JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Institut für Atom- und Molekülphysik
Leihgesterner Weg 217, 35392 Gießen

Lösungen zum Präsenzaufgabenblatt 4 vom 17.11.2010

Aufgabe P4.1

Ein Photon, das von einem Atom ausgesandt wird, überträgt auf dieses einen Rückstoßimpuls.

a) Wie groß ist die kinetische Energie, die dabei an das Atom abgegeben wird, wenn ν die Frequenz des Photons und M die Masse des Atoms ist?

b) Wie groß ist die Rückstoßenergie, die bei der Aussendung der Quecksilberspektrallinie mit der Wellenlänge $\lambda = 253.7$ nm auf ein ^{202}Hg-Atom übertragen wird?

Lösung

Teil a)

Die Energie des Photons ist

$$E_\gamma = h\nu \tag{P4.1}$$

Sein Impuls ist dann

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} \tag{P4.2}$$

Auf Grund der Impulserhaltung muss dieser Impuls vom Atom kompensiert werden:

$$\vec{p}_\gamma = -\vec{p}_r \tag{P4.3}$$

Betragsmäßig gilt

$$p_r = p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} \tag{P4.4}$$

Für die Rückstoßenergie erhält man dann

$$E_r = \frac{p_r^2}{2M} = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} = \frac{E_\gamma^2}{2E_M} \tag{P4.5}$$

wobei $E_M = Mc^2$ die Ruheenergie des Atoms ist.

Teil b)

Die Wellenlänge $\lambda = 253.7$ nm der Quecksilberlinie entspricht einer Energie von

$$E_\gamma = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 4.89 \text{ eV} \tag{P4.6}$$

Die Ruheenergie eines ^{202}Hg-Atoms ist $E_{\mathrm{Hg}} = 202\, m_u c^2 = 188163$ MeV. Für die Rückstoßenergie ergibt sich

$$E_r = \frac{E_\gamma^2}{2E_{\mathrm{Hg}}} = 6.35 \cdot 10^{-11} \text{ eV} \tag{P4.7}$$

Aufgabe P4.2

Röntgenstrahlen der Wellenlänge $\lambda = 0.124$ nm werden an Graphit gestreut. Die Streustrahlung wird senkrecht zur Einfallsrichtung der Röntgenstrahlung beobachtet.

a) Wie groß ist die Compton-Verschiebung $\Delta\lambda$?

b) Wie groß ist die kinetische Energie des gestoßenen Elektrons?

c) Welchen Bruchteil seiner ursprünglichen Energie verliert das Photon?

d) Wie groß ist der entsprechende Bruchteil, den ein Photon der Wellenlänge $\lambda = 0.0124$ nm verliert, wenn es bei der Compton-Streuung um 90° abgelenkt wird?

e) Welche Wellenlängen und Energien haben die unter 180° gestreuten Photonen (für $\lambda = 0.124$ nm)? Welche Energie erhält das Rückstoßelektron? Wie groß sind die auftretenden Photonenimpulse?

f) Betrachten Sie den Fall $\lambda \ll \lambda_e$. Wie hängen Energie des rückgestreuten Photons und des Rückstoßelektrons mit der Primärenergie der Photonen zusammen?

Hinweise: Das Elektron wird vor dem Stoß als ruhend angesehen; die Bindungsenergie soll vernachlässigt werden. Mit λ_e ist die Compton-Wellenlänge des Elektrons gemeint.

Lösung

Streuwinkel der Photonen: $\theta = 90°$.

