JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Institut für Atom- und Molekülphysik
Leihgesterner Weg 217, 35392 Gießen

Lösungen zum Präsenzaufgabenblatt 1 vom 27.10.2010

Aufgabe P1.1

Ein Glas Wasser (0.2 l) wird in die Nordsee entleert. Danach verteile sich das Wasser gleichmäßig auf alle Weltmeere mit dem Volumen $V_{WM} = 1.37 \times 10^9$ km^3. Am Strand der Seychellen wird die gleiche Menge (0.2 l) Wasser geschöpft. Wie viele Moleküle des ursprünglichen Glases Wasser sind in dem geschöpften Wasser enthalten? Wie viele Moleküle erhält man, wenn man jeweils 100 l Wasser in die Nordsee entleert und am Strand der Seychellen schöpft?

Lösung

1. Schritt: Anzahl der Moleküle in 0.2 l Wasser

Dichte von Wasser	$\rho = 1$ g/cm^3
0.2 l Wasser	$V = 200$ cm^3
1 mol Wasser (Masse)	$m_{mol} = 18$ g
1 mol Wasser (Anz. Moleküle)	$N_{mol} = N_A = 6.022 \times 10^{23}$
Masse von 0.2 l Wasser	$m = \rho V = 200$ g
Anzahl der Moleküle in 0.2 l	$N_0 = \frac{m}{m_{mol}} N_A = 6.69 \times 10^{24}$

2. Schritt: Anzahl dieser Moleküle pro cm^3 der Weltmeere

$$n = \frac{N_0}{V_{WM}} = \frac{6.69 \times 10^{24}}{1.37 \times 10^{24} \text{ cm}^3} = 4.88 \text{ cm}^{-3}$$

3. Schritt: Anzahl dieser Moleküle in 0.2 l:

$$N_1 = nV = 4.88\text{cm}^{-3} \times 200 \text{ cm}^3 = 976.8$$

Im am Strand der Seychellen geschöpften Wasser befinden sich 977 der ursprünglichen Moleküle.

Die Anzahl der Moleküle ist sowohl proportional zum in die Nordsee entleerten als auch zum am Strand der Seychellen geschöpften Volumen. Wenn die Volumina jeweils 100 l betragen erhält man also eine um den Faktor $(100/0.2)^2 = 500^2 = 2.5 \times 10^5$ höhere Anzahl, d.i. 2.44×10^8.

Aufgabe P1.2

Im interstellaren Raum beträgt die mittlere Dichte von Wasserstoffatomen 1 cm^{-3} und die mittlere Temperatur 10 K. Wie groß ist der Druck unter diesen Bedingungen?

Wieviele Atome/Moleküle eines ideales Gases findet man unter Normalbedingungen in einem Volumen von 1 cm^3?

Nützlich zu wissen beim Arbeiten im Labor: Wieviele Atome befinden sich bei einem Druck von 1 mbar und einer Temperatur von 300 K in einem Volumen von 1 cm^3?

Lösung

Die Beziehung zwischen Druck p, Teilchendichte n und Temperatur T lautet $p = nk_BT$ mit der Boltzmann-Konstanten $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}. Mit $n = 1\ \mathrm{cm}^{-3} = 10^6\ \mathrm{m}^{-3}$ und $T = 10\ K$ folgt

$$p = 10^6 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 10\ \mathrm{N\ m}^{-2} = 1.38 \times 10^{-16}\ \mathrm{Pa} \approx 1.38 \times 10^{-18}\ \mathrm{mbar}$$

Anzahl der Atome in 1 cm^3 unter Normalbedingungen ($T = 273$ K, $p = 1013$ mbar):

