JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Institut für Atom- und Molekülphysik
Leihgesterner Weg 217, 35392 Gießen

Lösungen zum Hausaufgabenblatt 9 vom 22.12.2010

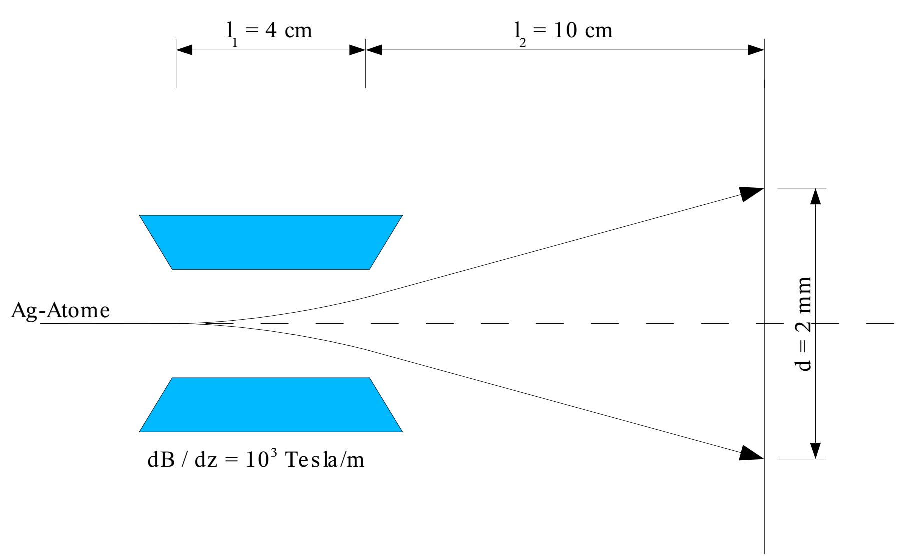
Aufgabe H9.1 (6 Punkte)

Ein Strahl von Silberatomen (Masse: 107.9 u) im Grundzustand ($5\ ^2S_{1/2}$) fliegt mit einer Geschwindigkeit von 500 m/s durch ein inhomogenes Magnetfeld (Stern-Gerlach-Versuch). Der Feldgradient von $dB/dz = 10^3$ Tesla/m steht senkrecht zur Flugrichtung der Atome. In Flugrichtung besitzt das Magnetfeld eine Ausdehnung von 4 cm. Ein Auffangschirm ist 10 cm hinter dem Ende des Magnetfeldes aufgestellt. Berechnen Sie die Komponente des magnetischen Moments in Richtung des Magnetfeldes, wenn die gemessene Aufspaltung auf dem Schirm 2 mm beträgt. Wie verhält sich das Ergebnis zum Bohrschen Magneton? Entspricht dieses Ergebnis Ihrer Erwartung für das gebundene Elektron?

Hinweis:

Das magnetische Moment des Silberatoms im Grundzustand ist in guter Näherung identisch mit dem Spin des äußeren $5s$-Elektrons.

Lösung



Ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$ besitzt im Magnetfeld $\vec{B}$ eine Wechselwirkungsenergie

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \tag{H9.1}$$

Die Kraft ergibt sich aus dem Gradienten

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}V \tag{H9.2}$$

Wenn das magnetische Feld ausschließlich einen Gradienten in z-Richtung besitzt, so wirkt die Kraft lediglich in z-Richtung:

$$F_z = \mu_z \frac{dB}{dz} \tag{H9.3}$$

Der Atomstrahl bewege sich anfänglich in x-Richtung. Da die Kraft nur in z-Richtung wirkt, bleibt die ursprüngliche Komponente $v_x = 500$ m/s unverändert. Ein Atom legt die Strecken l_1 und l_2 (siehe Abbildung) in den Zeiten

$$t_1 = \frac{l_1}{v_x} = 8 \times 10^{-5}\mathrm{s} \tag{H9.4}$$

$$t_2 = \frac{l_2}{v_x} = 2 \times 10^{-4}\mathrm{s} \tag{H9.5}$$

zurück. Während es sich im Magnetfeld befindet, erfährt es eine Beschleunigung

$$a_z = \frac{F_z}{M} \tag{H9.6}$$

Beim Austritt aus dem Magneten hat es somit die Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung von

