Institut für Atom- und Molekülphysik
Leihgesterner Weg 217, 35392 Gießen

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Lösungen zum Hausaufgabenblatt 6 vom 01.12.2010

Aufgabe H6.1 (5 Punkte)

Berechnen Sie die Radien und Energien für die ersten beiden Bohrschen Bahnen im Positronium. Wie groß ist die Wellenlänge des Photons, das bei einem Übergang von $n = 2$ nach $n = 1$ emittiert wird?

Hinweise:

Positronium ist ein gebundenes System aus einem Elektron und einem Positron. Beide haben dieselbe Masse aber entgegengesetzte Ladung. Positronium ist also vergleichbar mit dem Wasserstoffatom, nur dass das schwere Proton durch das leichtere Positron ersetzt ist.

Lösung

Nach Bohr sind Bindungsenergie E_n und Bahnradius r_n im Wasserstoffatom (Kernladungszahl $Z = 1$)

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \tag{H6.1}$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Z e^2 \mu} n^2 \tag{H6.2}$$

Die reduzierte Masse $\mu = m_e^2/(m_e + m_e) = m_e/2$ ist gerade die halbe Elektronenmasse. Somit sind die Energien im Positronium nur halb so groß wie die Energien im Wasserstoffatom, und die Bahnradien sind doppelt so groß:

$$E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{2} \times \frac{1}{n^2} \tag{H6.3}$$

$$r_n = 2 \times 0.0528 \text{ nm} \times n^2 \tag{H6.4}$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ erhält man die folgenden Werte: $E_1 = -6.80$ eV, $r_1 = 0.1056$ nm, $E_2 = -1.7$ eV und $r_2 = 0.4224$ nm.

Die Energiedifferenz zwischen erster und zweiter Bahn ist $\Delta E = 5.10$ eV. Damit ist die gesuchte Wellenlänge $\lambda = hc/\Delta E = 243$ nm.

Aufgabe H6.2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$\sigma_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Vertauschungsrelationen $[\sigma_j, \sigma_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\sigma_l$ und $[\sigma^2, \sigma_j] = 0$ mit $j, k, l = 1, 2, 3$ für den Drehimpuls erfüllen. Dabei ist

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für eine gerade Permutation von } j, k, l \\ -1 & \text{für eine ungerade Permutation von } j, k, l \\ 0 & \text{für } j = k \end{cases}$$

Lösung

Für die Überprüfung der ersten Vertauschungsrelation sind 6 Kommutatoren zu berechnen, denn der Fall $j = k$, d. h. $[\sigma_j, \sigma_j] = 0$, ist trivial.

$$\begin{aligned}
[\sigma_1, \sigma_2] &= \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right] = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\hbar\sigma_3
\end{aligned} \tag{H6.5}$$

$$[\sigma_2, \sigma_1] = -[\sigma_1, \sigma_2] = -i\hbar\sigma_3 \tag{H6.6}$$

$$\begin{aligned}
[\sigma_2, \sigma_3] &= \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_2 = \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\hbar\sigma_1
\end{aligned} \tag{H6.7}$$

$$[\sigma_3, \sigma_2] = -[\sigma_2, \sigma_3] = -i\hbar\sigma_1 \tag{H6.8}$$

$$\begin{aligned}
[\sigma_3, \sigma_1] &= \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_3 = \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\hbar\sigma_2
\end{aligned} \tag{H6.9}$$

$$[\sigma_1, \sigma_3] = -[\sigma_3, \sigma_1] = -i\hbar\sigma_2 \tag{H6.10}$$

Für das Nachprüfen der zweiten Vertauschungsrelation muss zunächst σ^2 berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{\hbar^2}{4}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{H6.11}$$

D. h. σ^2 ist proportional zur Einheitsmatrix und vertauscht daher mit allen Operatoren, so dass insbesondere $[\sigma^2, \sigma_i] = 0$.