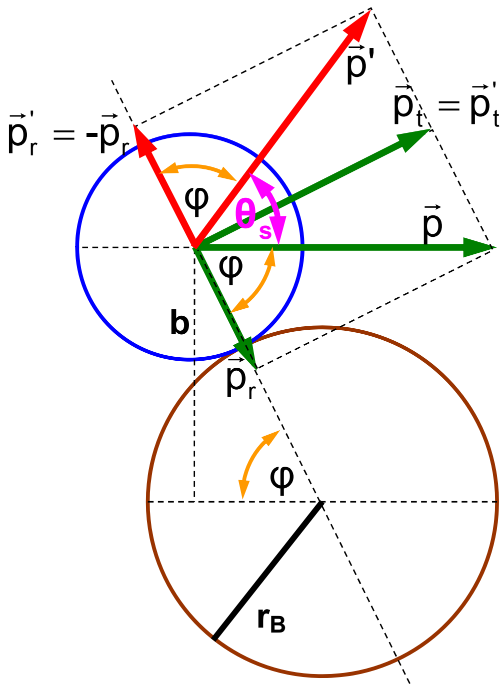
$$N = \frac{pV}{k_BT} = \frac{10.13\ \mathrm{N\ cm}^{-2} \times 1\ \mathrm{cm}^3}{1.38 \times 10^{-21}\mathrm{N\ cm\ K}^{-1} \times 273\ \mathrm{K}} = 2.69 \times 10^{19}$$

Anzahl der Atome pro cm^3 und pro mbar bei Zimmertemperatur ($T = 300$ K):

$$n = \frac{N}{V} = \frac{p}{k_BT} = \frac{2.69 \times 10^{19}}{\mathrm{cm}^3} \frac{p}{1013\ \mathrm{mbar}} \frac{273}{300} = 2.42 \times 10^{16} \frac{p}{\mathrm{mbar\ cm}^3}$$

Aufgabe P1.3

Berechnen sie den winkeldifferenziellen Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung zweier starrer Kugeln mit Radien r_A und r_B im Schwerpunktsystem.



Skizze zur Herleitung des winkeldifferenziellen Wirkungsquerschnitts für die elastische Streuung zweier starrer Kugeln mit Radien r_A und r_B. Der Streuwinkel im Schwerpunktsystem und der Stoßparameter sind mit θ_S bzw. mit b bezeichnet. Die Vektoren veranschaulichen die Teilchenimpulse vor und nach dem Stoß.

Lösung

Allgemeine Formel für den winkeldifferenziellen Wirkungsquerschnitt für Stoßparameter b und Ablenkwinkel θ_S im Schwerpunktsystem (laut Vorlesung):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathrm{cm}}}(\theta_S) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta_S}\right| \tag{P1.1}$$

Gesucht wird also eine Funktion $b(\theta_S)$ die in Gl. P1.1 eingesetzt werden kann. Aus der Skizze entnimmt man, dass

$$b = (r_A + r_B)\sin\varphi \tag{P1.2}$$

und

$$2\varphi + \theta_S = 180^\circ \tag{P1.3}$$

Der Zusammenhang zwischen b und θ lautet also

$$b = (r_A + r_B)\sin\left(\frac{180^\circ - \theta_S}{2}\right) = (r_A + r_B)\cos\frac{\theta_S}{2} \tag{P1.4}$$

Die Ableitung nach dem Streuwinkel θ_S ist

$$\left|\frac{db}{d\theta_S}\right| = (r_A + r_B)\frac{1}{2}\sin\frac{\theta_S}{2} \tag{P1.5}$$

Wegen der Zylindersymmetrie des Streuproblems genügt es, Streuwinkel $0 \leq \theta_S \leq 180°$ zu betrachten. In diesem Winkelbereich ist $\sin(\theta_S/2) \geq 0$ so dass die Betragsstriche weggelassen werden dürfen.

Mit $\sin\theta_S = 2\cos\frac{\theta_S}{2}\sin\frac{\theta_S}{2}$ folgt durch Einsetzen von Gl. P1.4 und Gl. P1.5 in Gl. P1.1

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathrm{cm}}}(\theta_S) = \frac{(r_A + r_B)\cos\frac{\theta_S}{2}}{2\cos\frac{\theta_S}{2}\sin\frac{\theta_S}{2}}(r_A + r_B)\frac{1}{2}\sin\frac{\theta_S}{2} = \frac{(r_A + r_B)^2}{4} \tag{P1.6}$$