JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Institut für Atom- und Molekülphysik
Leihgesterner Weg 217, 35392 Gießen

Lösungen zum Präsenzaufgabenblatt 9 vom 22.12.2010

Aufgabe P9.1

a) Bestimmen Sie nach dem Bohrschen Atommodell das Magnetfeld, das das Elektron im Grundzustand des Wasserstoffatoms am Ort des Protons erzeugt.

b) Im Wasserstoffatom hält sich das Proton im Magnetfeld auf, das vom kreisenden Elektron erzeugt wird. Relativ zu diesem magnetischen Feld hat das Proton mit dem magnetischen Moment $\mu = 2.79\mu_K$ (Kernmagneton: $\mu_K = 3.152 \times 10^{-8}$ eV T^{-1}) zwei Einstellmöglichkeiten $\pm|\mu_z|$. Die Energiedifferenz dieser beiden Zustände beträgt $\Delta E = 5.83 \times 10^{-6}$ eV. Berechnen Sie aus dieser Aufspaltung das Magnetfeld am Kernort. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil a).

Lösung

Teil a)

Das um das Proton kreisende Elektron stellt einen Strom dar. Nach dem Biot-Savart-Gesetz erzeugt ein Strom im Abstand r vom Leiter ein Magnetfeld der Größe

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \int_S \frac{I \mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \tag{P9.1}$$

wobei sich das Integral über den gesamten Weg S erstreckt. Da das Elektron sich auf einer Kreisbahn befindet, ist der Abstand des Protons zum Strom immer gleich. Im Grundzustand gilt dann

$$r = a_0 \tag{P9.2}$$

mit dem Bohrschen Radius $a_0 = 5.292 \times 10^{-11}$ m. Das Wegelement $\mathrm{d}\vec{s}$ lässt sich schreiben als

$$\mathrm{d}\vec{s} = \vec{v}\mathrm{d}t \tag{P9.3}$$

Dann muss die Integration über die Umlaufszeit T erfolgen:

$$\vec{B} = \mu_0 \int_T \frac{I \vec{v} \times \vec{r} \mathrm{d}t}{4\pi r^3} \tag{P9.4}$$

Bei einer Kreisbahn stehen $\vec{v}$ und $\vec{r}$ immer senkrecht zueinander. Wir betrachten im folgenden nur den Betrag

$$B = \mu_0 \int_T \frac{Ivr\mathrm{d}t}{4\pi r^3} \tag{P9.5}$$

Der Strom, den das kreisende Elektron darstellt, lässt sich schreiben als

$$I = \frac{e}{T} \tag{P9.6}$$

Damit kann das Integral direkt ausgeführt werden, und man erhält:

$$B = \mu_0 \frac{evrT}{T 4\pi r^3} = \mu_0 \frac{ev}{4\pi r^2} \tag{P9.7}$$

Mit $r = a_0 = 5.292 \times 10^{-11}$ m und $v = c/137$ für den Wasserstoffgrundzustand ergibt sich $B = 12.5$ T.

Teil b)

Wenn sich ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$ in einem Magnetfeld $\vec{B}$ befindet, muss zum Drehen von der Konfiguration $\vec{\mu} \perp \vec{B}$ in die Konfiguration $\vec{\mu} \| \vec{B}$ die folgende Energie aufgewendet werden

$$E = -\mu B \tag{P9.8}$$

Der Energieunterschied zwischen den beiden Einstellmöglichkeiten $\vec{\mu}$ parallel bzw. antiparallel zu $\vec{B}$ entspricht gerade dem doppelten der Energie in Gl. P9.8, d. h.

$$\Delta E = 2\mu B \tag{P9.9}$$

Auflösen nach B liefert

$$B = \frac{\Delta E}{2\mu} = \frac{5.83 \times 10^{-6}}{2 \times 2.79 \times 3.152 \times 10^{-8}} \text{ T} = 33.1 \text{ T} \tag{P9.10}$$

Dieser Wert ist erheblich höher als das Ergebnis von Aufgabenteil a) Die Vorstellung, dass sich das Elektron im Wasserstoffatom auf einer Kreisbahn bewegt, führt zu einem falschen Ergebnis. Andererseits ergibt der Ansatz dieser Aufgabe auch nicht das korrekte Ergebnis, da das Magnetfeld zusätzlich vom Elektronenspin und dessen Richtungsquantelung abhängt.

Aufgabe P9.2

Welche Werte kann der Gesamtdrehimpuls eines f-Elektrons im Wasserstoffatom annehmen? Wieviele Einstellmöglichkeiten haben die möglichen Gesamtdrehimpulse in einem Magnetfeld? Welche Werte kann die magnetische Quantenzahl jeweils annehmen? Welches ist der kleinstmögliche Wert für die Hauptquantenzahl n?

Lösung

Der Gesamtdrehimpuls $\vec{j}$ ergibt sich aus Kopplung von Spin $\vec{s}$ und Bahndrehimpuls $\vec{\ell}$. Für die entsprechenden Quantenzahlen s ,ℓ und j gilt

$$|l-s| \leq j \leq l+s \tag{P9.11}$$

Für ein f-Elektron ist $l=3$ und $s=1/2$, so dass $j=5/2$ und $j=7/2$ mögliche Werte für die Gesamtdrehimpulsquantenzahl sind.

Für jeden Gesamtdrehimpuls j gibt es $2j+1$ Einstellmöglichkeiten in einem $\vec{B}$-Feld, im vorliegenden Fall also 6 (für $j=5/2$) bzw. 8 (für $j=7/2$) Einstellmöglichkeiten. Die zugehörigen magnetischen Quantenzahlen sind

$$\begin{aligned}
j=5/2: \quad & m_j = -5/2, -3/2, -1/2,\ 1/2,\ 3/2,\ 5/2, \\
j=7/2: \quad & m_j = -7/2 -5/2, -3/2, -1/2,\ 1/2,\ 3/2,\ 5/2,\ 7/2.
\end{aligned}$$

Bei gegebener Hauptquantenzahl n ist der maximal mögliche Bahndrehimpuls $\ell_{\max} = n-1$. Ein Zustand mit $\ell = 3$ ist daher erst ab der $n=4$-Schale möglich.