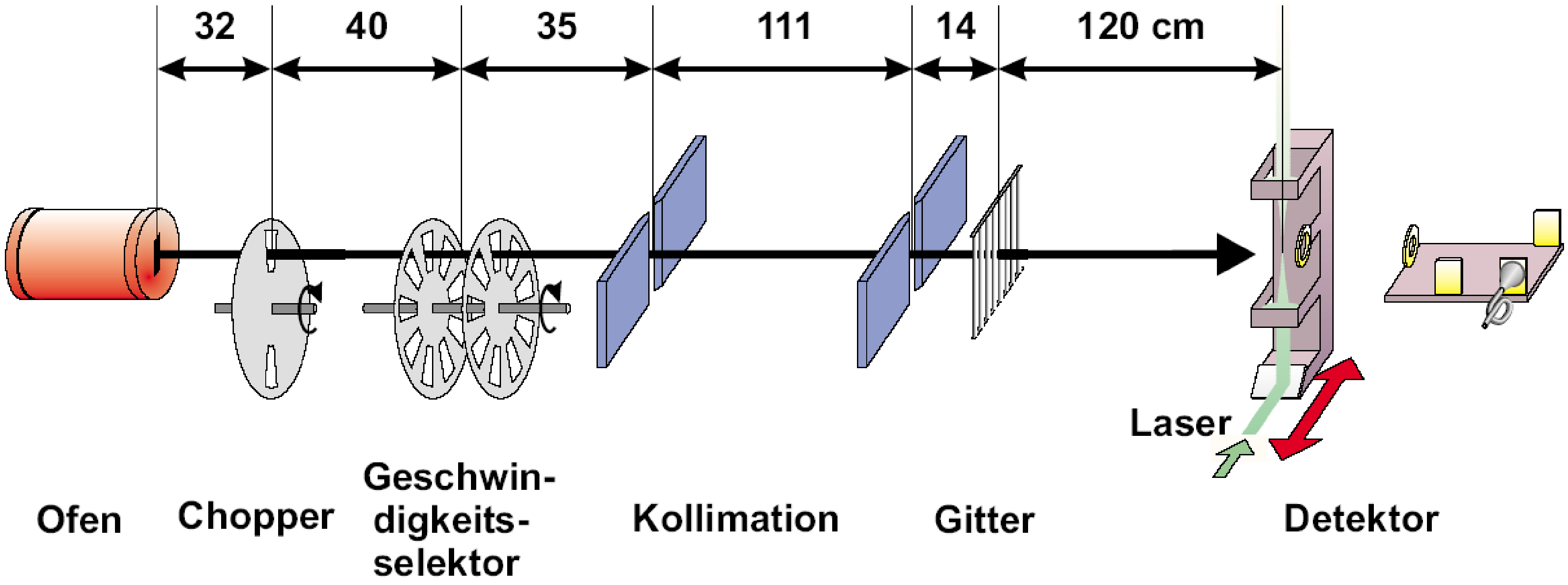
$$\lambda = \frac{h}{Mv} = 2.5 \cdot 10^{-12}\,m$$

Die einzelnen Fullerenmoleküle sind im Mittel 20 cm voneinander entfernt. Es sind also nicht verschiedene Moleküle, die miteinander interferieren. Jedes einzelne Molekül trägt für sich zum Interferenzmuster bei



Geschwindigkeitsselektion

(zusätzlich: gravitative Selektion)

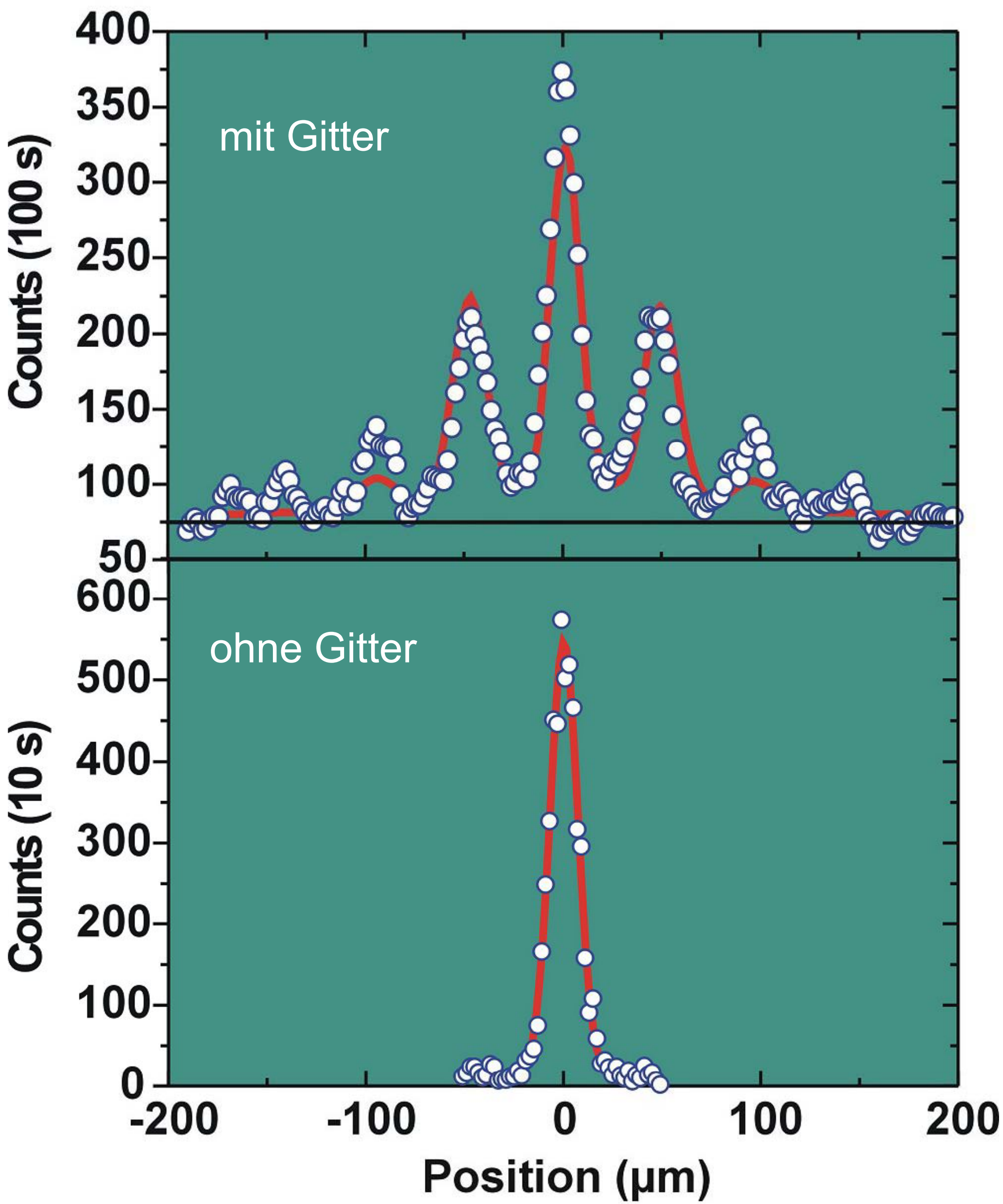


Neuere Ergebnisse zur Beugung von Fullerenen

Experimente mit stärker geschwindigkeitsselektierten C_{60} Fullerenen

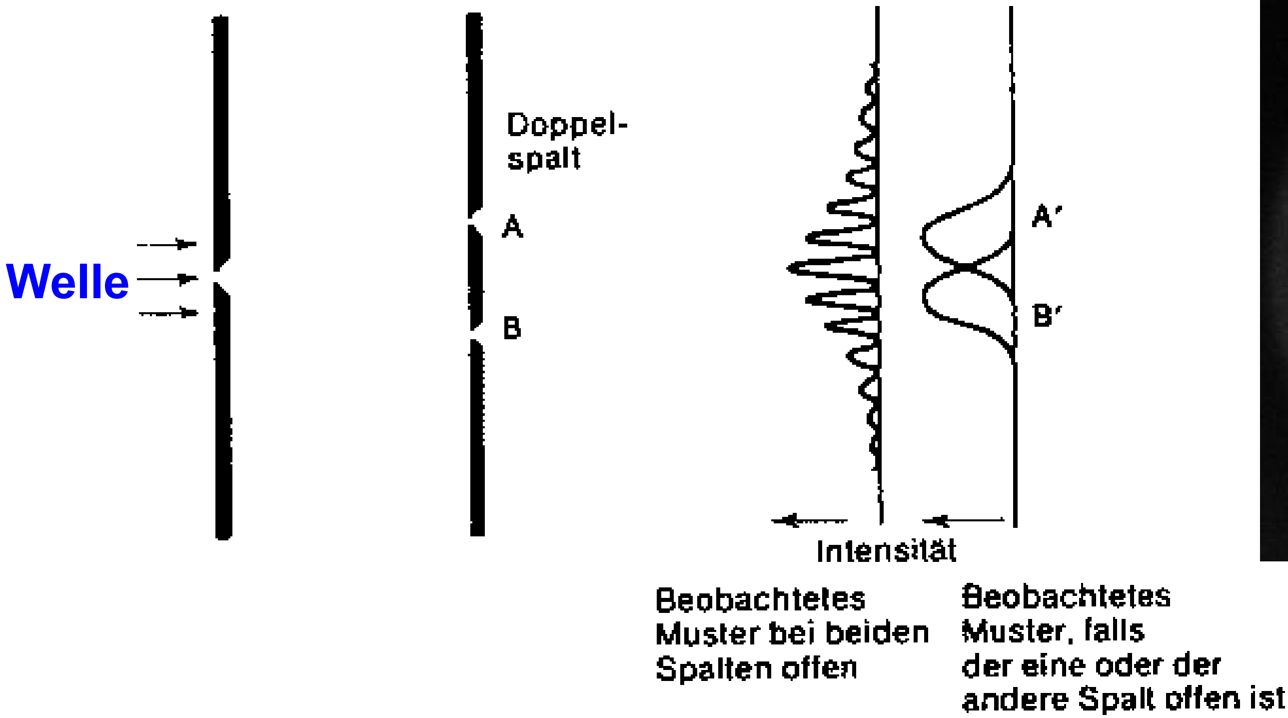
Der Detektor weist einzelne Fulleren-Moleküle nach. Die Dichte der Moleküle ist so gering, dass sie im Strahl einen **mittleren Abstand von 20 cm** voneinander haben.

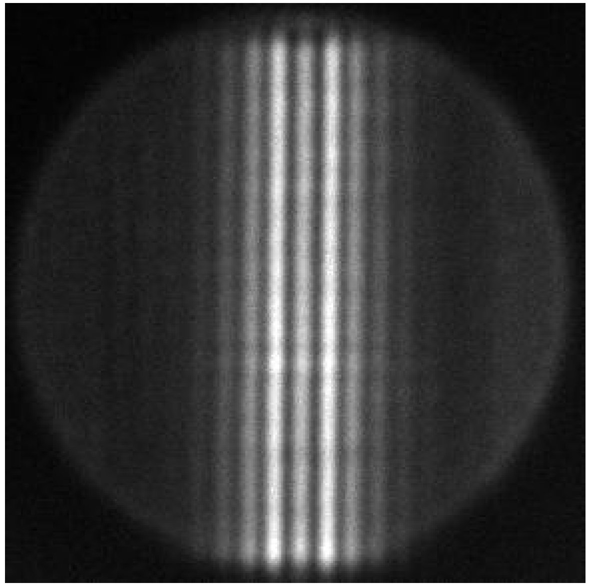
Gruppe A. Zeilinger, Wien



Welle-Teilchen Dualismus

Interferenz am Doppelspalt



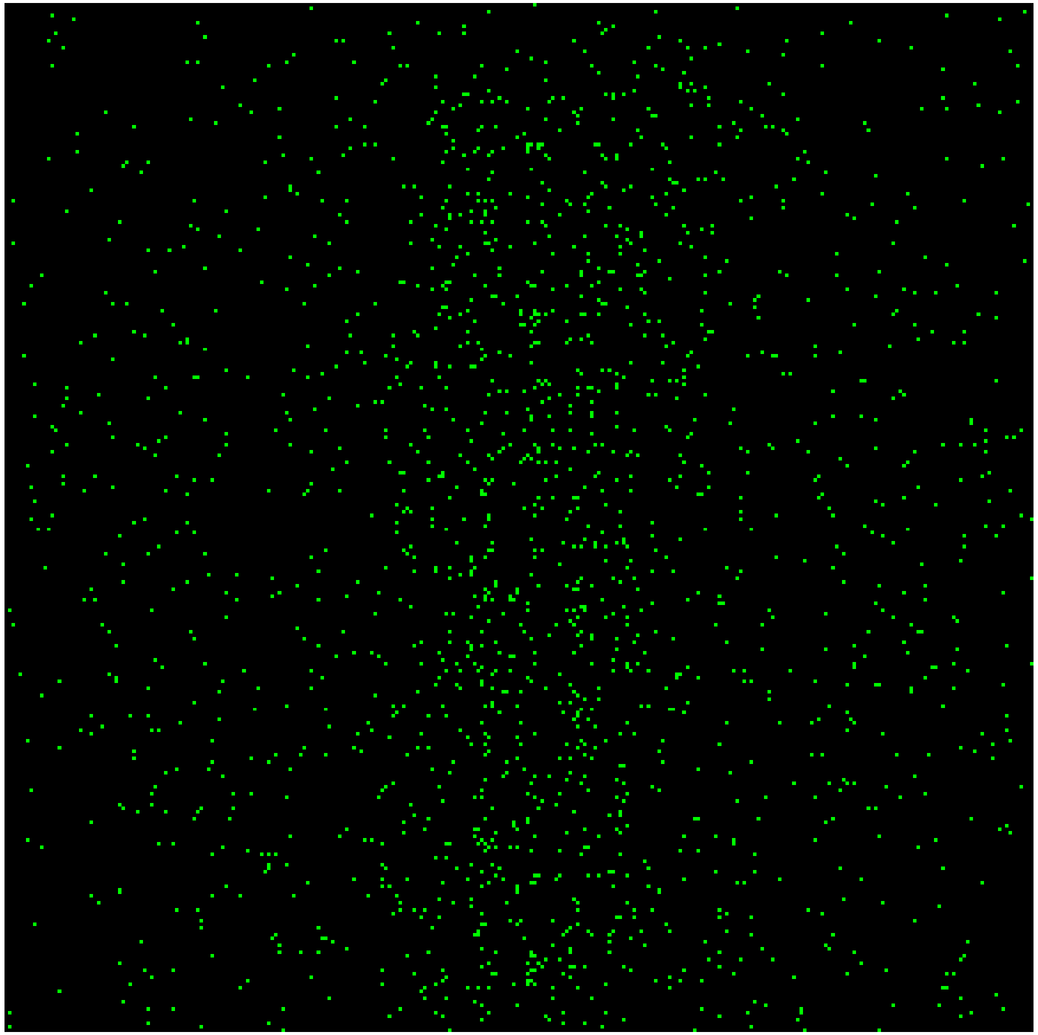


Interferenzmuster

Photonen ⟺	**elektromagnetische Wellen**
Teilchen ⟺	**Materiewellen**

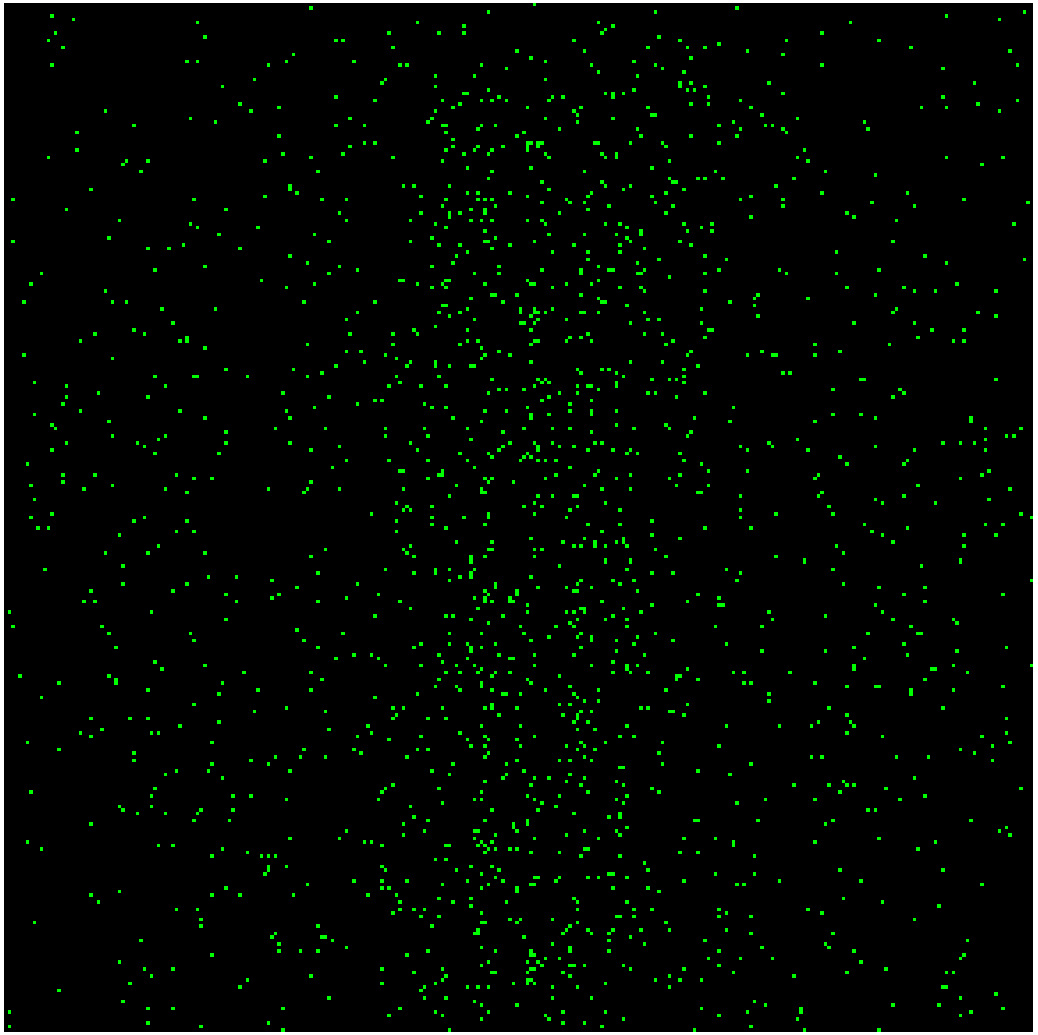
Doppelspalt: Positionsempfindlicher Detektor

