Übungen zur Experimentalphysik III
Wintersemester 2010/2011

Institut für Atom- und Molekülphysik
Leihgesterner Weg 217, 35392 Gießen

Lösungen zum Hausaufgabenblatt 3 vom 10.11.2010

Aufgabe H3.1 (4 Punkte)

Welche Energie benötigen α-Teilchen mindestens, um einem Goldkern (Z=79, A=197) so nahe zu kommen, dass beide Kerne sich berühren?

Hinweis:

Näherungsweise kann man für die Kernradien ansetzen: $r = r_0 A^{1/3}$ mit $r_0 = 1.4$ fm.

Lösung

Abschätzung für den Radius eines Atomkern mit Massenzahl A: $r_A = r_0 A^{1/3}$ mit $r_0 = 1.4$ fm.

Damit kann der Abstand d berechnet werden, bei dem sich α-Teilchen und Goldkern gerade berühren.

$$d = r_\alpha + r_{\mathrm{Au}} = 1.4 \times 10^{-15}\ \mathrm{m} \times \left(4^{1/3} + 197^{1/3}\right) = 10.37 \times 10^{-15}\ \mathrm{m} \tag{H3.1}$$

Die kinetische Energie der α-Teilchen muss für die Überwindung der Coulombbarriere ausreichen, d. h.

$$E_\alpha \geq E_{\mathrm{Coul}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 d} \tag{H3.2}$$

Mit $e^2/(4\pi\varepsilon_0) = 1.44 \times 10^{-9}$ eV m, $Z_1 = 2$ und $Z_2 = 79$ ist

$$E_{\mathrm{Coul}} = \frac{2 \times 79 \times 1.44 \times 10^{-9}\ \mathrm{eV\ m}}{1.037 \times 10^{-14}\mathrm{m}} = 21.9\ \mathrm{MeV} \tag{H3.3}$$

Das α-Teilchen benötigt eine Energie von mindestens 21.9 MeV, um sich dem Goldkern soweit annähern zu können, dass sich beide Kerne berühren.

Aufgabe H3.2 (6 Punkte)

In ihrem epochalen Experiment streuten Rutherford, Geiger und Marsden α-Teilchen an einer Goldfolie. Die α-Teilchen wurden aus einem radioaktiven ^{222}Rn-Präparat emittiert mit einer kinetischen Energie von 5.49 MeV. Bis zu einem Streuwinkel $\vartheta = 150°$ folgt der gemessene Wirkungsquerschnitt der Vorhersage für punktförmige geladene Teilchen. Wir groß sind die kinetische Energie und der dem Laborwinkel $\vartheta = 150°$ entsprechende Streuwinkel im Schwerpunktsystem? Wie groß ist der Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem und wie groß im im Laborsystem?

Hinweis:

Beachten Sie Aufgabe H1.1.

Lösung

Im Laborsystem ist die kinetische Energie der α-Teilchen

$$E^{\text{Lab}} = \frac{m_\alpha}{2} v_\alpha^2 = 5.49 \text{ MeV} \tag{H3.4}$$

Im Schwerpunktsystem muss die reduzierte Masse einsetzt werden, d. h.

$$E^{\text{cm}} = \frac{1}{2}\frac{m_\alpha m_{\text{Au}}}{m_\alpha + m_{\text{Au}}} v_\alpha^2 = \frac{m_{\text{Au}}}{m_\alpha + m_{\text{Au}}} E^{\text{Lab}} \tag{H3.5}$$

$$= \frac{197}{4+197} \times 5.49 \text{ MeV} \approx 0.980 \times 5.49 \text{ MeV} \approx 5.38 \text{ MeV} \tag{H3.6}$$

Aufgrund des großen Massenunterschieds ist die kinetische Energie im Labor- und Schwerpunktsystem fast dieselbe.

Die Umrechnungsformel zwischen Streuwinkel $\vartheta > 90°$ im Laborsystem und Streuwinkel θ im Schwerpunktsystem ist (s. Vorlesung)

$$\cos\theta = -k \sin^2\vartheta \pm \cos\vartheta \sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta} \tag{H3.7}$$

Das Massenverhältnis ist $k = m_\alpha / m_{\text{Au}} = 4/197 = 0.0203$. Mit $\vartheta = 150°$ ist $\sin\vartheta = 0.5$ und $\cos\vartheta = -0.8660$ und damit

$$\cos\theta = -0.0203 \times 0.25 \pm (-0.8660)\sqrt{1 - (0.0203 \times 0.5)^2} \approx -0.005075 \mp 0.8659 \tag{H3.8}$$

Da Rückwärtsstreuung vorliegt, muss gelten $\cos\theta < 0$, und somit ist das negative Vorzeichen zu wählen. Es ergibt sich $\theta = \arccos(-0.870975) \approx 150.6°$.

Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^{\text{cm}}} = \frac{1}{16}\left(\frac{Z_\alpha Z_{\text{Au}} e^2}{4\pi\varepsilon_0 E^{\text{cm}}_{\text{kin}}}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \tag{H3.9}$$

$$= \left(\frac{2 \times 79 \times e \times 1.6022 \times 10^{-19} \text{ A s}}{16\pi \times 8.854 \times 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1} \times 5.38 \times 10^6 \text{ eV}}\right)^2 \times \frac{1}{\sin^4(75.3°)} \tag{H3.10}$$

$$= \frac{(1.057 \times 10^{-14} \text{ m})^2}{0.9673^4} = 1.28 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 \tag{H3.11}$$

Wirkungsquerschnitt im Laborsystem:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^{\mathrm{Lab}}} = \frac{d\sigma}{d\Omega^{\mathrm{cm}}} \frac{d\Omega^{\mathrm{cm}}}{d\Omega^{\mathrm{Lab}}} \tag{H3.12}$$

Das Verhältnis der Raumwinkelelemente (s. Vorlesung) ist mit $k = m_\alpha / m_{\mathrm{Au}} = 0.0203$, $\vartheta = 150°$, $\sin\vartheta = \sin 150° = 0.5$ und $\cos\vartheta = \cos 150° = -0.8660$

$$\frac{d\Omega^{\mathrm{cm}}}{d\Omega^{\mathrm{Lab}}} = 2k\cos\vartheta \pm \frac{1 + k^2(1 - 2\sin^2\vartheta)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta}} \tag{H3.13}$$

$$= 2 \times 0.0203 \times (-0.8660) \pm \frac{1 + 0.0203^2(1 - 2 \times 0.25)}{\sqrt{1 - 0.0203^2 \times 0.25}} \tag{H3.14}$$

$$= -0.035 \pm \frac{1.0002}{\sqrt{1.0001}} \approx -0.035 \pm 1.000 \tag{H3.15}$$

Da der Gesamtausdruck positiv sein soll, ist das positive Vorzeichen zu wählen. Insgesamt ist also

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^{\mathrm{Lab}}} = \frac{d\sigma}{d\Omega^{\mathrm{cm}}} \frac{d\Omega^{\mathrm{cm}}}{d\Omega^{\mathrm{Lab}}} = 1.28 \times 10^{-24}\ \mathrm{cm}^2 \times 0.965 = 1.24 \times 10^{-24}\ \mathrm{cm}^2 \tag{H3.16}$$