$$v_z = a_z t_1 \tag{H9.7}$$

Insgesamt legt es in z-Richtung den Weg

$$z = \frac{1}{2} a_z t_1^2 + v_z t_2 \tag{H9.8}$$

$$= \frac{1}{2} a_z t_1^2 + a_z t_1 t_2 \tag{H9.9}$$

$$= \left(\frac{1}{2} t_1^2 + t_1 t_2 \right) a_z \tag{H9.10}$$

zurück. Der erste Term entspricht der beschleunigten Bewegung im Magnetfeld, der zweite Term dem freien Flug hinter dem Magnetfeld. Dieser zurückgelegte Weg entspricht der halben Aufspaltung:

$$z = \frac{d}{2} \tag{H9.11}$$

Die Beschleunigung kann damit berechnet werden zu

$$a_z = \frac{d}{2\left(\frac{1}{2}t_1^2 + t_1 t_2\right)} = 52083.3\mathrm{ms}^{-2} \tag{H9.12}$$

Die z-Komponente des magnetischen Moments ist damit

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{F}{dB/dz} = \frac{Ma_z}{dB/dZ} = 9.32 \times 10^{-24}\mathrm{Am}^2 = 1.0053\mu_B \tag{H9.13}$$

wobei als Masse für ein Silberatom $M = 1.79 \times 10^{-25}$ kg eingesetzt wurde.

Da das Elektron im $5\,^2S_{1/2}$-Zustand keinen Drehimpuls hat, trägt zum magnetischen Moment des Silberatoms nur der Spin des äußeren Elektrons bei, d. h. man erwartet

$$\langle \mu_{s,z} \rangle = \tfrac{1}{2}|g_e|\mu_B = \tfrac{1}{2}2.00232\mu_B = 1.00116\mu_B \tag{H9.14}$$

was im Rahmen der Messgenauigkeit dem Messergebnis entspricht.

Aufgabe H9.2 (4 Punkte)

Berechnen Sie die durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung verursachte $2p_{1/2} - 2p_{3/2}$ Energieaufspaltung im Wasserstoffatom.

Lösung

Die Bindungsenergie eines Feinstrukturniveaus, das durch die Quantenzahlen n, ℓ und j charakterisiert ist, beträgt

$$E_{n,\ell,j} = E_n + \frac{\langle a \rangle}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \tag{H9.15}$$

Hier ist die Energiedifferenz zwischen den Niveaus $j = \ell - s$ und $j = \ell + s$ mit $s = \frac{1}{2}$ von Interesse.

$$E_{n,\ell,\ell+\frac{1}{2}} = E_n + \frac{\langle a \rangle}{2}[(\ell + \tfrac{1}{2})(\ell + \tfrac{3}{2}) - \ell(\ell+1) - \tfrac{3}{4}] = E_n + \frac{\langle a \rangle}{2} l \tag{H9.16}$$

$$E_{n,\ell,\ell-\frac{1}{2}} = E_n + \frac{\langle a \rangle}{2}[(\ell - \tfrac{1}{2})(\ell + \tfrac{1}{2}) - \ell(\ell+1) - \tfrac{3}{4}] = E_n - \frac{\langle a \rangle}{2}(l+1) \tag{H9.17}$$

Die Differenz beträgt

$$\Delta E_{\ell,s} = E_{n,\ell,\ell+\frac{1}{2}} - E_{n,\ell,\ell-\frac{1}{2}} = \langle a \rangle [\ell + \tfrac{1}{2}] \tag{H9.18}$$

Mit

$$\langle a \rangle = -E_n \frac{(\alpha Z)^2}{n\ell(\ell+\frac{1}{2})(\ell+1)} \tag{H9.19}$$

folgt

$$\Delta E_{\ell,s} = -E_n \frac{(\alpha Z)^2}{n\ell(\ell+1)} \tag{H9.20}$$

Für die $2p_{1/2} - 2p_{3/2}$-Aufspaltung in Wasserstoff $(Z = 1, n = 2, \ell = 1)$ erhält man

$$|\Delta E_{2p}| = \frac{\mathcal{R}}{4}\frac{\alpha^2}{4} \approx \frac{13.606 \text{ eV}}{16 \times 137^2} \approx 45\ \mu\text{eV} \tag{H9.21}$$