JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Institut für Atom- und Molekülphysik
Leihgesterner Weg 217, 35392 Gießen

Lösungen zum Präsenzaufgabenblatt 2 vom 3.11.2010

Aufgabe P2.1

Der totale Wirkungsquerschnitt für die Absorption von 1-MeV-Gammastrahlung in Blei ist $\sigma = 2.5 \times 10^{-23}$ cm^2. Blei hat eine Massendichte $\rho = 11.34$ g cm^{-3} sowie eine atomare Massenzahl $A = 208$. Welche Dicke muss die Bleischicht haben, damit die Intensität der Gammastrahlung nach Durchgang durch die Bleischicht nur noch 1‰ ihres Ausgangswertes beträgt?

Lösung

Teilchendichte von Blei:

$$n = N_A \rho / M_A = 6.022 \times 10^{23} \times 11.34/208 \text{ cm}^{-3} = 3.3 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

Dicke, nach der die Intensität auf $1/e$ ihres Anfangswertes abgesunken ist:

$$d = 1/(n\sigma) = 1/(3.3 \times 10^{22} \times 2.5 \times 10^{-23}) \text{ cm} = 1.2 \text{ cm}$$

Gesucht wird die Dicke x, für die gilt

$$0.001 I_0 \equiv I(x) = I_0 e^{-x/d} \quad \Rightarrow \quad x = -d \ln(0.001) \approx 8.3 \text{ cm}$$

Aufgabe P2.2

Der Glanzwinkel der ersten Ordnung von Röntgenstrahlen der Wellenlänge $\lambda = 0.21$ nm wird bei Reflexion an einer Spaltfläche von NaCl zu $\theta = 22°10'$ gemessen. Berechnen Sie die Gitterkonstante d des NaCl-Kristalls. Ermitteln Sie mit dem Ergebnis die Avogadro-Konstante. NaCl hat eine Dichte von $\rho = 2.163$ g/cm^3.

Hinweis: Das NaCl-Gitter ist kubisch-flächenzentriert!

Lösung

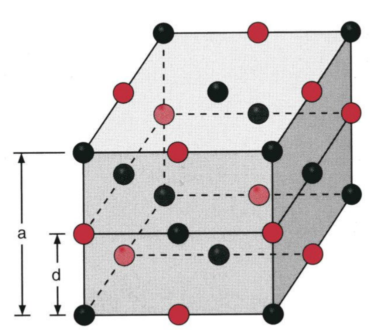
Nach der Bragg-Beziehung gilt:

$$d = \frac{n\lambda}{2\sin\theta} \tag{P2.1}$$

Mit $\theta = 22°10' = 22.1667°$ folgt

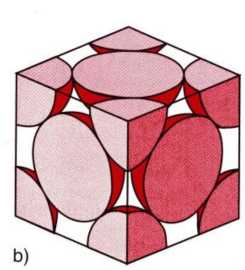
$$\boxed{d = 0.278\ nm}$$

NaCl besitzt ein kubisch flächenzentriertes Gitter. Die Kantenlänge einer Elementarzelle beträgt



$$a = 2d = 0.556\text{nm} \tag{P2.2}$$

Damit erhält man $N = 5.818 \times 10^{21}$ Elementarzellen pro cm^3. Eine Elementarzelle enthält



4 NaCl Moleküle. NaCl hat damit eine Teilchendichte von $n = 2.327 \times 10^{22}$ Moleküle pro cm^3. Die Molmasse beträgt 58 g (23 g+35 g). Bei einer Dichte von $\rho = 2.163$ g/cm^3 entspricht dies $\mu = 0.0373$ mol/cm^3. Für die Avogadro-Konstante ergibt sich dann

$$N_A = \frac{n}{\mu} = 6.24 \times 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1} \tag{P2.3}$$

Aufgabe P2.3

Geben sie den Bahndrehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ in Kugelkoordinaten an. Gehen sie davon aus, dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet. In welche Richtung zeigt der Vektor $\vec{L}$. Wie groß ist sein Betrag?

Lösung

Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten x, y, z und Kugelkoordinaten r, θ, ϕ:

$$x = r \sin\theta \cos\phi \tag{P2.4}$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi \tag{P2.5}$$
$$z = r \cos\theta \tag{P2.6}$$

Da die Bewegung in einer Ebene (der x-y-Ebene) stattfindet, wird im Folgenden o.B.d.A. $\theta = \pi/2$ gesetzt. Damit gilt für x, y, und z sowie für deren Zeitableitungen $\dot{x}$, $\dot{y}$, und $\dot{z}$

$$x = r \cos\phi \tag{P2.7}$$
$$y = r \sin\phi \tag{P2.8}$$
$$z = 0 \tag{P2.9}$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos\phi - r\dot{\phi} \sin\phi \tag{P2.10}$$
$$\dot{y} = \dot{r} \sin\phi + r\dot{\phi} \cos\phi \tag{P2.11}$$
$$\dot{z} = 0 \tag{P2.12}$$

Für den Drehimpuls folgt damit

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{P2.13}$$

Wegen $z = \dot{z} = 0$ ist nur die z-Komponente des Drehimpulses von Null verschieden:

$$L_z = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) = m\left[r\dot{r}\cos\phi\sin\phi + r^2\dot{\phi}\cos^2\phi - r\dot{r}\cos\phi\sin\phi + r^2\dot{\phi}\sin^2\phi\right] \tag{P2.14}$$

Insgesamt folgt, dass der Drehimpulsvektor senkrecht zur der Bewegungsebene ist und den Betrag $L = mr^2\dot{\phi}$ aufweist.

Aufgabe P2.4

Geben Sie die kinetische Energie eines Teilchens in Kugelkoordinaten an, das sich mit nichtrelativistischer Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einer Ebene bewegt.

Lösung

Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten x, y, z und Polarkoordinaten r, ϑ ($=\pi/2$ wegen Bewegung in einer Ebene), ϕ:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi && \text{(P2.15)} \\ y &= r\sin\phi && \text{(P2.16)} \\ z &= 0 && \text{(P2.17)} \end{aligned}$$

Die Zeitableitungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi && \text{(P2.18)} \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi && \text{(P2.19)} \\ \dot{z} &= 0 && \text{(P2.20)} \end{aligned}$$

Für die kinetische Energie folgt damit

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\cos^2\phi - 2r\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi\sin\phi + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi + \dot{r}^2\sin^2\phi + 2r\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi\sin\phi + r^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) && \text{(P2.21)} \end{aligned}$$