Übungen zur Experimentalphysik III
Wintersemester 2010/2011

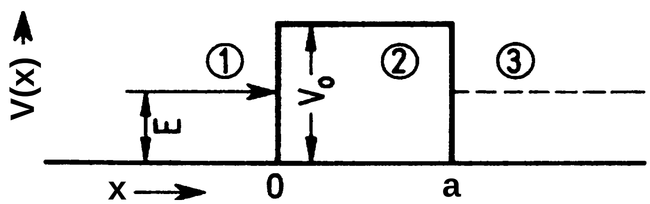
JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Institut für Atom- und Molekülphysik
Leihgesterner Weg 217, 35392 Gießen

Lösungen zum Präsenzaufgabenblatt 6 vom 01.12.2010

Aufgabe P6.1

Stellen Sie die eindimensionale, stationäre Schrödingergleichung für ein freies Teilchen mit Gesamtenergie $E > 0$ auf, das einen rechteckigen Potenzialwall der Höhe $V_0 > E$ durchtunnelt, der sich von $x = 0$ bis $x = a$ erstreckt. Wie sieht die Wellenfunktion in den Bereichen 1, 2 und 3 (s. Abbildung) qualitativ aus?



Hinweis

Die Wellenfunktion und ihre erste Ableitung müssen überall stetig sein.

Lösung

Die stationäre Schrödingergleichung lautet

$$H\psi = E\psi \tag{P6.1}$$

mit der hier positiven Energie E und dem Hamiltonoperator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{P6.2}$$

Einsetzen in Gl. P6.1 ergibt

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi = [E - V(x)]\,\psi \tag{P6.3}$$

bzw.

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi = -\frac{2m}{\hbar^2}\,[E - V(x)]\,\psi = -k^2\psi \tag{P6.4}$$

mit

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\,[E - V(x)] \tag{P6.5}$$

Die allgemeine Lösung dieser DGL ist

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \tag{P6.6}$$

Für das Potenzial gilt:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \text{ und } x > a \\ V_0 & \text{für} \quad 0 \le x \le a \end{cases} \tag{P6.7}$$

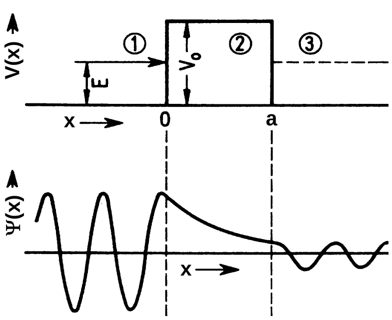
Da $V_0 > E$ verlangt wurde, ist k^2 negativ, wenn sich das Teilchen im Potenzialwall aufhält, und positiv sonst, d. h. k ist imaginär für $0 \le x \le a$ und k ist reell sonst. In den Bereichen 1, 2 und 3 ist also

$$k = \begin{cases} k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar & \text{für} \quad x < 0 \\ ik_2 = i\sqrt{2m|E - V_0|}/\hbar & \text{für} \quad 0 \le x \le a \\ k_3 = \sqrt{2mE}/\hbar & \text{für} \quad x > a \end{cases} \tag{P6.8}$$

Einsetzen in Gl. P6.6 ergibt

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x} & \text{für} \quad x < 0 \\ \psi_2(x) = A_2 e^{-k_2x} + B_2 e^{k_2x} & \text{für} \quad 0 \le x \le a \\ \psi_3(x) = A_3 e^{ik_3x} + B_3 e^{-ik_3x} & \text{für} \quad x > a \end{cases} \tag{P6.9}$$

In den Bereichen 1 und 3 ist die Wellenfunktion also sinusförmig mit der Wellenlänge $h/\sqrt{2mE}$. Im Bereich 2 verläuft die Wellenfunktion exponenziell mit der charakteristischen Länge $\hbar/\sqrt{2m|E - V_0|}$. Eine Lösung, die die Stetigkeitsbedingungen für $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ erfüllt, ist in nachfolgender Abbildung skizziert.



Skizze des weiteren Lösungswegs

Die erste Ableitung von $\psi(x)$ (Gl. P6.9) lautet

$$\psi'(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = iA_1k_1 e^{ik_1x} - iB_1k_1 e^{-ik_1x} & \text{für} \quad x < 0 \\ \psi_2(x) = -A_2k_2 e^{-k_2x} + B_2k_2 e^{k_2x} & \text{für} \quad 0 \le x \le a \\ \psi_3(x) = iA_3k_3 e^{ik_3x} - iB_3k_3 e^{-ik_3x} & \text{für} \quad x > a \end{cases} \tag{P6.10}$$

Die Stetigkeit von $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ ist insbesondere bei $x = 0$ und bei $x = a$ zu erfüllen. Bei allen anderen x sind $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ bereits stetig. Die Forderung nach Stetigkeit von $\psi(x)$ (Gl. P6.9) und $\psi'(x)$ (Gl. P6.10) bei $x = 0$ führt auf das folgende Gleichungssystem für die Amplituden A_1, B_1, A_2 und B_2:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \tag{P6.11}$$

$$(A_1 - B_1)ik_1 = (-A_2 + B_2)k_2 \tag{P6.12}$$

Die Forderung nach Stetigkeit von $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ bei $x = a$ führt auf ein analoges Gleichungssystem für die Amplituden A_2, B_2, A_3 und B_3. Insgesamt gibt es also 4 Gleichungen für 6 Unbekannte. Die weitere Lösung hängt von den Randbedingungen ab.