Zählereignisse in kurzen Zeitintervallen



Doppelspalt: Positionsempfindlicher Detektor

Aufsammeln der Zählereignisse



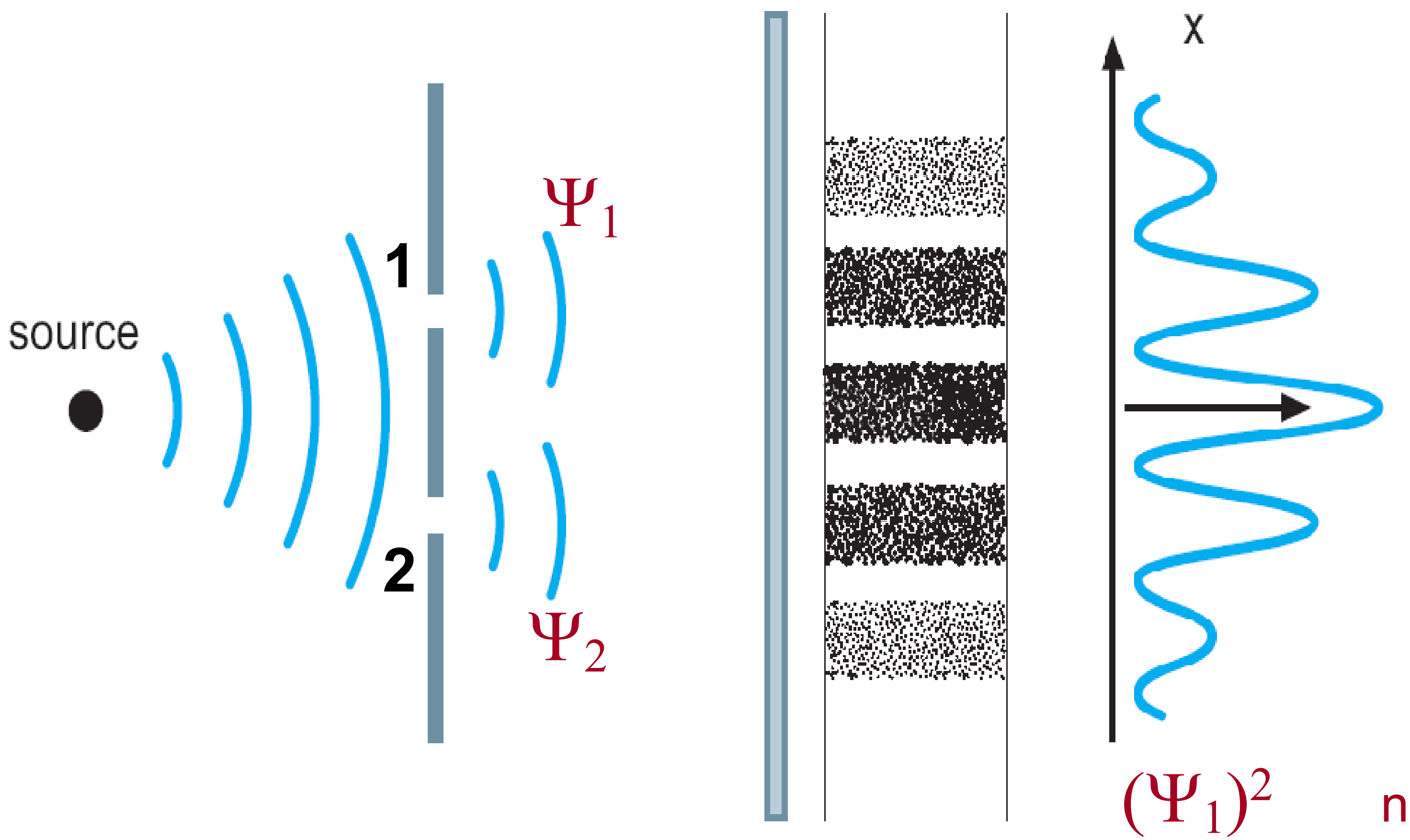
Doppelspalt: Interferenz von Wellen

Wellenfunktion

$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$

Intensität

$\Psi^2 = (\Psi_1 + \Psi_2)^2$



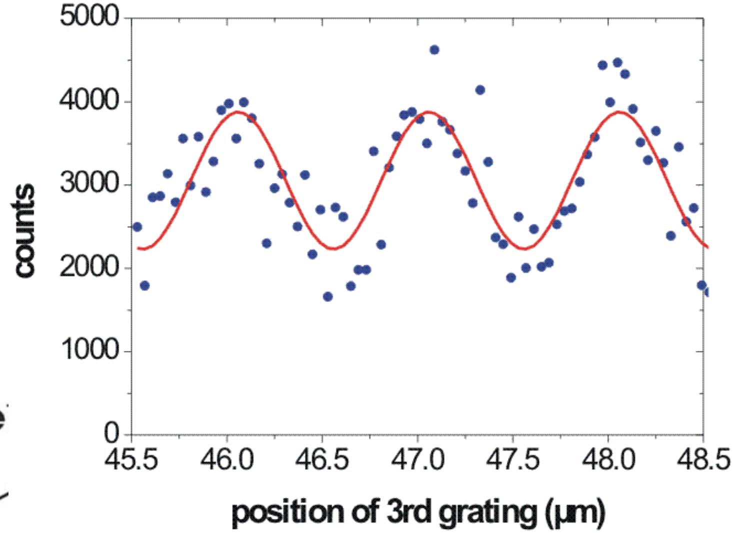
$(\Psi_1)^2$ nur Schlitz 1

$(\Psi_2)^2$ nur Schlitz 2

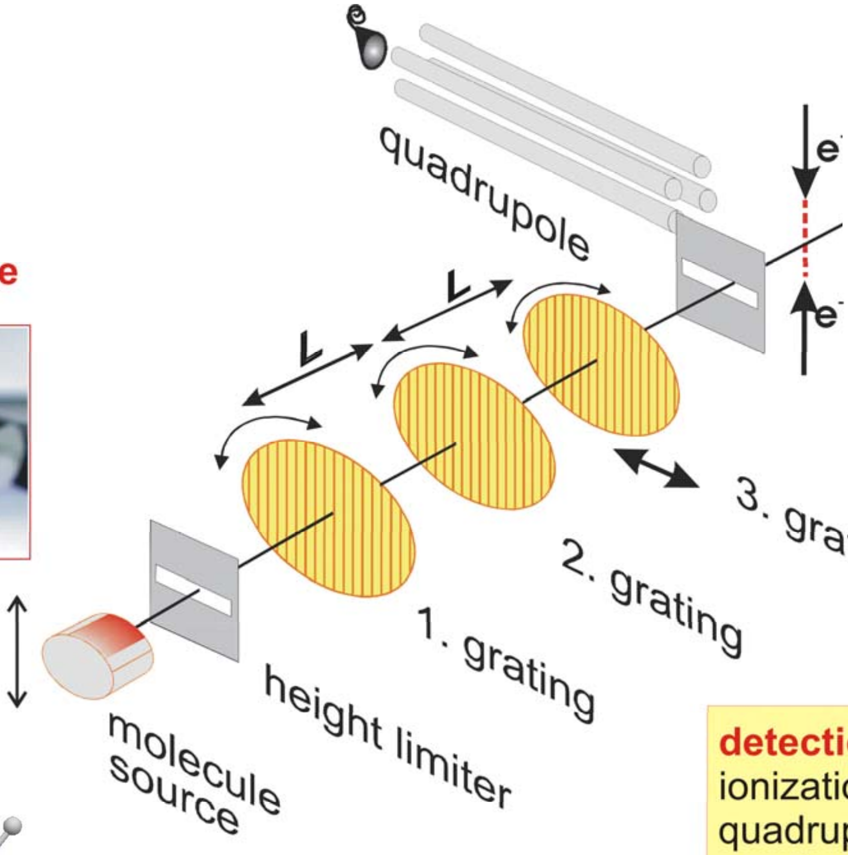
$2\Psi_1\Psi_2$ Interferenzterm

Interferenzmuster mit $C_{60}F_{48}$

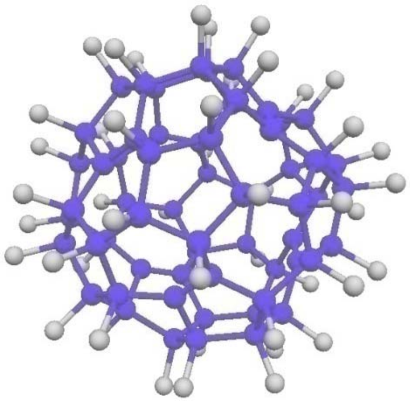
Schwerste Teilchen, die bisher ihre Wellennatur zeigten



thermal source



detection:
ionization: electron beam
quadrupole mass
spectrometer (2000 amu)



L. Hackermüller, S. Uttenthaler, K. Hornberger, E. Reiger, B. Brezger, A. Zeilinger, and M. Arndt, Phys. Rev. Lett. 91, 090408 (2003)

Kap. 7:

Grundeigenschaften von Materiewellen

Wellen

Licht:

$E = h\nu$

$p = h\nu / c$

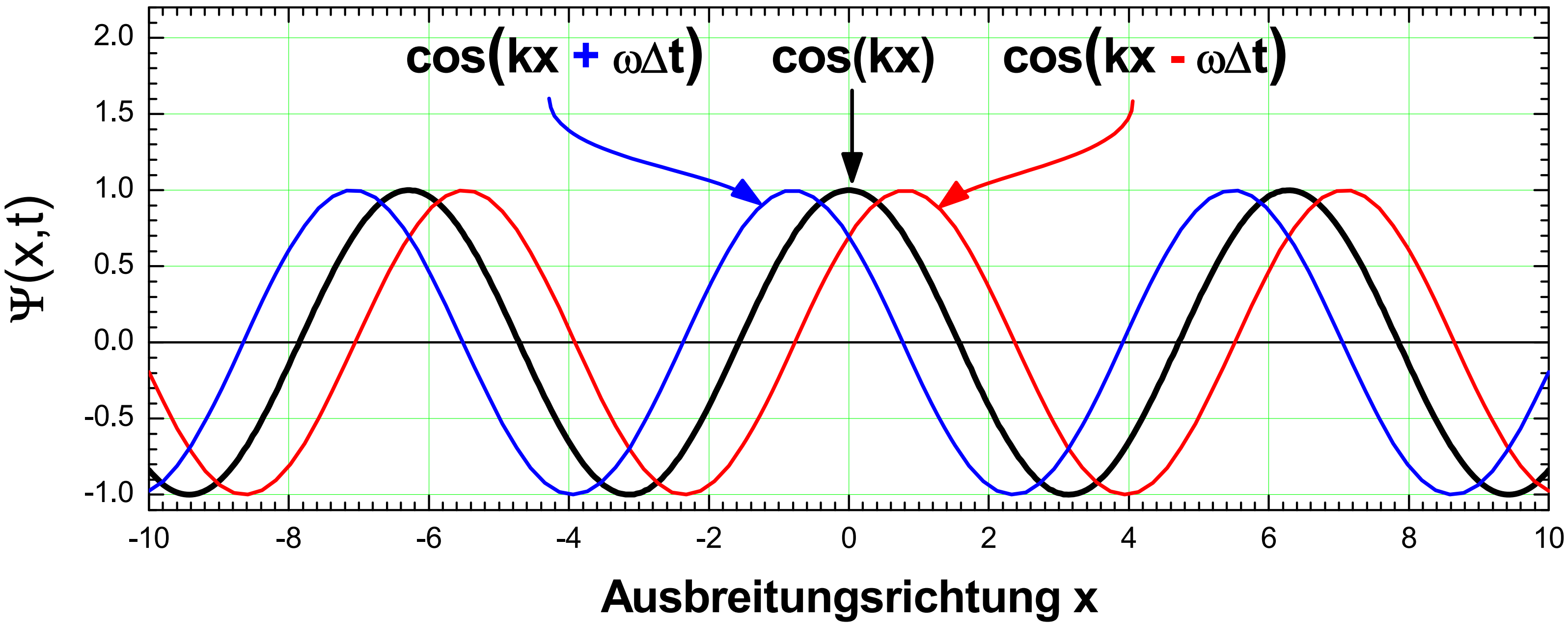
Materie:

$E = h\nu = \hbar\,\omega$

$p = h/\lambda = \hbar\,k$

$k = 2\pi/\lambda$

Momentaufnahme einer Welle (z.B. t=0)



