JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Institut für Atom- und Molekülphysik
Leihgesterner Weg 217, 35392 Gießen

Lösungen zum Präsenzaufgabenblatt 3 vom 10.11.2010

Aufgabe P3.1

Berechnen Sie auf klassische Weise die mittlere Energie aller Schwingungsmoden in einem Hohlraum der Temperatur T.

Lösung

Die Wahrscheinlichkeit für die eine Mode der Energie E is proportional zu $\exp(-E/k_BT)$. Dabei ist k_B die Boltzmann-Konstante Damit ist die mittlere Energie aller Moden

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty E \exp(-\beta E)\, dE}{\int_0^\infty \exp(-\beta E)\, dE} \tag{P3.1}$$

mit $\beta = 1/(k_BT)$.

Nebenrechnung: Berechnung der Integrale vom Typ

$$I_n(\eta) = \int_0^\infty x^n e^{-\eta x} dx \tag{P3.2}$$

Lösen des Integrals durch Vertauschen von Integration und Differenziation und vollständige Induktion:

$$I_0(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta x} dx = \frac{-1}{\eta} e^{-\eta x}\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \eta^{-1} \tag{P3.3}$$

$$I_1(\eta) = \int_0^\infty x e^{-\eta x} dx = -\frac{d}{d\eta} I_0(\eta) = -\frac{d}{d\eta}\eta^{-1} = \eta^{-2} \tag{P3.4}$$

$$I_2(\eta) = \int_0^\infty x^2 e^{-\eta x} dx = -\frac{d}{d\eta} I_1(\eta) = -\frac{d}{d\eta}\eta^{-2} = 2\eta^{-3} \tag{P3.5}$$

$$\vdots$$

Durch Induktion findet man die Behauptung, dass

$$I_n(\eta) = \int_0^\infty x^n e^{-\eta x} dx = n!\, \eta^{-(n+1)} \tag{P3.6}$$

Es ist noch der Schritt von n zu $n+1$ zu zeigen:

$$I_{n+1}(\eta) = \int_0^\infty x^{(n+1)} e^{-\eta x} dx = -\frac{d}{d\eta} I_n(\eta) = -\frac{d}{d\eta} n!\, \eta^{-(n+1)} = (n+1)!\, \eta^{-(n+2)} \tag{P3.7}$$

Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man in Gl. P3.6 n durch $n+1$ ersetzt. Für $n=1$ erhält man gerade Gl. P3.4. Damit ist die vollständige Induktion abgeschlossen.

Anwenden von Gl. P3.6 auf Gl. P3.1 liefert:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)} = \frac{\beta^{-2}}{\beta^{-1}} = \frac{1}{\beta} = k_B T \tag{P3.8}$$

Aufgabe P3.2

Die spektrale Energiestromdichte pro Raumwinkelelement der Abstrahlung eines schwarzen Körpers ist durch die Plancksche Strahlungsformel gegeben:

$$S_\nu = u_\nu(\nu, T)\frac{c}{4\pi} = \frac{2\nu^2}{c^2}\,\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \tag{P3.9}$$

Dabei ist u_ν die spektrale Energiedichte, ν die Frequenz der Strahlung, c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, h das Plancksche Wirkungsquantum und k_B die Boltzmannkonstante. Rechnen sie S_ν in die Energiestromdichte S_λ (Leistung pro Raumwinkelelement pro Fläche pro Wellenlängenintervall) um.

