Institut für Atom- und Molekülphysik
Leihgesterner Weg 217, 35392 Gießen

Lösungen zum Präsenzaufgabenblatt 5 vom 24.11.2010

Aufgabe P5.1

Berechnen Sie die DeBroglie-Wellenlänge eines C_{60}^{+}-Molekülions, das mit einer Spannung $U_{\mathrm{acc}} =$ 5 V beschleunigt wurde.

Lösung

Die Geschwindigkeit des C_{60}^{+}-Ions errechnet sich aus der Beschleunigungsspannung (nichtrelativistische Rechnung genügt) zu:

$$v = \sqrt{\frac{2eU_{\mathrm{acc}}}{M}} \tag{P5.1}$$

Die DeBroglie-Wellenlänge λ ist

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{Mv} = \frac{h}{\sqrt{2MeU_{\mathrm{acc}}}} = \frac{hc}{\sqrt{2Mc^2eU_{\mathrm{acc}}}} \tag{P5.2}$$

Die Masse des C_{60}-Moleküls beträgt $Mc^2 = 60 \times 12 \times m_u c^2$. Mit $m_u c^2 = 931.494$ MeV ist $Mc^2 = 6.707 \times 10^{11}$ eV und mit $hc = 1.2398 \times 10^{-6}$ eV m folgt für die DeBroglie-Wellenlänge

$$\lambda = \frac{1.2398 \times 10^{-6}\ \mathrm{m\ eV}}{\sqrt{2 \times 6.707 \times 10^{11}\ \mathrm{eV} \times 5\ \mathrm{eV}}} = 4.79 \times 10^{-13}\ \mathrm{m} \tag{P5.3}$$

Aufgabe P5.2

Berechnen Sie die Überlagerung zweier ebener Wellen $\Psi_j(x,t) = A_j \exp[i(k_j x - \omega_j t)]$ mit $j = 1, 2$, $A = A_1 = A_2$, $k_1 = k_0 - \Delta k$, $k_2 = k_0 + \Delta k$, $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$, $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$ und $\Delta k < k_0$ und $\Delta\omega < \omega_0$.

Lösung

Die Überlagerung ist die Summe aus Ψ_1 und Ψ_2, d.h.

$$\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t) = A_1 e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + A_2 e^{i(k_2 x - \omega_2 t)} \tag{P5.4}$$

$$= A e^{i[(k_0 - \Delta k)x - (\omega_0 - \Delta\omega)t]} + A e^{i[(k_0 + \Delta k)x - (\omega_0 + \Delta\omega)t]} \tag{P5.5}$$

$$= A e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \left[e^{-i(\Delta k x - \Delta\omega t)} + e^{i(\Delta k x - \Delta\omega t)}\right] \tag{P5.6}$$

$$= A e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \left[e^{-i(\Delta k x - \Delta\omega t)} + e^{i(\Delta k x - \Delta\omega t)}\right] \tag{P5.7}$$

$$= A e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} 2\cos(\Delta k x - \Delta\omega t) \tag{P5.8}$$

Dies ist eine Sinusschwingung, deren Amplitude mit niedrigerer (wegen $\Delta k < k_0$ und $\Delta\omega < \omega_0$) Frequenz moduliert wird. Das Phänomen wird als „Schwebung" bezeichnet.

Es wurden folgende Rechenregeln für Exponentialfunktionen angewandt:

$$e^{a+b} + e^{a+c} = e^a e^b + e^a e^c = e^a \left(e^b + e^c\right) \tag{P5.9}$$

Zusammenhänge zwischen Wellenzahl k, Wellenlänge λ, Kreisfrequenz ω, Frequenz ν und Ausbreitungsgeschwindigkeit c:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{P5.10}$$

$$\omega = 2\pi\nu \tag{P5.11}$$

$$\frac{\omega}{k} = \nu\lambda = c \tag{P5.12}$$

Aufgabe P5.3

Die Heisenbergsche Unschärferelation $\Delta x \times \Delta p \geq \hbar$ besagt, dass Impuls und Ort eines Teilchens nicht gleichzeitig beliebig genau festgelegt werden können. Zeigen Sie, dass ein Wellenpaket mit anfänglicher Breite Δx_0 aufgrund der anfänglichen Impulsunschärfe Δp_0 im Verlauf der Zeit immer breiter wird.

Lösung

Die Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpaketes

$$\Psi(x,t) = A_0 e^{i(k_0 x - \omega t)} \frac{2\sin\left[\left(x - \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0} t\right)\frac{\Delta k}{2}\right]}{\left(x - \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0} t\right)\frac{\Delta k}{2}} \frac{\Delta k}{2} \tag{P5.13}$$

ist gegeben als

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}\bigg|_{k_0} = \frac{p}{m} \tag{P5.14}$$

Dies sieht man, indem man die kinetische Energie $\hbar\omega = \hbar^2 k^2/(2m)$ nach der Wellenzahl k differenziert und $p = \hbar k$ einsetzt.

Die Impulsunschärfe Δp impliziert eine Unschärfe der Gruppengeschwindigkeit

$$\Delta v_g = \frac{\Delta p_0}{m} \geq \frac{1}{m}\frac{\hbar}{\Delta x_0} \tag{P5.15}$$

wobei im letzten Schritt die Heisenbergsche Unschärferelation angewendet wurde.

Im Verlauf der Zeit verhält sich die Breite des Wellenpaketes demnach wie folgt:

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 + \Delta v_g t \geq \Delta x_0 + \frac{1}{m}\frac{\hbar}{\Delta x_0} t \tag{P5.16}$$

Das Wellenpaket wird im Verlauf der Zeit immer breiter. Es „zerfließt“.