Ebene Wellen

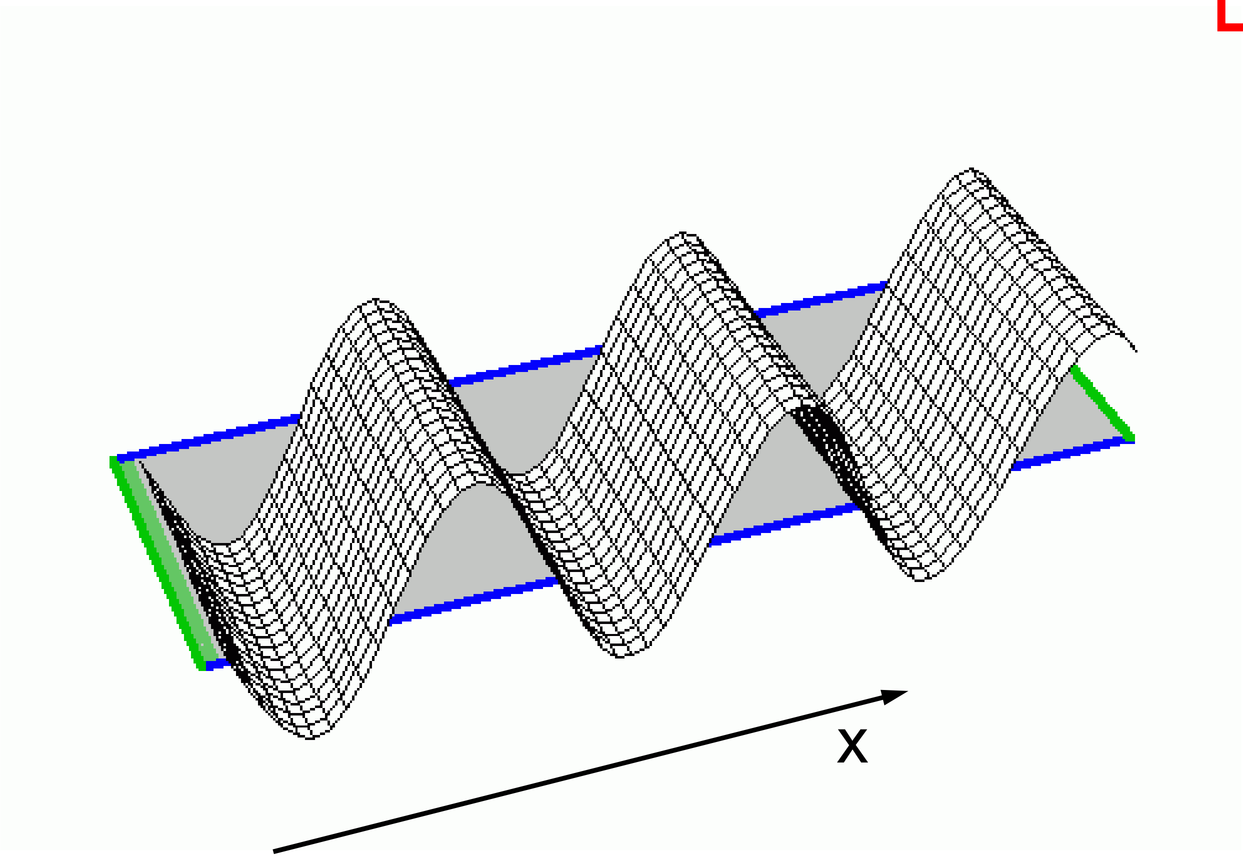
Beschreibung durch Wellenfunktion Ψ

Bei Ausbreitung in x-Richtung:

$$\Psi(x,t) = A_0 \cos(kx - \omega t)$$

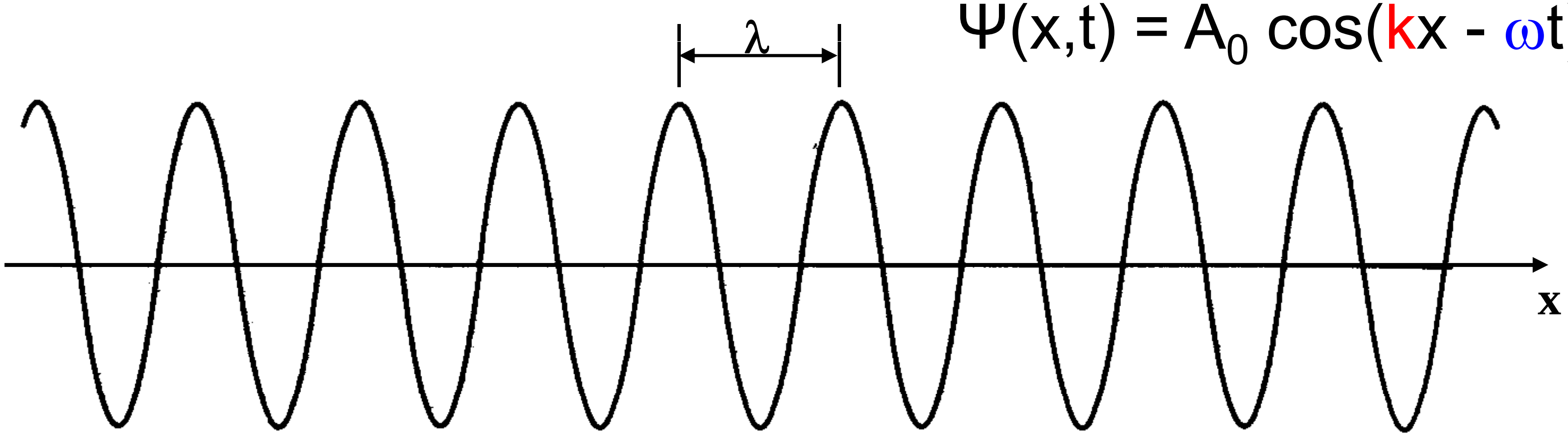
Impuls

Energie



Ebene Welle

$\Psi(x,t) = A_0 \cos(kx - \omega t)$



In x-Richtung unendlich ausgedehnt
Impuls ist durch k scharf festgelegt, Energie durch ω

Verallgemeinerung:

$$\boxed{\Psi(\vec{r},t) = A_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}$$

Mit Ortsvektor $\vec{r}$

und Wellenzahlvektor $\vec{k} = \text{const.}$

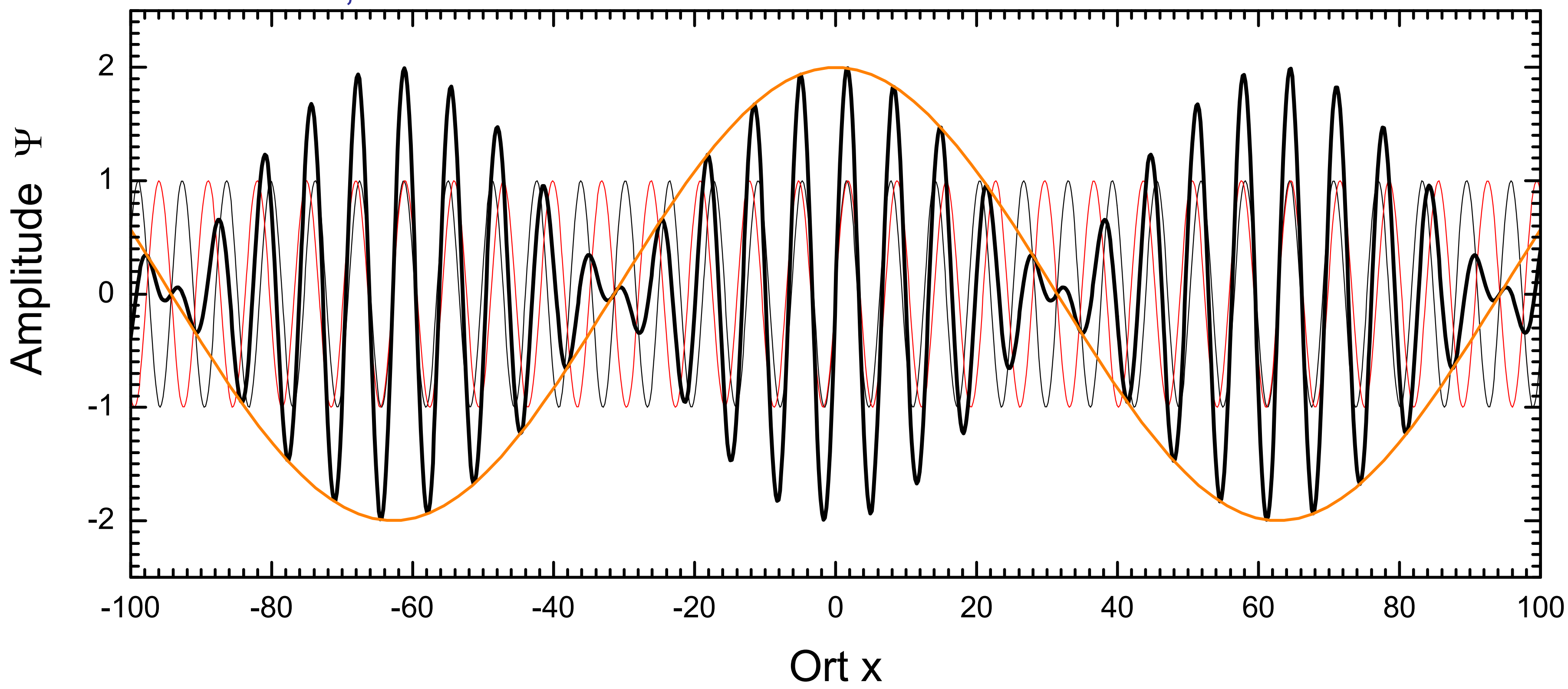
Überlagerung zweier ebener Wellen

$$\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t) = \exp[i(k_1 x - \omega_1 t)] + \exp[i(k_2 x - \omega_2 t)]$$

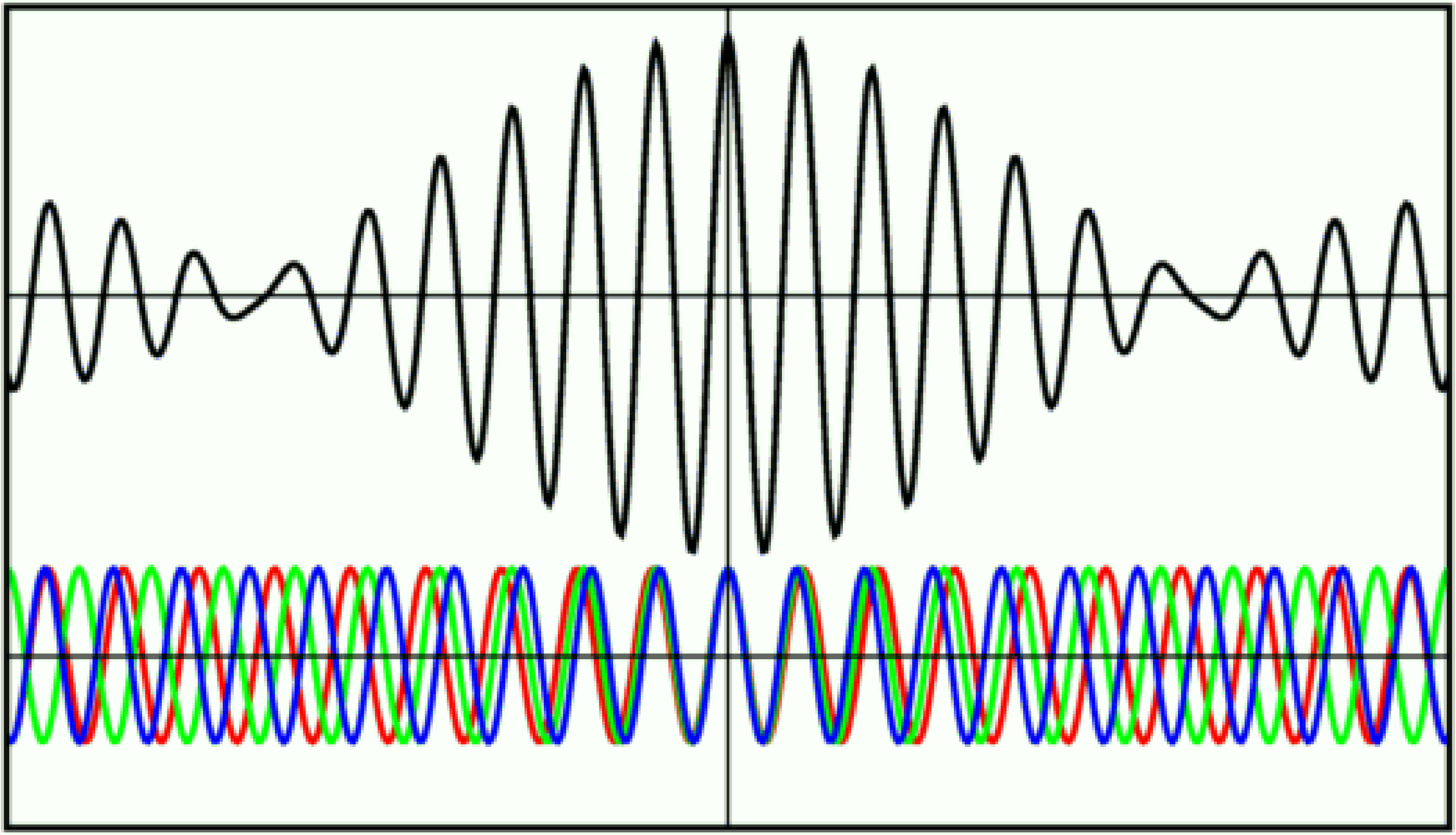
$$\Psi(x,t) = \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)] \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \quad \text{mit} \quad k_1 = k_0 - \frac{\Delta k}{2}, \quad \omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta \omega}{2}$$

$$k_2 = k_0 + \frac{\Delta k}{2}, \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta \omega}{2}$$

Interferenz, Momentaufnahme bei t=0

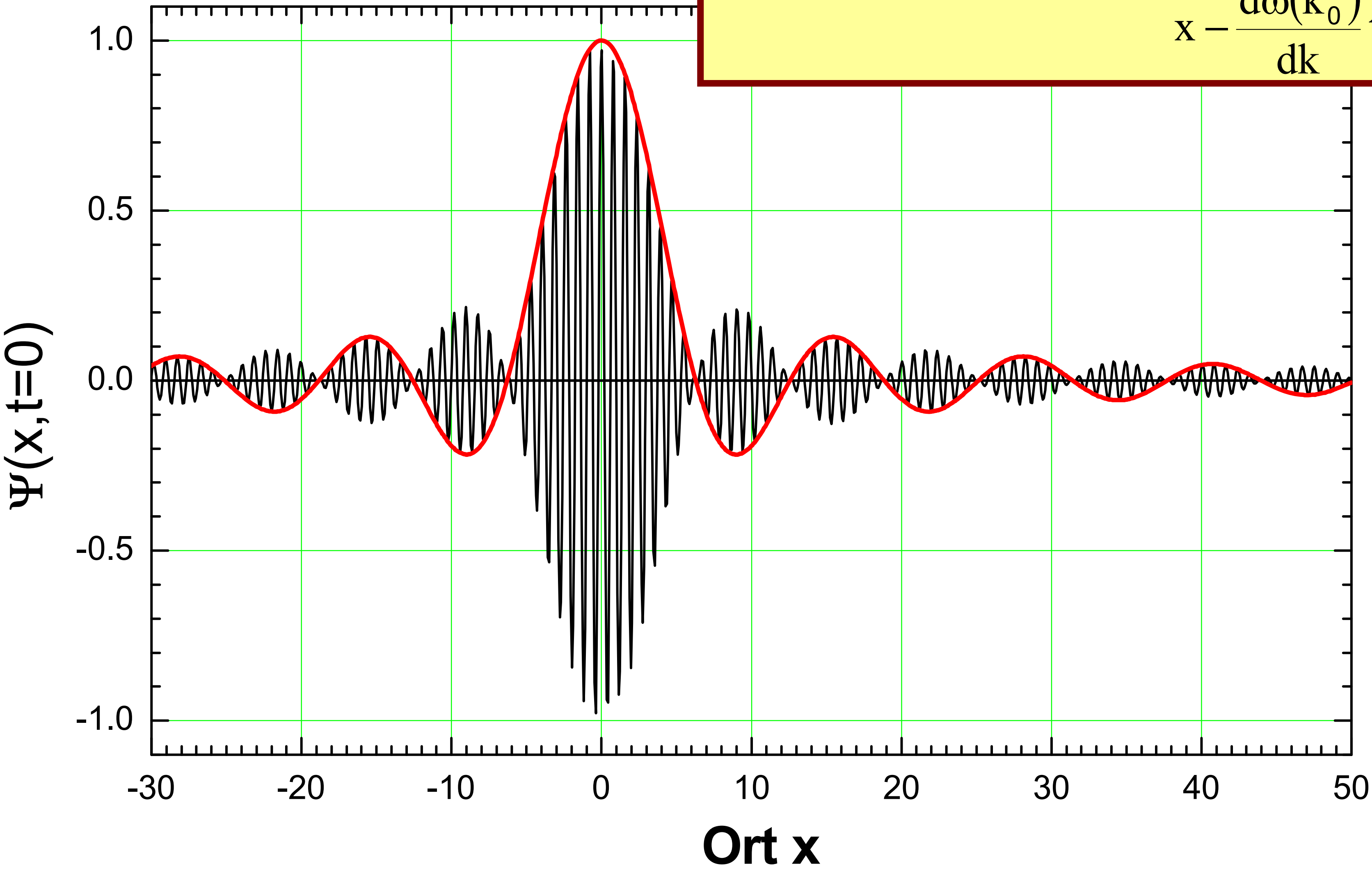


Interferenz ebener Wellen



Wellenpaket: rechteckige Spektralfunktion

$$\Psi(x,t) = A_0 e^{i(k_0 x - \omega t)} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta k}{2}\left(x - \frac{d\omega(k_0)}{dk}t\right)\right)}{x - \frac{d\omega(k_0)}{dk}t}$$



Unschärferelation

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar}$$

Ort und Impuls eines Teilchens sind nicht gleichzeitig scharf bestimmt.