Lösung

Da Wellenlänge und Frequenz gemäß

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \tag{P3.10}$$

reziprok zueinander sind, führt eine Zunahme in ν zu einer Abnahme in λ. Daher lautet der Zusammenhang zwischen S_ν und S_λ (Vorzeichen!)

$$S_\nu d\nu = -S_\lambda d\lambda \tag{P3.11}$$

Die Multiplikation mit den Differentialen $d\nu$ und $d\lambda$ stellt sicher, dass sich links und rechts des Gleichheitszeichen dieselbe physikalische Größe (Leistung pro Raumwinkelelement pro Fläche) befindet. Division durch $d\lambda$ liefert

$$S_\lambda = -S_\nu\frac{d\nu}{d\lambda} = S_\nu\frac{c}{\lambda^2} \tag{P3.12}$$

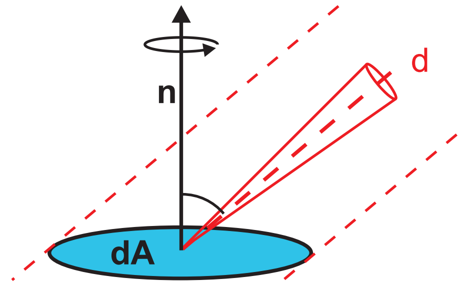
wobei im letzten Schritt Gl. P3.10 verwendet wurde. Durch weiteres Einsetzen von Gl. P3.10 in Gl. P3.9 lässt sich Gl. P3.12 wie folgt umformen:

$$S_\lambda = \frac{2c^2}{\lambda^2 c^2}\,\frac{hc}{\lambda}\,\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}\,\frac{c}{\lambda^2} \tag{P3.13}$$

und schließlich

$$\boxed{S_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}} \tag{P3.14}$$

Aufgabe P3.3



Die über einen Raumwinkel 2π integrierte spektrale Energiestromdichte wird als „Ausstrahlung“ (Leistung pro Fläche pro Frequenzintervall) bezeichnet. Berechnen Sie ausgehend von der spektralen Energiestromdichte S_ν die Ausstrahlung F_ν^+ eines Flächenelements dA (s. nebenstehende Skizze).

Lösung

Der Winkel θ ist der Winkel zwischen der Flächennormalen $\vec{n}$ und der Abstrahlungsrichtung. Die Projektion der Abstrahlungsrichtung auf die Flächennormale ist $\cos\theta$. Die Energiestromdichte in Abstrahlungsrichtung ist also

$$S'_\nu = S_\nu \cos\theta \tag{P3.15}$$

Diese ist über alle Winkel $0 \le \theta \le \pi/2$ zu integrieren. Zusätzlich ist über alle Winkel $0 \le \phi \le 2\pi$ zu integrieren. Mit dem Raumwinkelelement $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ folgt

$$\begin{aligned}
F_\nu^+ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} S'_\nu \sin\theta d\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} S_\nu \cos\theta \, \sin\theta d\theta d\phi \\
&= 2\pi S_\nu \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \\
&= 2\pi S_\nu \left[-\tfrac{1}{2}\cos^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \pi S_\nu [0-(-1)] = \pi S_\nu
\end{aligned} \tag{P3.16}$$

Die Ausstrahlung des Flächenelements dA ist $F_\nu^+ = \pi S_\nu$.

Aufgabe P3.4

Berechnen Sie den von einem schwarzen Körper ausgehenden gesamten Strahlungsstrom (Leistung pro Fläche) durch Integration der Ausstrahlung über das gesamte Frequenzspektrum. Wie hängt der Strahlungsstrom F mit der Temperatur T des schwarzen Körpers zusammen. Fassen Sie alle numerischen Konstanten und alle Naturkonstanten, die in dem Ausdruck für F auftreten, zu einer Konstanten zusammen. Welchen Wert hat diese Konstante?

Hinweis

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \tag{P3.17}$$

Lösung

$$F = \int_0^\infty F_\nu^+ d\nu \; = \pi \int_0^\infty S_\nu d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu \tag{P3.18}$$

mit S_ν aus Gl. P3.9. Substitution $x = h\nu/(k_B T)$ ergibt

$$F = \frac{2\pi (k_B T)^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{2\pi (k_B T)^4}{c^2 h^3} \frac{\pi^4}{15} \tag{P3.19}$$

Insgesamt erhält man das *Stefan-Boltzmannsche Gesetz*

$$F = \sigma T^4 \;\; \text{mit} \;\; \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \tag{P3.20}$$