Beispielsweise wird bei der Behandlung des Tunneleffekts (s. Mayer-Kuckuk, *Kernphysik*) davon ausgegangen, dass es im Bereich 3 keine nach links auf den Potenzialwall zulaufende Welle gibt, d.h. dass $B_3 = 0$. Das Gleichungssystem lässt sich dann nach dem Verhältnis A_3/A_1 auflösen. Das Quadrat dieses Verhältnisses definiert gerade die Tunnelwahrscheinlichkeit, d.h. die Transmission durch den Potenzialwall.

Aufgabe P6.2

Zeigen Sie, dass für die Komponenten des quantenmechanischen Bahndrehimpulsoperators

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}$$

die folgende Vertauschungsrelation gilt:

$$[L_x, L_y] = L_x L_y - L_y L_x = i\hbar L_z \tag{P6.13}$$
$$\tag{P6.14}$$

Hinweise

Für den Drehimpuls gilt

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{P6.15}$$

Dies lässt sich als Determinante schreiben:

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \tag{P6.16}$$

Die quantenmechanische Formulierung erhält man durch Übergang zu Operatoren:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} \tag{P6.17}$$
$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \tag{P6.18}$$
$$\vec{r} \times \vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla} \tag{P6.19}$$

Lösung

In Determinantenschreibweise ist

$$\vec{L} = -i\hbar \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{vmatrix} \tag{P6.20}$$

Für die einzelnen Drehimpulskomponenten erhält man dann:

$$L_x = -i\hbar \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \right) \tag{P6.21}$$
$$L_y = -i\hbar \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{P6.22}$$
$$L_z = -i\hbar \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \tag{P6.23}$$

Für die Vertauschungsrelation ergibt sich mit Gl. P6.23, P6.22 und P6.21

$$\begin{aligned}
[L_x, L_y] &= i^2\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) && \text{(P6.24)}\\
&\quad -i^2\hbar^2\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\\
&= i^2\hbar^2\Bigg(y\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial x} - \underline{y\frac{\partial}{\partial z}x\frac{\partial}{\partial z}} - \underline{z\frac{\partial}{\partial y}z\frac{\partial}{\partial x}} + z\frac{\partial}{\partial y}x\frac{\partial}{\partial z} - && \text{(P6.25)}\\
&\quad z\frac{\partial}{\partial x}y\frac{\partial}{\partial z} + \underline{z\frac{\partial}{\partial x}z\frac{\partial}{\partial y}} + \underline{x\frac{\partial}{\partial z}y\frac{\partial}{\partial z}} - x\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial y}\Bigg)
\end{aligned}$$

Für bestimmte Funktionenklassen, für die die Vertauschung der partiellen Ableitungen erlaubt ist, heben sich die unterstrichenen Terme auf. Mit den Beziehungen

$$\begin{aligned}
y\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial x} &= y\left(\frac{\partial}{\partial z}z\right)\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} && \text{(P6.26)}\\
&= y\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial y} &= x\left(\frac{\partial}{\partial z}z\right)\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} && \text{(P6.27)}\\
&= x\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
[L_x, L_y] &= i^2\hbar^2\Bigg(y\frac{\partial}{\partial x} + \underline{yz\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}} + \underline{z\frac{\partial}{\partial y}x\frac{\partial}{\partial z}} - && \text{(P6.28)}\\
&\quad \underline{z\frac{\partial}{\partial x}y\frac{\partial}{\partial z}} - x\frac{\partial}{\partial y} - \underline{xz\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}}\Bigg)\\
&= i^2\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) && \text{(P6.29)}\\
&= i\hbar\left[-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] && \text{(P6.30)}
\end{aligned}$$

Der Term in den eckigen Klammern entspricht genau L_z (Gl. P6.23), so dass sich ergibt (Gl. P6.13):

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \qquad \text{(P6.31)}$$

Anmerkung:

Durch zyklische Permutation der Indizes x, y und z ergeben sich die folgenden weiteren Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned}
[L_y, L_z] &= L_yL_z - L_zL_y = i\hbar L_x && \text{(P6.32)}\\
[L_z, L_x] &= L_zL_x - L_xL_z = i\hbar L_y && \text{(P6.33)}
\end{aligned}$$