Δx: Unsicherheit der Ortskoordinate

Δp: Unsicherheit des Impulses

Die Größe der Unschärfe (hier z.B. $\hbar$ hängt davon ab, wie man die Unsicherheit definiert (Wahrscheinlichkeitsaussage)

Werner Heisenberg 1901 – 1976
Nobelpreis 1931

Interpretation der Wellenfunktion

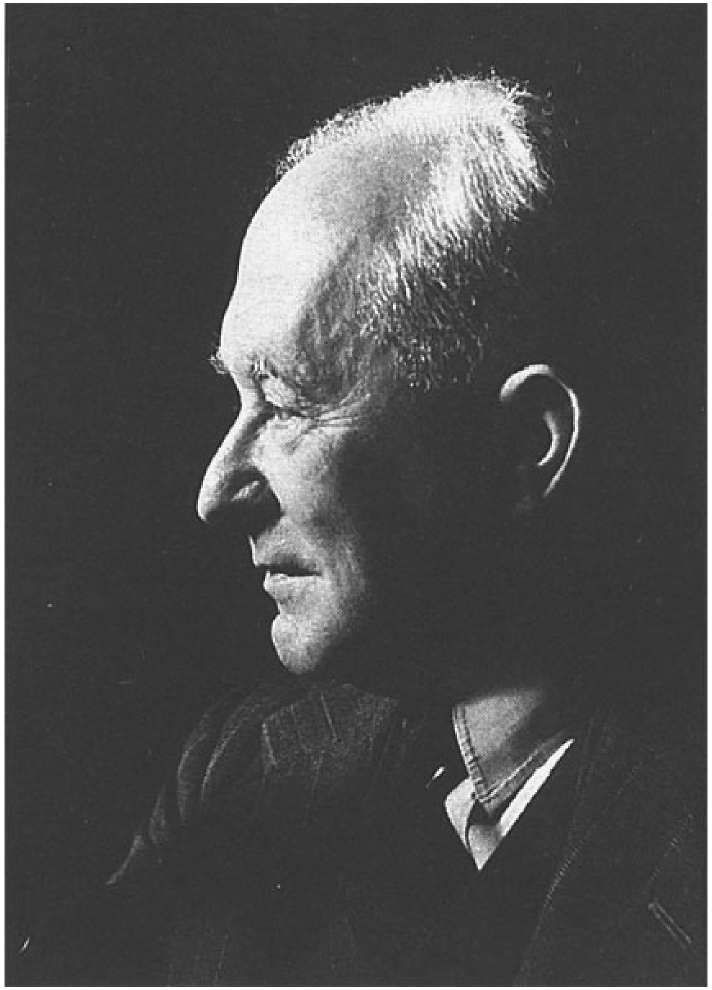
$$\boxed{\left|\Psi\right|^2}$$

ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte.
Mit anderen Worten: wird ein Teilchen durch eine Wellenfunktion Ψ beschrieben, so ist

$$\boxed{\left|\Psi(\vec{r})\right|^2 \mathrm{dV}}$$

die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Volumenelement dV am Ort $\vec{r}$ anzutreffen. Dementsprechend ist

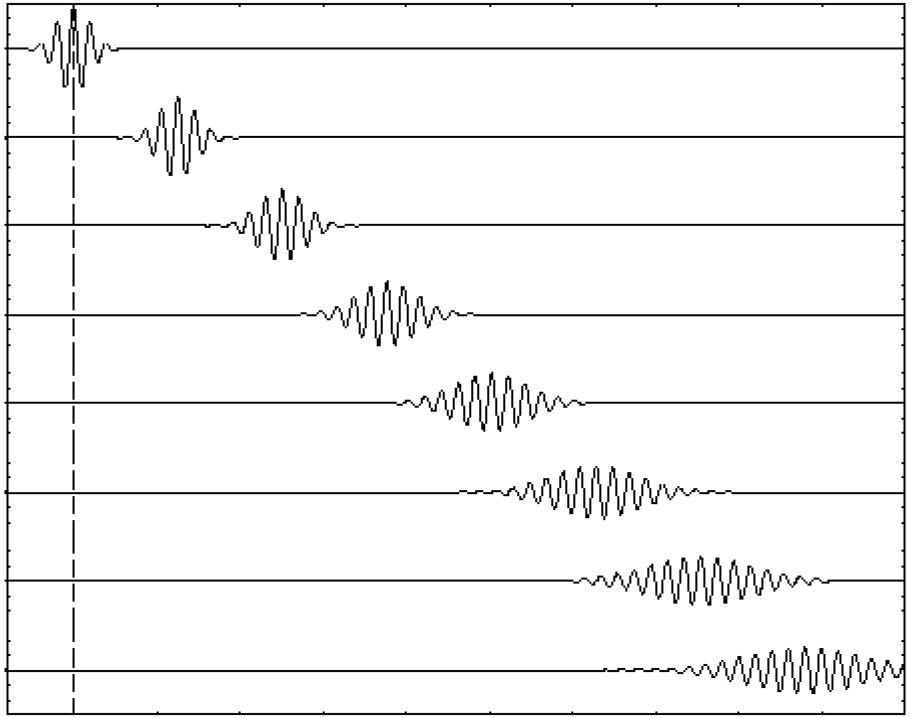
$$\boxed{\int_V \left|\Psi(\vec{r})\right|^2 \mathrm{dV} = 1}$$

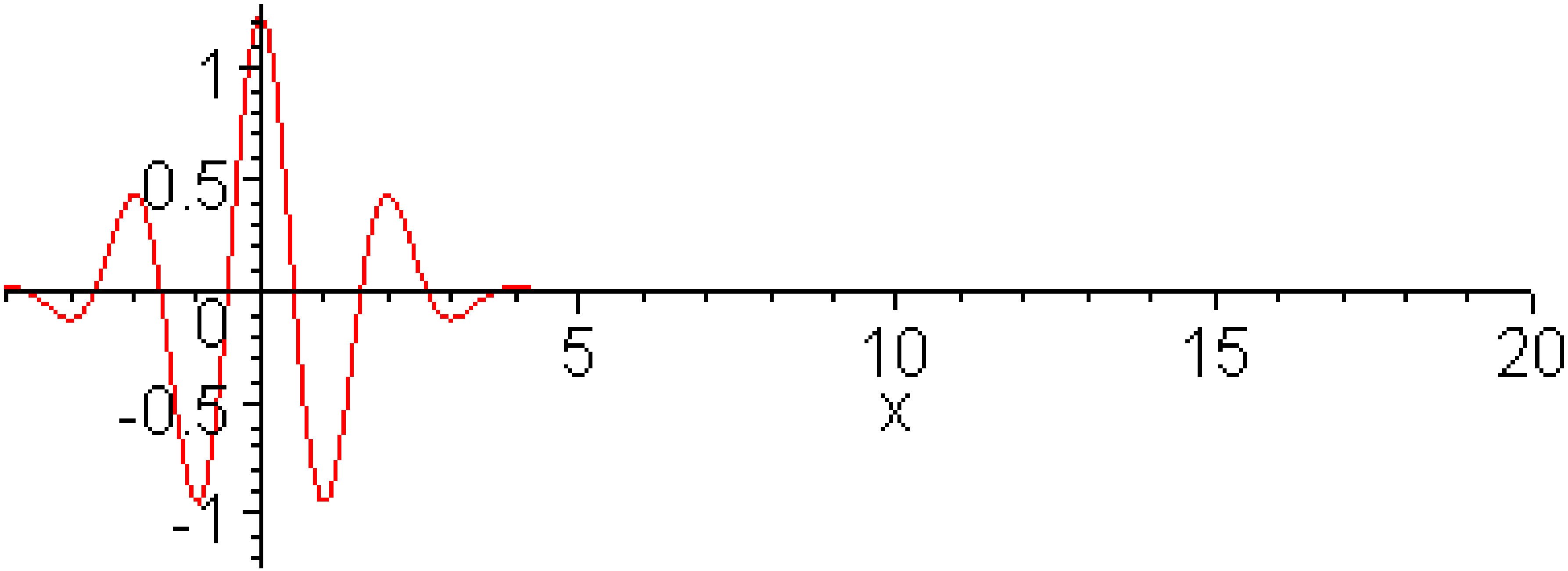


Max Born 1882-1970
Nobelpreis 1954

Zerfließen eines Wellenpakets, Dispersion

$\omega = \omega(k)$

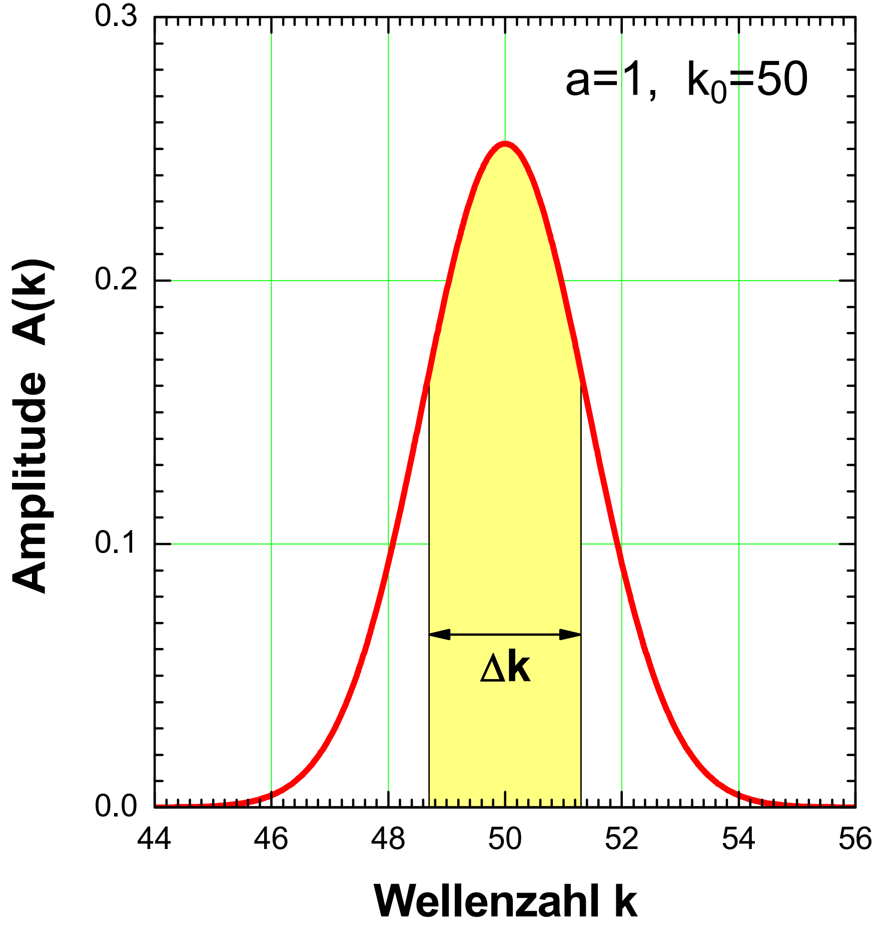


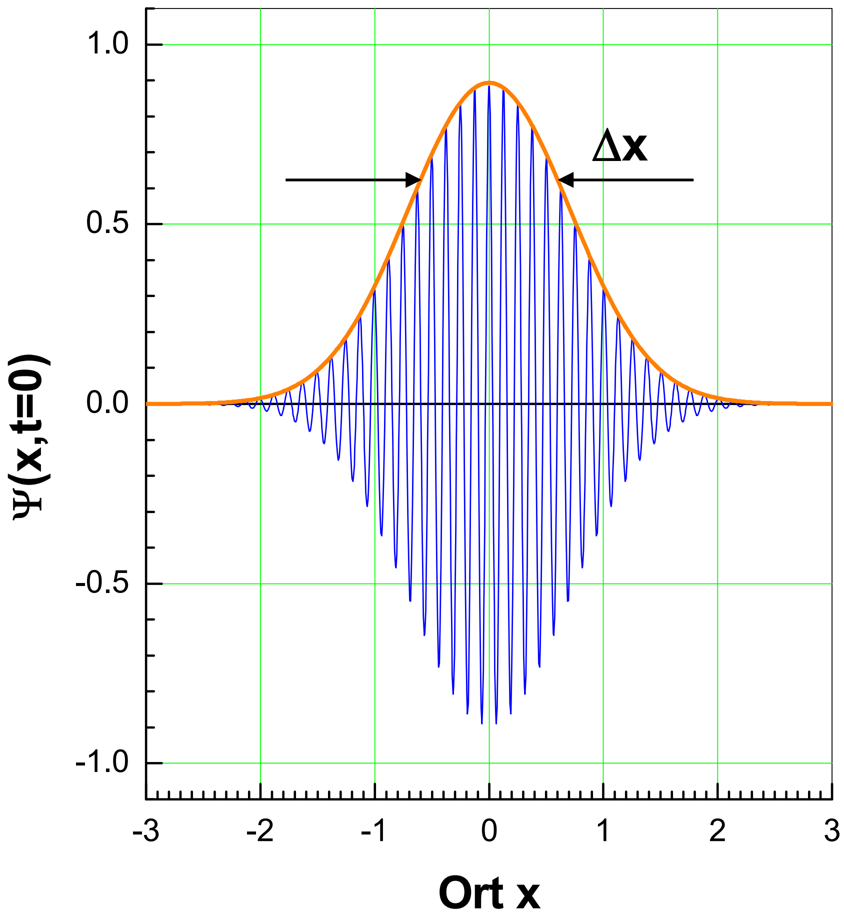


Gaussförmige Spektralfunktion

$$A(k) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{3/4}} \exp\left[-\left(\frac{a}{2}\right)^2 (k-k_0)^2 \right]$$

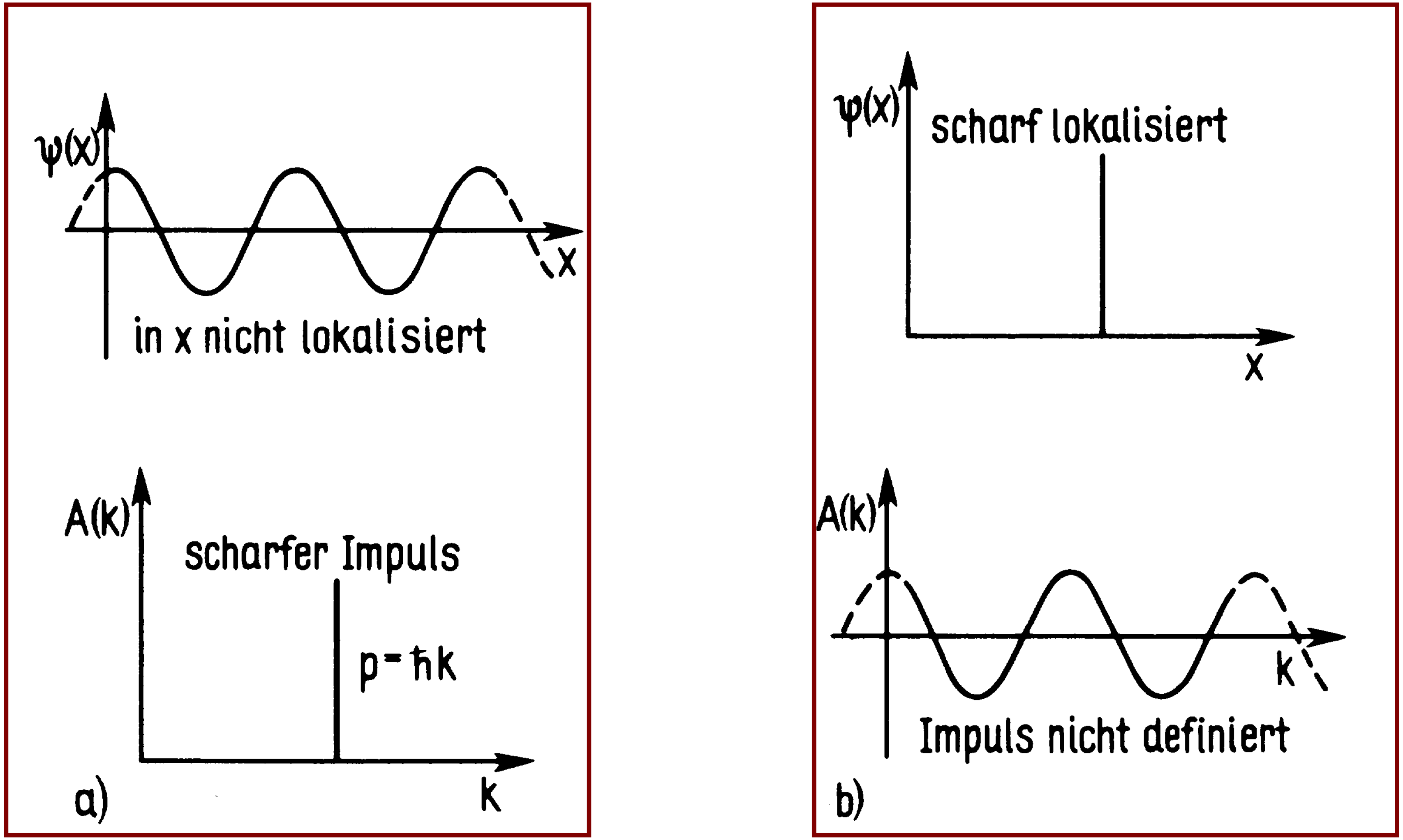
$$\Psi(x, t=0) = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4} e^{-x^2/a^2} e^{ik_0 x}$$