Teil a)

Bei der Compton-Streuung beträgt die Wellenlängenverschiebung

$$\Delta\lambda = \lambda_e(1 - \cos\theta) \tag{P4.8}$$

wobei

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e c} = 2.426 \times 10^{-12} \text{ m} \tag{P4.9}$$

die Compton-Wellenlänge des Elektrons ist. Mit $\cos\theta = \cos 90° = 0$ folgt sofort

$$\Delta\lambda = 2.426 \times 10^{-12} \text{ m} \tag{P4.10}$$

Teil b)

Mit $\lambda = 1.24 \times 10^{-10}$ m und mit $hc = 1.24 \times 10^{-6}$ eV m ergibt sich für die Energie des Photons vor der Streuung

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1.24 \times 10^{-6} \text{ eV m}}{1.24 \times 10^{-10} \text{ m}} = 10 \text{ keV} \tag{P4.11}$$

Die Energie des Photons nach der Streuung beträgt

$$E'_\gamma = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{1.24 \times 10^{-6} \text{ eV m}}{1.26426 \times 10^{-10} \text{ m}} = 9.81 \text{ keV} \tag{P4.12}$$

Da das Photon Energie verliert, nimmt die Wellenlänge zu. Die Elektronenenergie ist gleich der Energiedifferenz

$$E_e = \Delta E_\gamma = E_\gamma - E'_\gamma = 0.19 \text{ keV} \tag{P4.13}$$

Teil c)

$$\Delta E_\gamma / E_\gamma = 0.19/10 = 1.9\% \tag{P4.14}$$

Teil d)

Mit denselben Formeln wie vorhin berechnet man für $\lambda = 1.24 \times 10^{-11}$ m

$$\begin{aligned} E_\gamma &= \frac{hc}{\lambda} = \frac{1.24 \times 10^{-6} \text{ eV m}}{1.24 \times 10^{-11} \text{ m}} = 100 \text{ keV} && \text{(P4.15)} \\ E'_\gamma &= \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{1.24 \times 10^{-6} \text{ eV m}}{1.4826 \times 10^{-11} \text{ m}} = 83.6 \text{ keV} && \text{(P4.16)} \\ \Delta E_\gamma &= 16.4 \text{ keV} && \text{(P4.17)} \\ \Delta E_\gamma / E_\gamma &= 16.4/100 = 16.4\% && \text{(P4.18)} \end{aligned}$$

Teil e)

Für rückgestreute Photonen ergibt sich die Wellenlängenänderung aus Gl. P4.8 zu

$$\Delta\lambda = \lambda_e[1 - \cos(180^\circ)] = 2\lambda_e = 4.852 \times 10^{-12} \text{ m} \tag{P4.19}$$

Mit der Wellenlänge $\lambda = 124 \times 10^{-12}$ m des einfallenden Photons ist die Wellenlänge des rückgestreuten Photons

$$\lambda_r = \lambda + \Delta\lambda = 128.852 \times 10^{-12} \text{ m} \tag{P4.20}$$

Dies entspricht einer Energie

$$E_r = \frac{hc}{\lambda_r} = \frac{hc}{\lambda + 2\lambda_e} = 9.622 \text{ keV} \tag{P4.21}$$

Das Elektron erhält den Energiebetrag

$$E_e = E_\gamma - E_r = 0.378 \text{ keV} \tag{P4.22}$$

Impuls des Photons vor dem Stoß:

$$p_\gamma = \hbar k = \frac{h}{\lambda} = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{10 \text{ keV}}{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} = \frac{10000 \times 1.6022 \times 10^{-19} \text{ A V s}}{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 5.34 \times 10^{-24} \text{ N s} \tag{P4.23}$$

Impuls des Photons nach dem Stoß:

$$p_r = \frac{E_r}{c} = \frac{9.622 \text{ keV}}{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} = \frac{9622 \times 1.6022 \times 10^{-19} \text{ A V s}}{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}} = 5.14 \times 10^{-24} \text{ N s} \tag{P4.24}$$

<u>Teil f)</u>

Für $\lambda \ll \lambda_e$ wird Gl. P4.21 unabhängig von der Energie des einfallenden Photons:

$$E_r = \frac{hc}{\lambda_r} = \frac{hc}{2\lambda_e} = \tfrac{1}{2} m_e c^2 \approx 255.5 \text{ keV} \tag{P4.25}$$

wobei λ_e aus Gl. P4.9 eingesetzt wurde. Das Rückstoßelektron erhält Energie des einfallenden Photons vermindert um 255.5 keV.