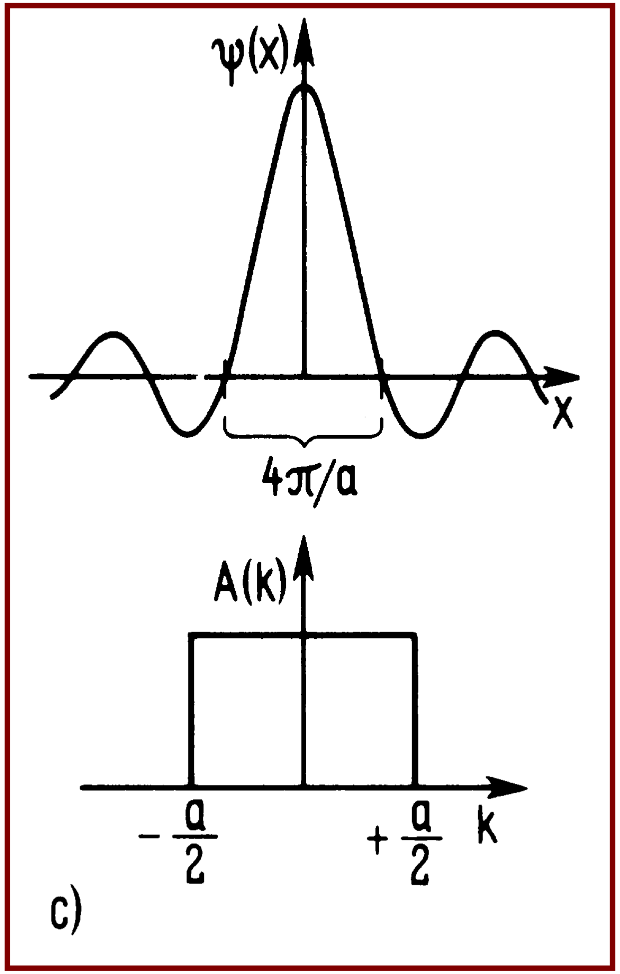
Spektralfunktionen von Wellenfunktionen 1

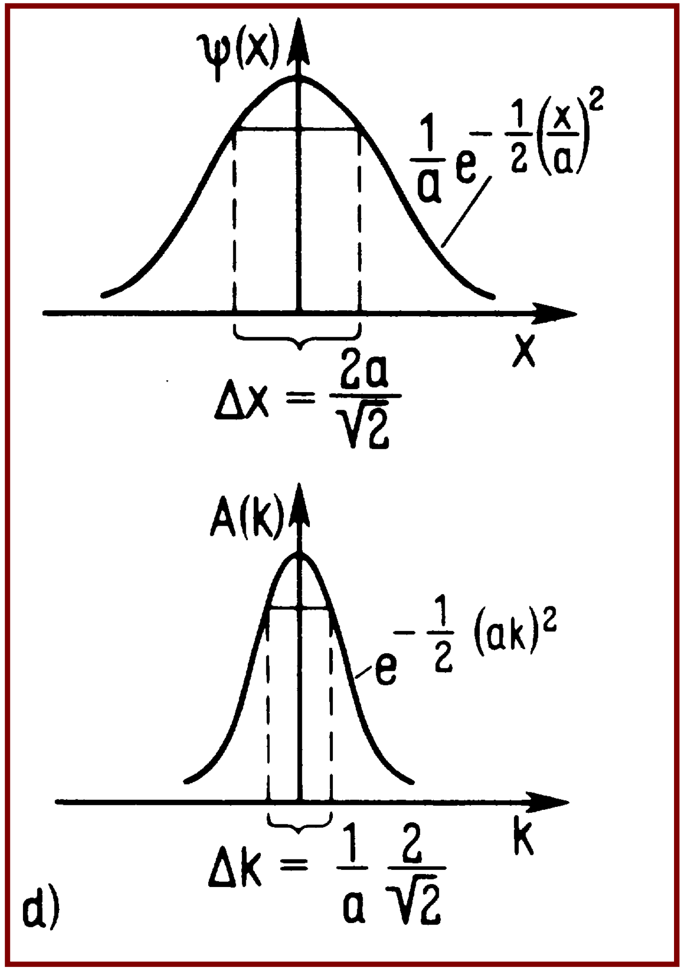
A(k) ist die Fourier-Transformierte von $\Psi(x)$



Spektralfunktionen von Wellenfunktionen 2

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\, e^{-ikx}\, dk$$

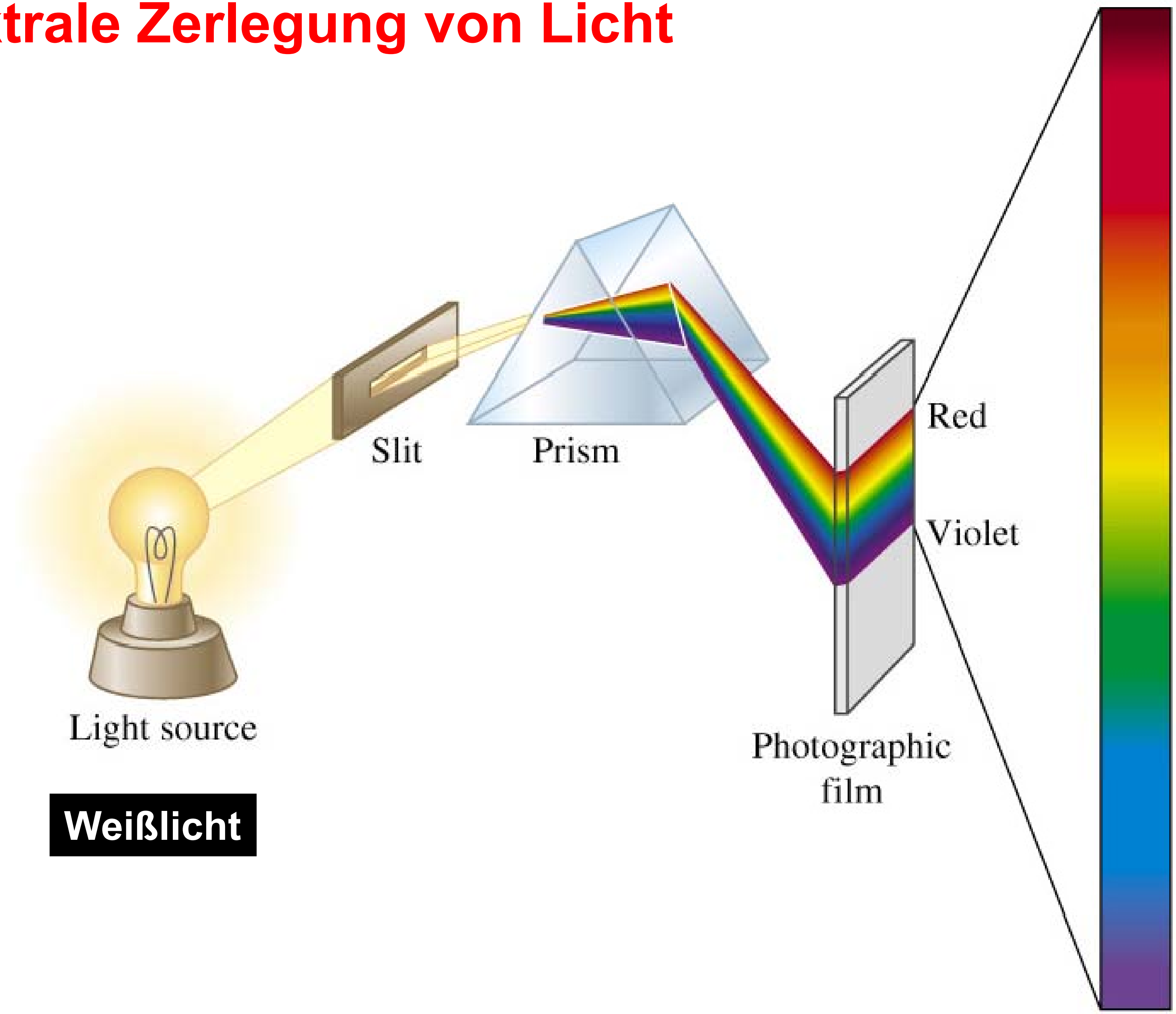




Kap. 8:

Das Bohrsche Atommodell des Wasserstoffatoms

Spektrale Zerlegung von Licht

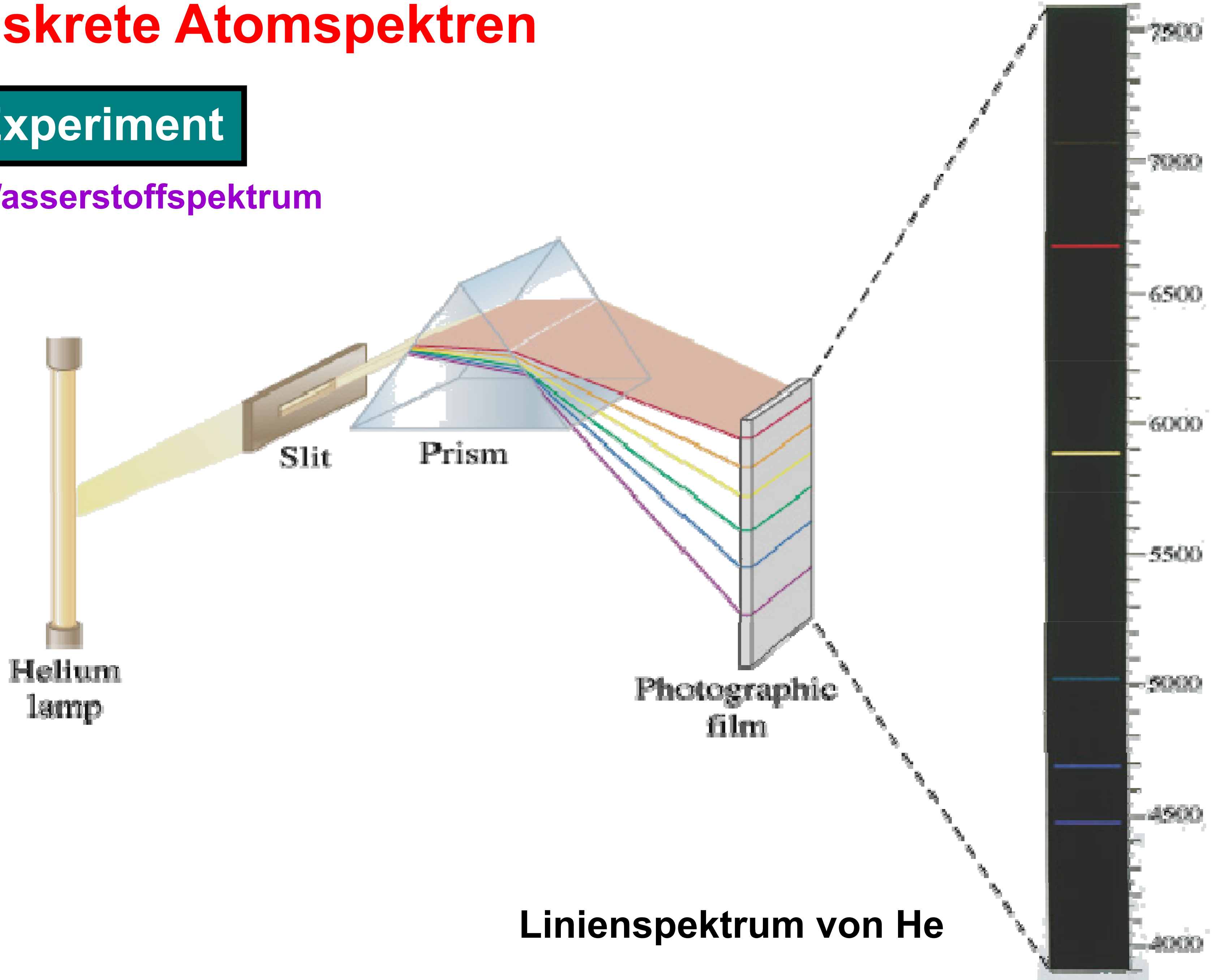


Weißlicht

Diskrete Atomspektren

Experiment

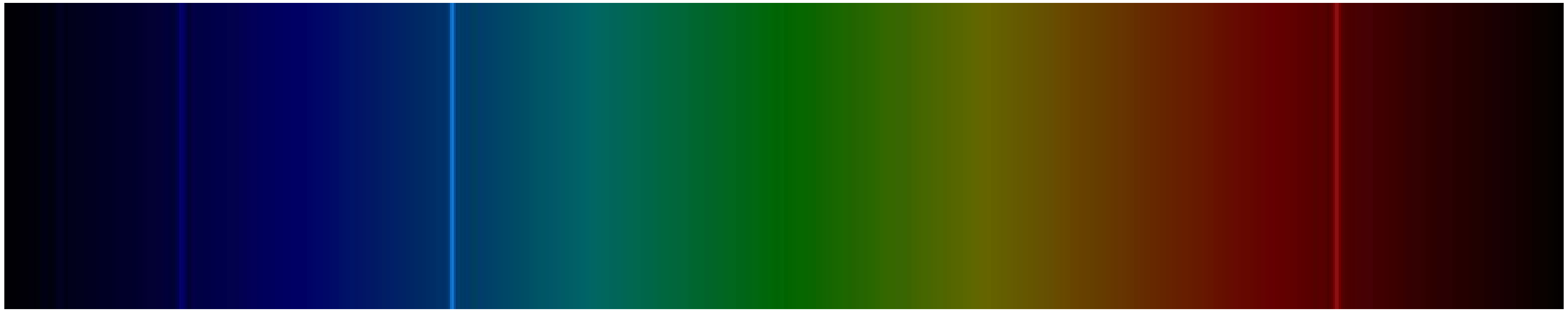
Wasserstoffspektrum



Linienspektrum von He

Das Linienspektrum des Wasserstoffatoms

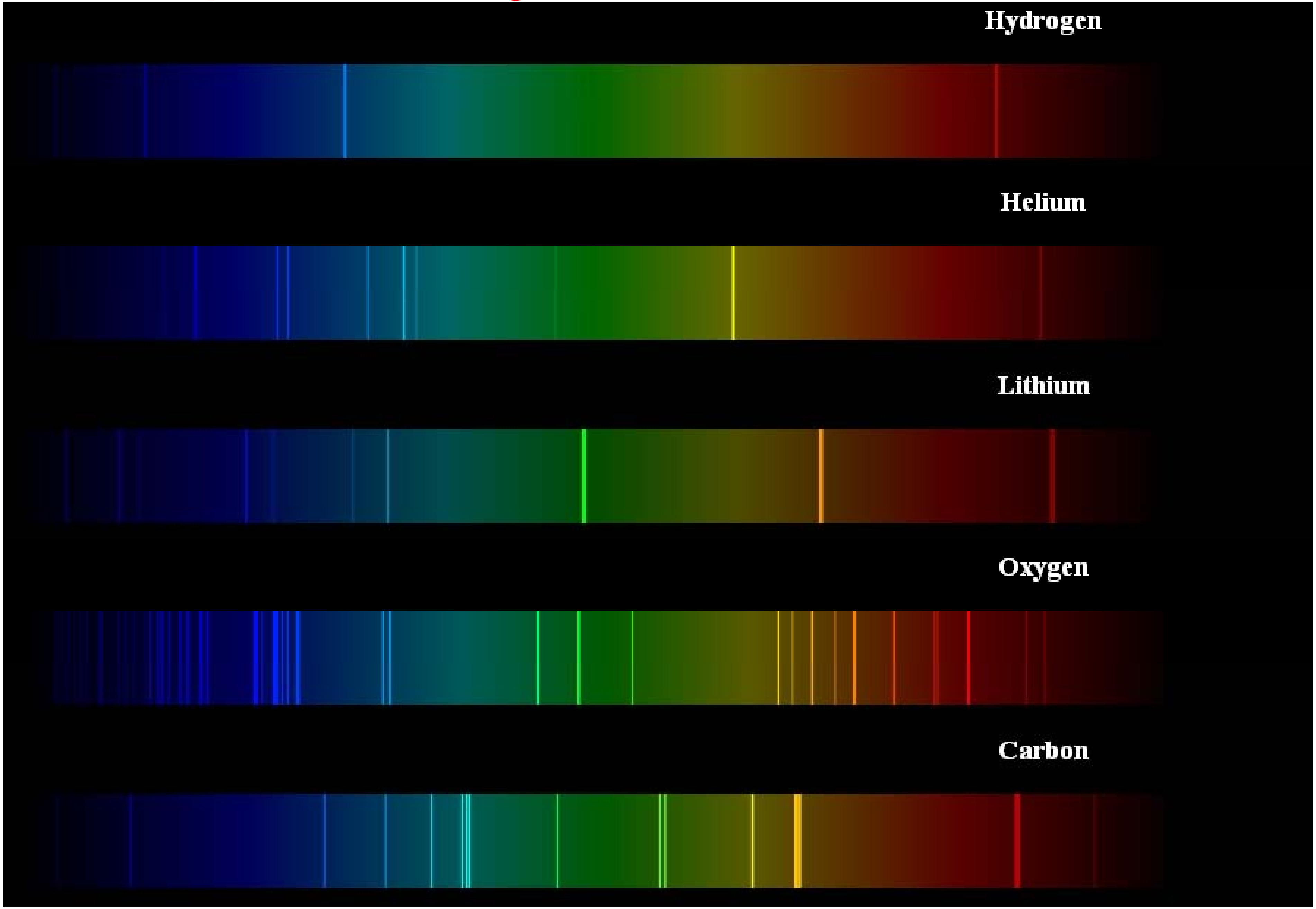
Linien im sichtbaren Bereich



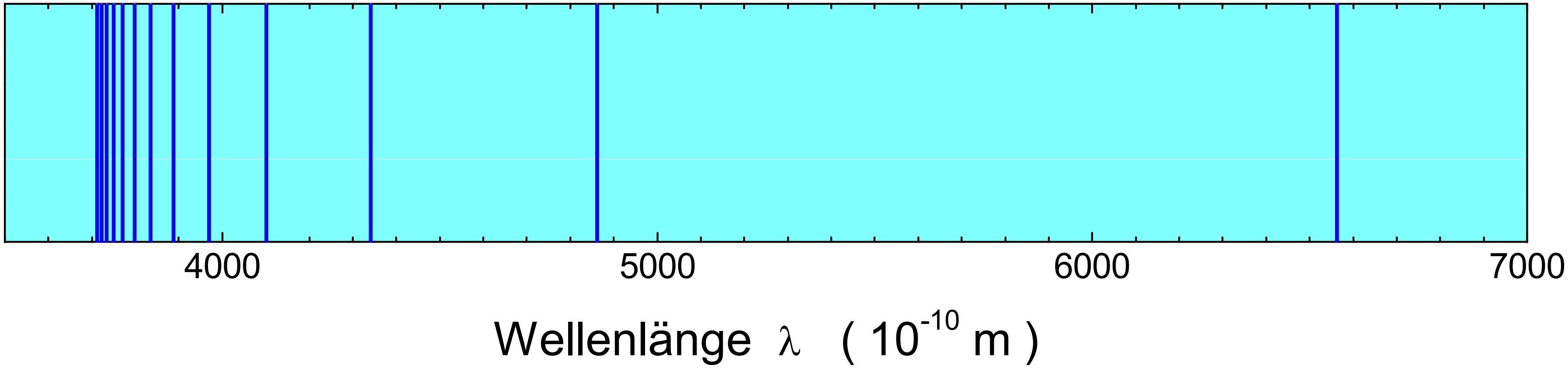
Kirchhoff, Bunsen:
Jedes Element hat charakteristische Emissionslinien

1853 A. J. Angström entdeckt H_α
1 Å = 10^{-10} m

Linienspektren: Fingerabdrücke der Atome



Balmer Formel



1885 Balmer (Genauigkeit im ppm-Bereich):

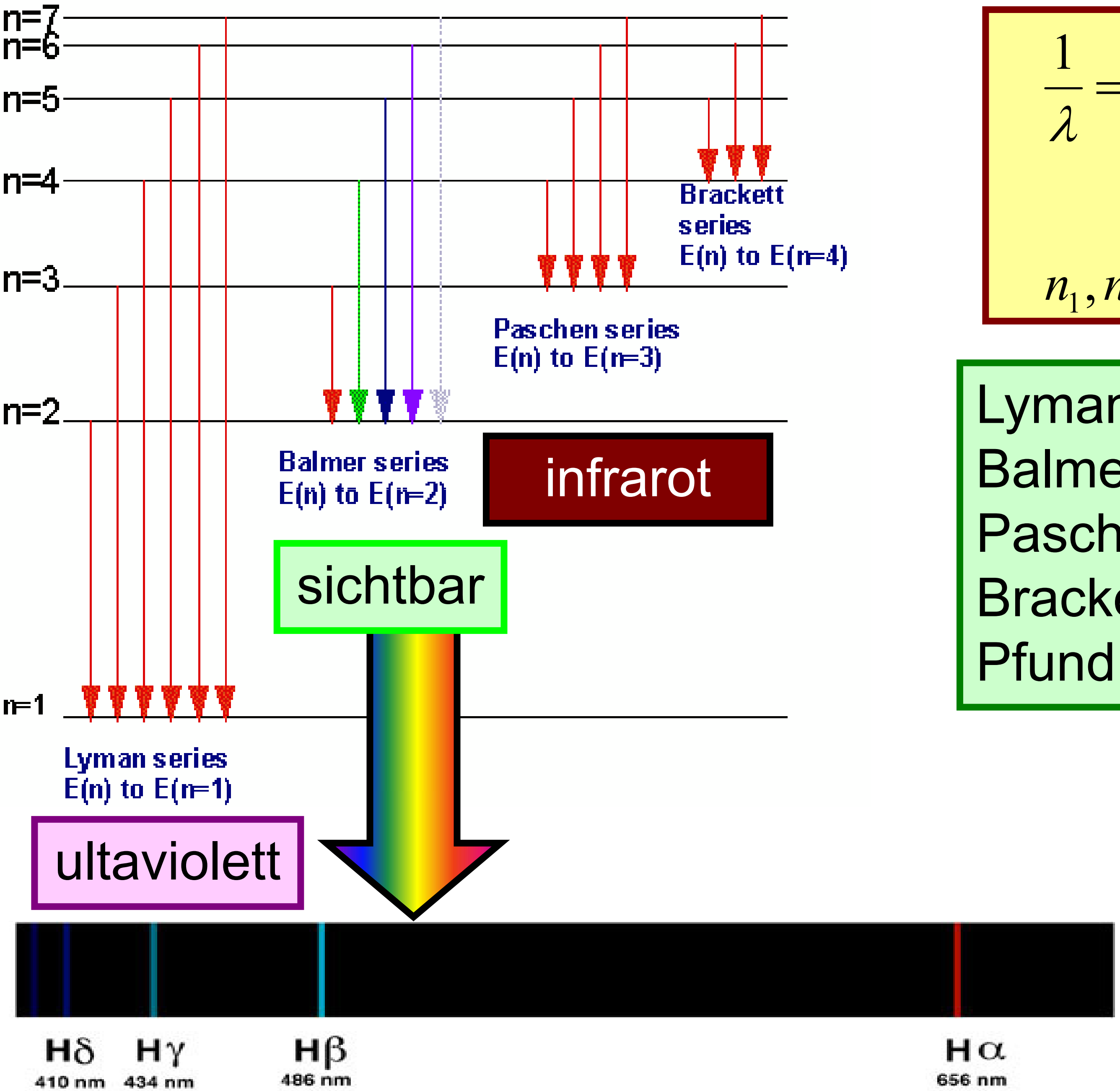
$$\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 4} G \qquad n = 3,4,5,\ldots \qquad G = 3645{,}6\,\mathring{A} : \text{empirische Konstante}$$

heute:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) \qquad n_{1,2} = 1,2,3,\ldots,\infty$$

für ^1H: **$R = 4/G = 10\,967\,757.8\ m^{-1}$** (Balmer: $10\,972\ mm^{-1}$)

Linienserien im atomaren Wasserstoff

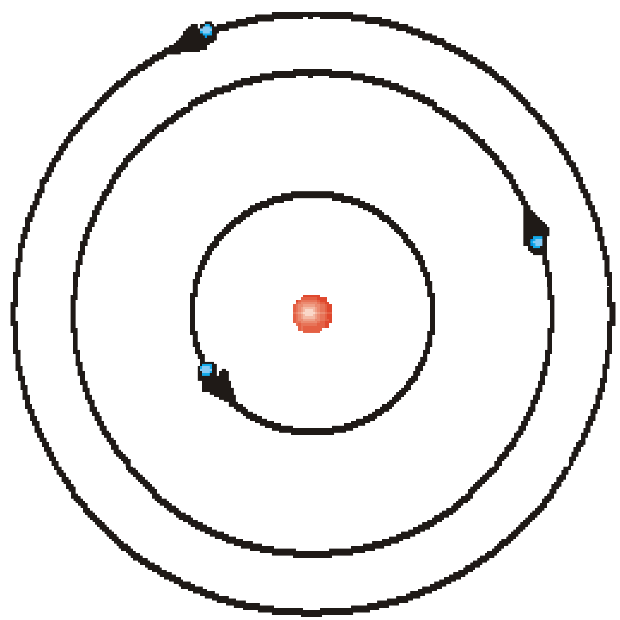


$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

$$n_1, n_2 = 1,2,3,\ldots,\infty$$

Lyman	$n_2=1$
Balmer	$n_2=2$
Paschen	$n_2=3$
Brackett	$n_2=4$
Pfund	$n_2=5$

Atommodell nach Rutherford



Elektronen auf Kreisbahnen
um den massereichen Kern
mit der Ladung e

Wasserstoffatom

Coulomb-Kraft

$$F_C = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

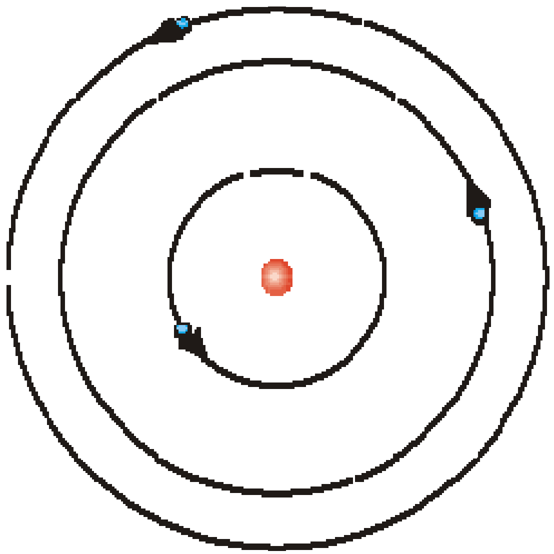
Zentrifugalkraft

$$F_Z = m\frac{v^2}{r}$$

Im Gleichgewicht ist $F_C = F_Z$

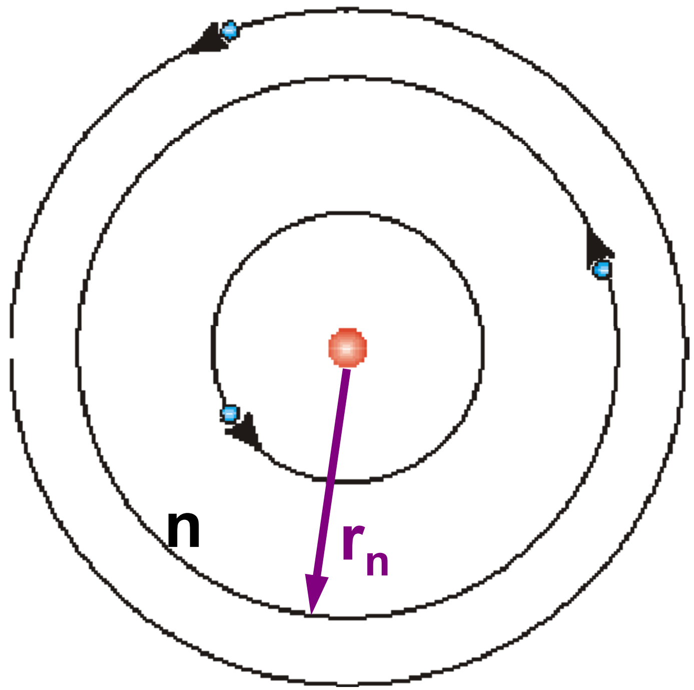
Probleme des klassischen Atommodells

Klassisch sind alle Kreisbahnen erlaubt, Änderung der Energie führt zu kontinuierlichen Spektren, nicht zu diskreten Linien



nach den Maxwell-Gleichungen strahlen beschleunigte Ladungen Energie ab, die Elektronen müssten also in den Kern stürzen

Bohrsches Atommodell



Postulate, Niels Bohr 1913

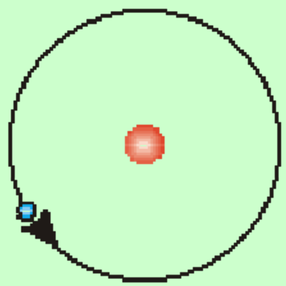
- Elektronen bewegen sich auf **Kreisbahnen**
- Die Bewegung ist **strahlungsfrei**
- Der Drehimpuls der Bahnen ist **quantisiert** **$l = n\hbar$**

(Historisch nicht ganz korrekt)

Für wasserstoffähnliche Systeme:

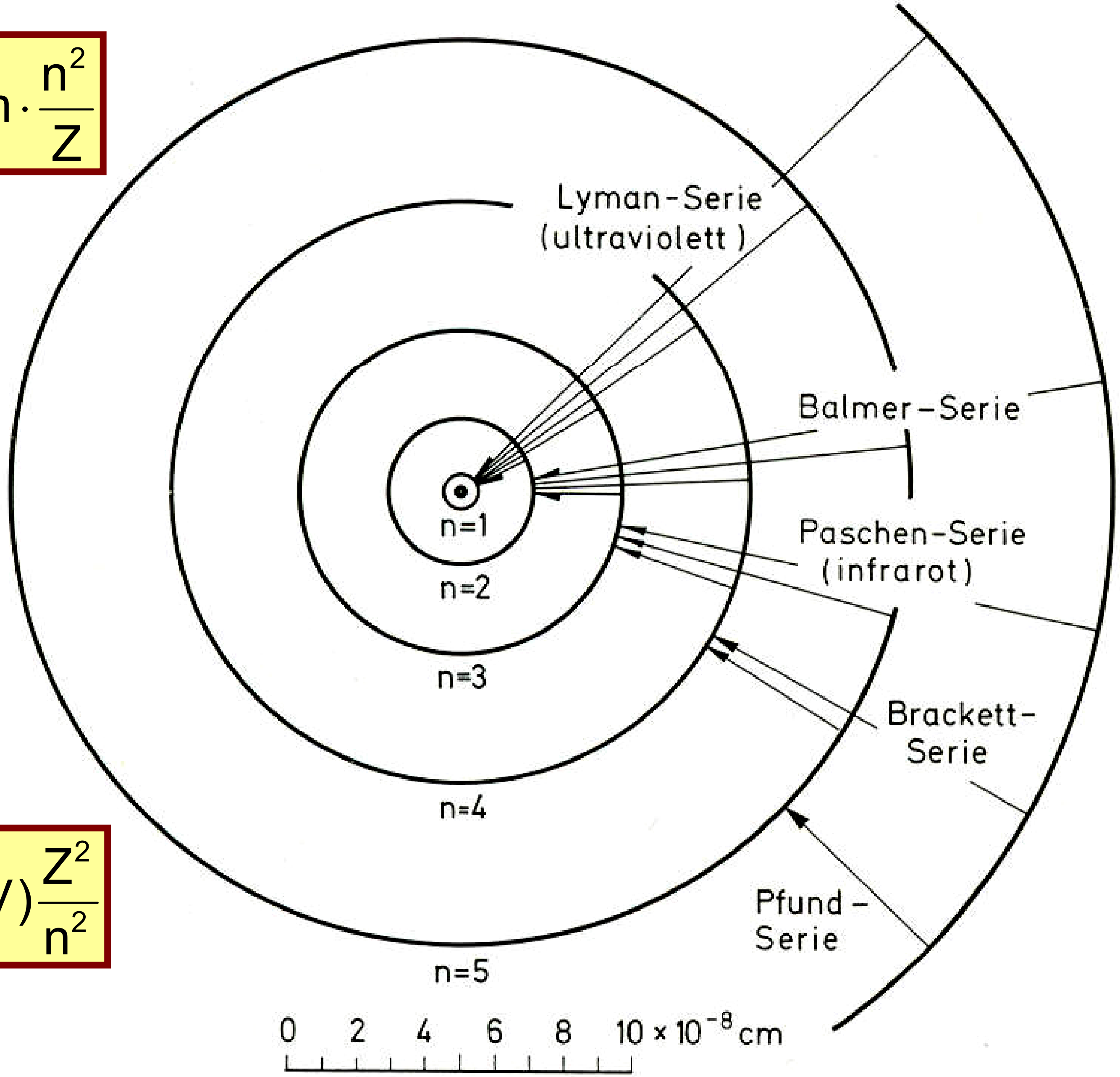
$$E_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2 m\frac{Z^2}{n^2} \approx -(13.6\ \text{eV})\frac{Z^2}{n^2}$$

$$r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{e^2}\cdot\frac{n^2}{m\,Z} \approx \left(0.529\cdot 10^{-10}\,\text{m}\right)\cdot\frac{n^2}{Z}$$



Bohrsches Atommodell

$$r_n \approx 0.529 \cdot 10^{-10} \mathrm{m} \cdot \frac{n^2}{Z}$$



$$E_n \approx -(13.6\ \mathrm{eV}) \frac{Z^2}{n^2}$$

Entdeckung des Deuteriums

Harold Clayton Urey
Nobelpreis Chemie 1934

Messung der Verschiebung der Wellenlängen in der Balmer-Serie um ca. 1 Ångstrøm

Table I. Calculated wavelengths *(in vacuo)* of the Balmer lines of hydrogen, deuterium, and tritium.

	λ (H)	λ (D)	λ (T)	$\Delta\lambda$ (*calc.*) (H — D)	$\Delta\lambda$ (*obs.*) (H — D)
α	6564.686	6562.899	6562.304	1.787	1.79
β	4862.730	4861.407	4860.966	1.323	1.33
γ	4341.723	4340.541	4340.148	1.182	1.19
δ	4102.929	4101.812	4101.440	1.117	1.12

The values have been calculated by using $M_H = 1.007775$, $M_D = 2.01363$, $M_T = 3.0151$ and $m_e = 5.491 \times 10^{-4}$ and taking R_H equal to 109677.759 cm^{-1}.

Aus Ureys Nobelpreis-Rede

Korrektur auf endliche Kernmasse

Bisherige (stillschweigende Annahme):
der Kern ist gegenüber dem Elektron unendlich viel schwerer

Tatsächlich **bewegt sich der Kern** jedoch mit, denn

$$m_e/m_p = 5.446\ 170\ 2173(25) \times 10^{-4} \neq 0$$

Vom Massenschwerpunkt aus gesehen, hat das Proton den Abstand
$r_p = r_e \cdot m_e/m_p \approx 50$ **fm**, der Massenschwerpunkt liegt weit außerhalb des Protons

Die vorangegangenen Formeln werden korrekt, wenn man für m nicht die Elektronenmasse sondern die reduzierte Masse

$$m = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$$

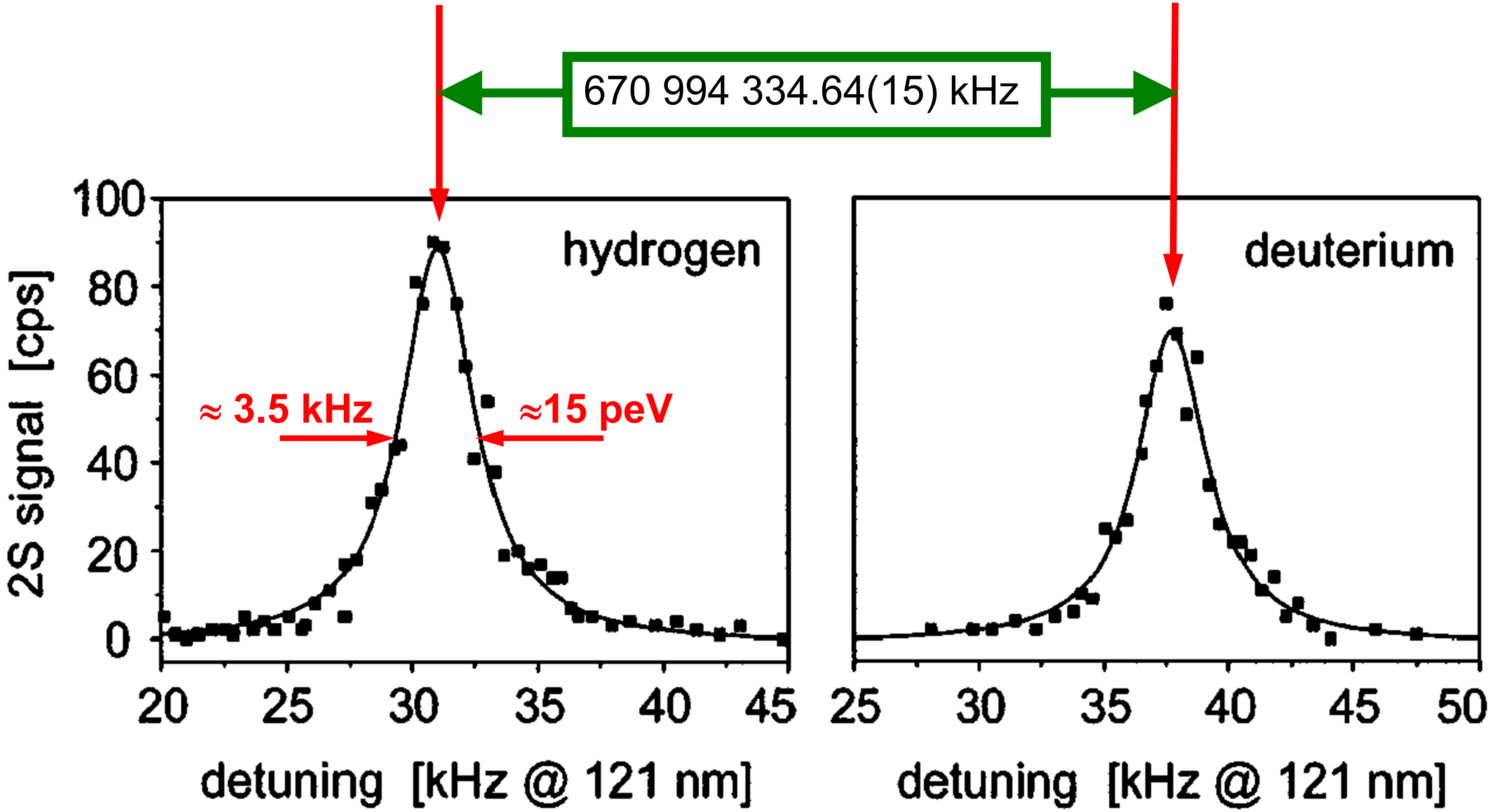
einsetzt und gleichzeitig für R den Wert (CODATA 2006)

$$R_\infty = 10\ 973\ 731.568\ 527(73)\ m^{-1}$$

Isotopie-Effekt in Wasserstoff und Deuterium

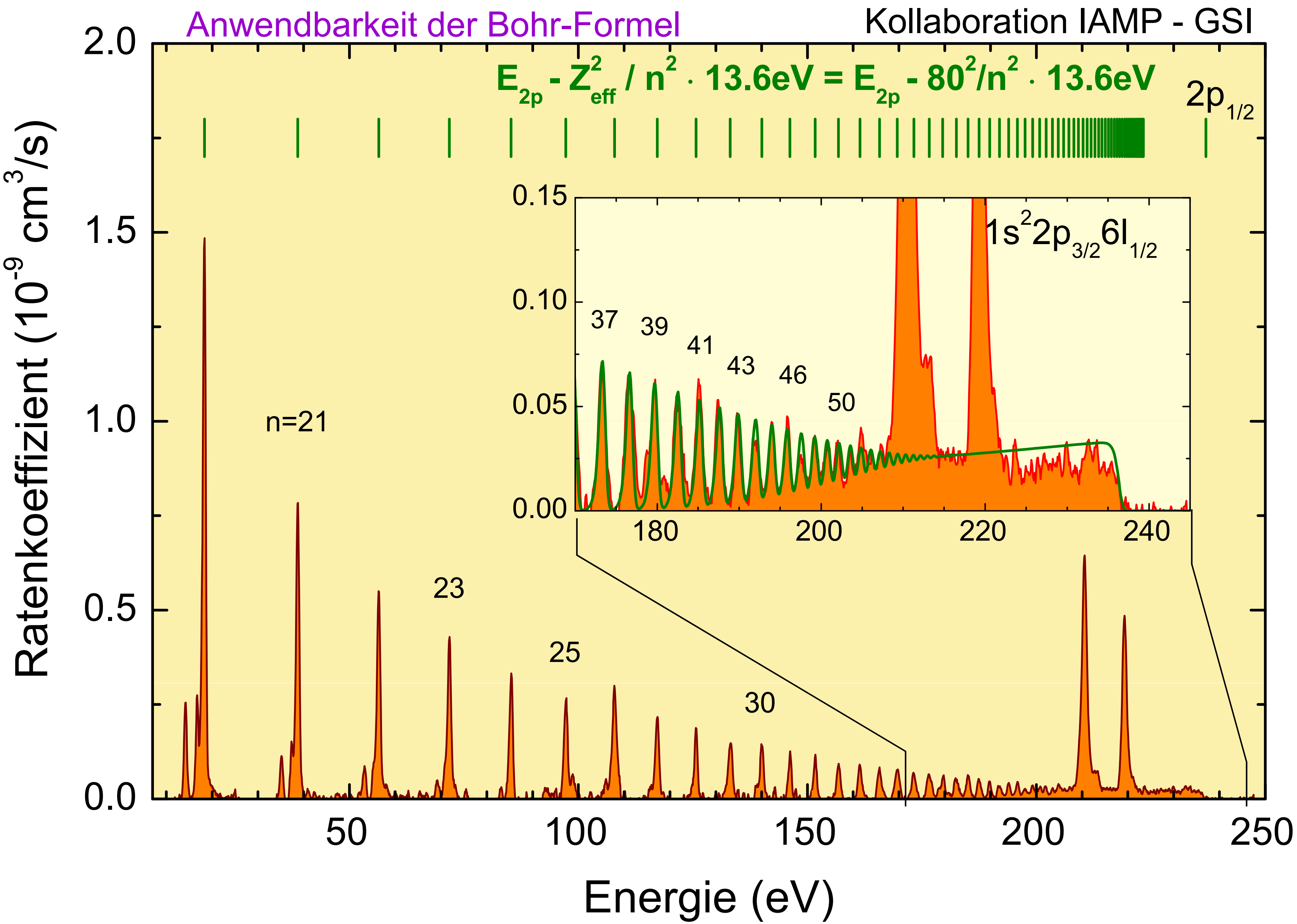
A. Huber et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 468 (1998) (Gruppe T. Hänsch)

Messung der 1s – 2s Übergangsenergie (Ly-α : n=1 $\rightarrow$ n=2)



2s-Anregungsspektren relativ zu unterschiedlichen experimentellen Frequenzstandards

Rydbergzustände $Bi^{79+}(1s^2\ 2p\ nl)$



Antiprotonisches Helium

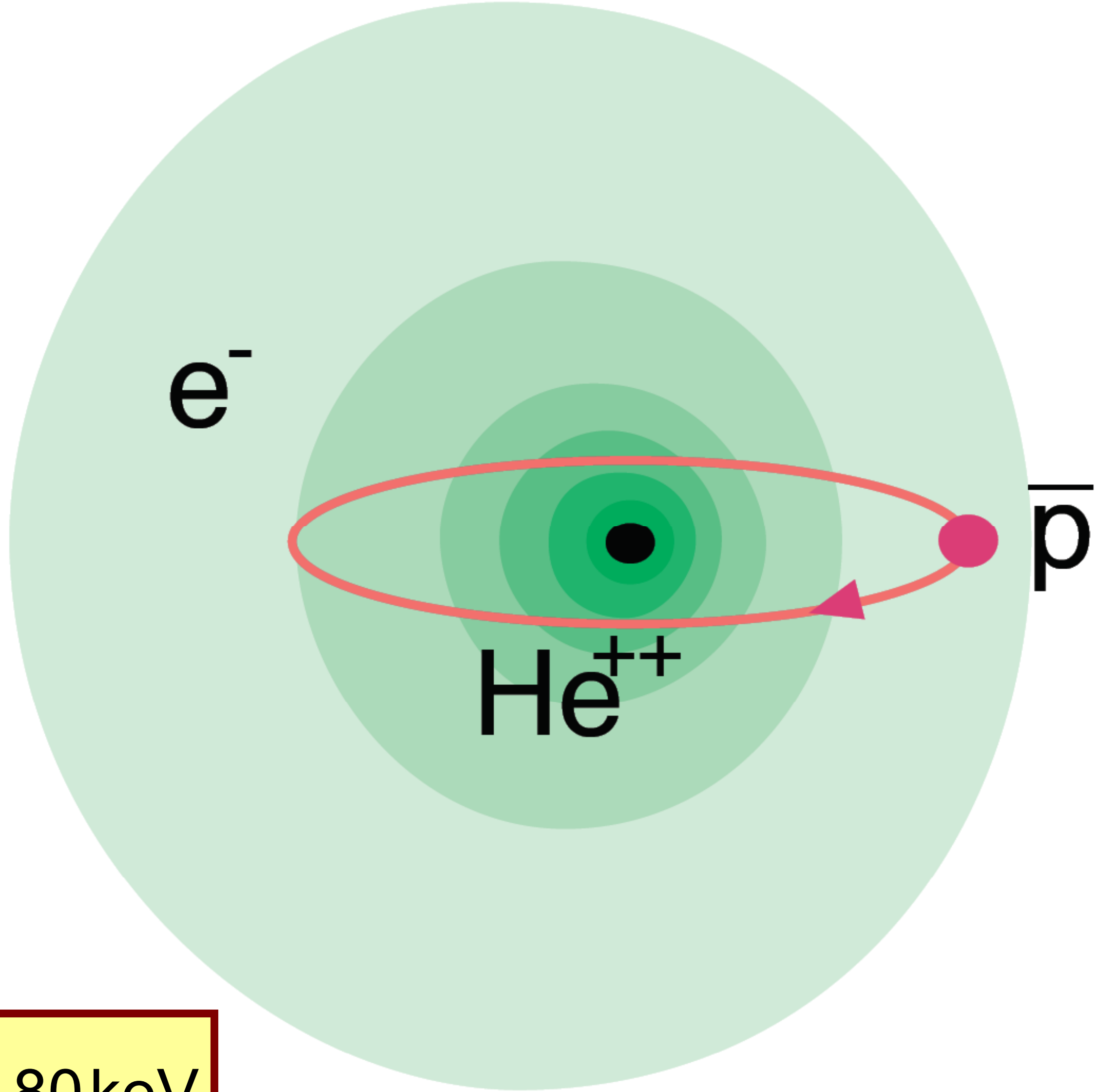
$$r_n \approx 0.529\,\mathring{A} \cdot \frac{m_e}{m}\frac{n^2}{Z}$$

m≈4/5u

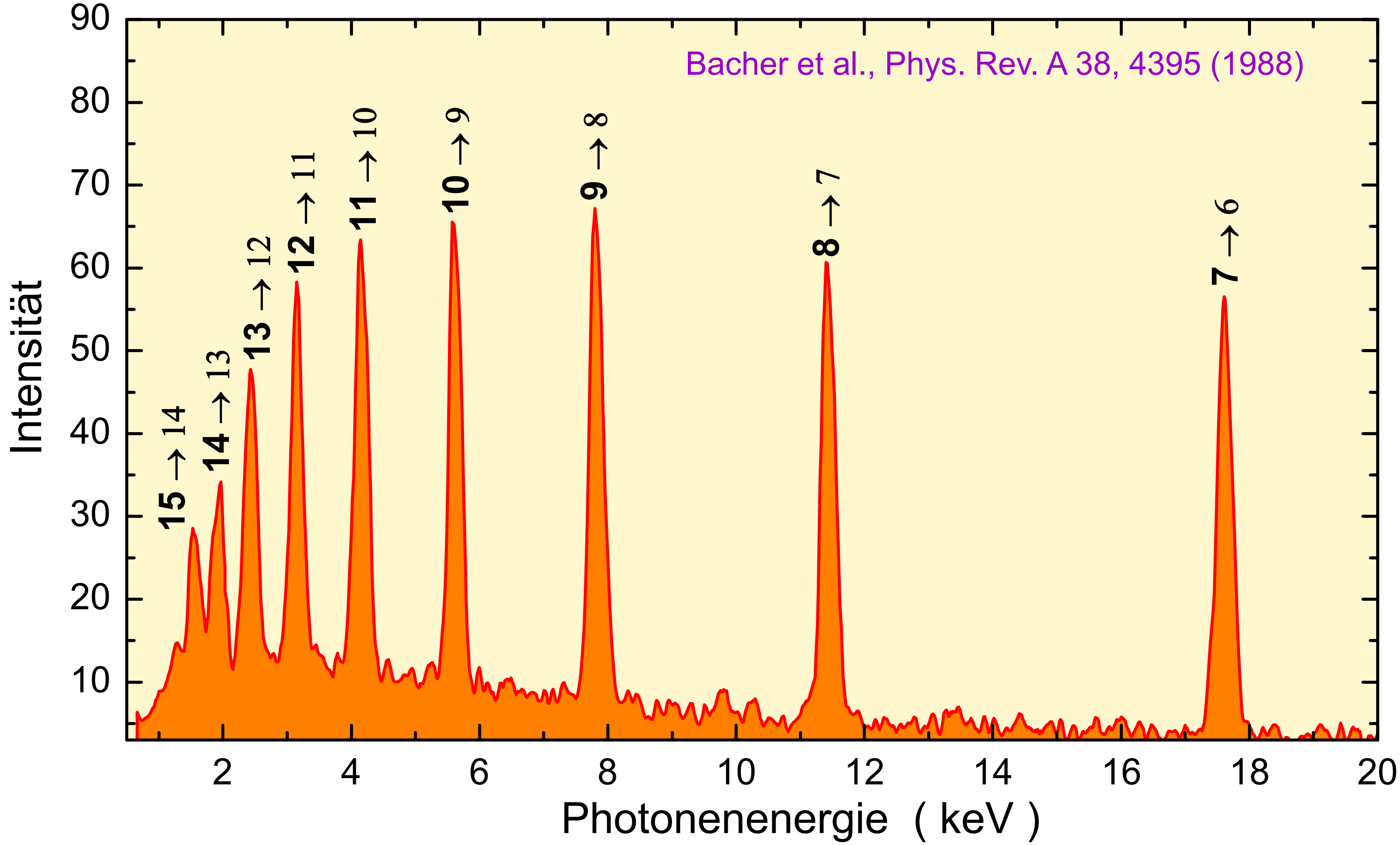
$$r_n \approx 18\,\mathrm{fm} \cdot n^2$$

Für n<100 bewegt sich das Antiproton innerhalb der K-Schale; dementsprechend ist die Bindungsenergie des Grundzustands:

$$|E_1| \approx 13.6\,\mathrm{eV} \cdot \frac{m}{m_e} Z^2 \approx 80\,\mathrm{keV}$$



Übergänge in antiprotonischem Neon



$$r_5 \approx 0.529\,\mathring{A} \cdot \frac{m_e}{m} \frac{n^2}{Z} \approx 3\,\mathrm{fm} < r_K$$

$$E_1 \approx -13.6\,\mathrm{eV} \cdot \frac{m}{m_e} Z^2 \approx -2.4\,\mathrm{MeV}$$

Myonische Atome

$m_\mu = 207\, m_e \quad \Rightarrow$ **Grundzustandsenergie**

$E_1 = 207 \cdot Z^2 \cdot 13.6\ \text{eV}$

zugehöriger Bohr-Radius

$r_1 = 1/207 \cdot 5.29 \cdot 10^{-11}\ \text{m} / Z$

Beispiel Uran:	Radius der elektronischen K-Schale	$\approx$ 500 fm
	Radius der myonischen K-Schale	$\approx$ 2.8 fm
	Radius des Urankerns ($r_0\, A^{1/3}$)	$\approx$ 7.6 fm

Myonenbahnen mit n=2 bis n=14

außerhalb des Kerns

innerhalb der elektronischen K-Schale

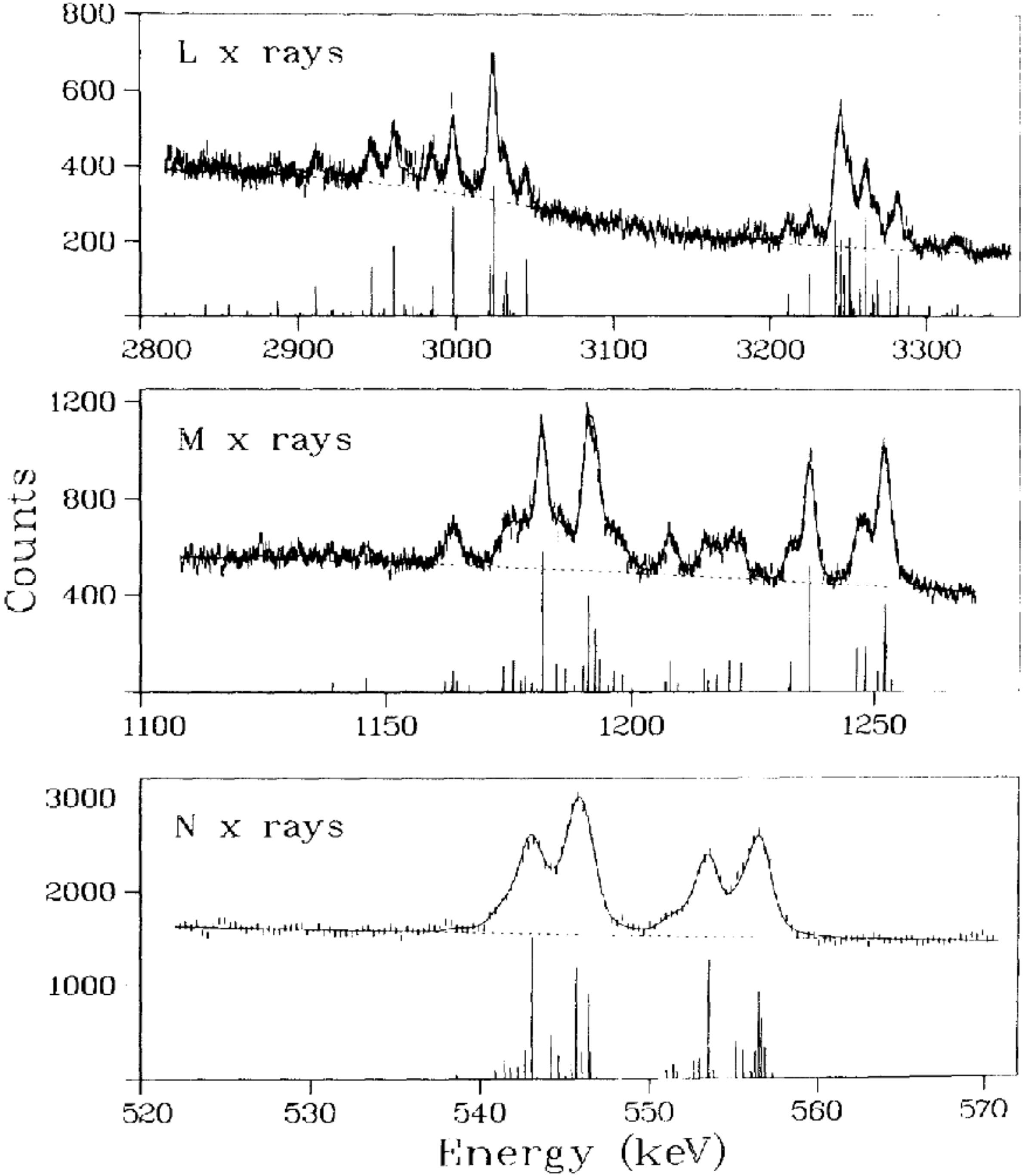
$\Rightarrow$ Wasserstoff-ähnliche Zustände

Übergangsenergie nach Bohr:

n=3 $\rightarrow$ n=2 $\quad E_{32} = 207 \cdot 92^2 \cdot 13.6\ \text{eV} \cdot (1/2^2 - 1/3^2)$

$\approx$ **3.3 MeV**

Spektroskopie am myonischen Uran



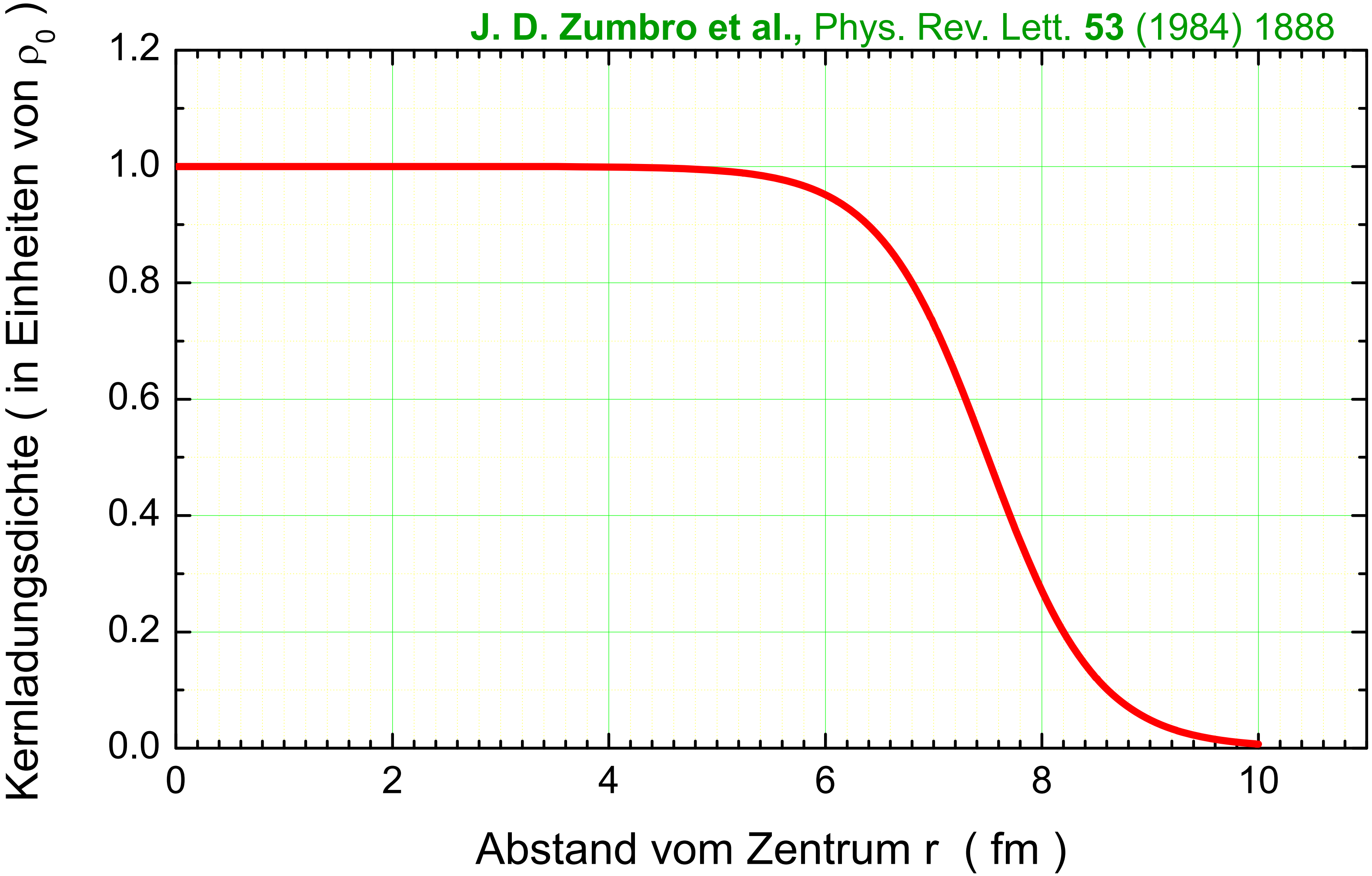
J. D. Zumbro et al.,
Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 1888
Bestimmung der derzeit (2007) anerkannten Kernradien der Uran Isotope A=233, 234, 235, 238

Resultate für Uran: Ladungsverteilung

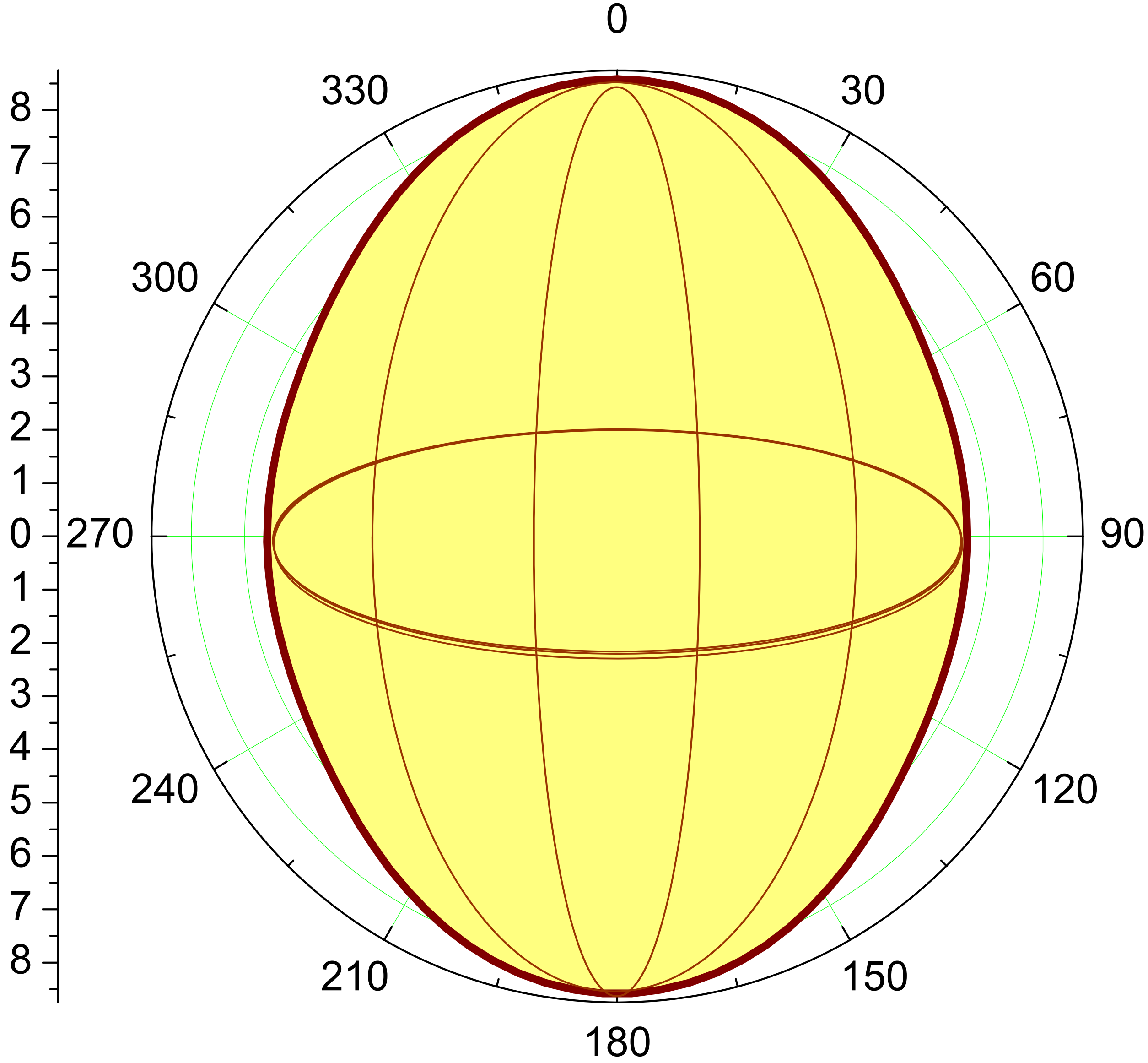
Kernladungsverteilung in ^{238}U

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r - R_{1/2}}{z}\right)}$$

Ansatz mit $R_{1/2}$ = 7.5 fm; z = 0.5046 fm



Resultate für Uran: Kerngeometrie



U-238:
Rotationskörper mit
Quadrupolmoment
und
Hexadekupolmoment

J. D. Zumbro et al., Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 1888