Übungen zur Experimentalphysik III
Wintersemester 2010/2011

Institut für Atom- und Molekülphysik
Leihgesterner Weg 217, 35392 Gießen

Lösungen zum Hausaufgabenblatt 1 vom 27.10.2010

Aufgabe H1.1 (5 Punkte)

Geben Sie den winkeldifferenziellen Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung zweier starrer Kugeln (Radien r_A und r_B, gleiche Massen $m_A = m_B$) *im Laborsystem* an.

Hinweis: Gehen Sie von der Formel für den Wirkungsquerschnitt *im Schwerpunktsystem* aus (wurde in der Vorlesung angegeben) und beachten Sie die Transformation des Streuwinkels (wurde ebenfalls in der Vorlesung angegeben) beim Übergang vom Schwerpunkt- ins Laborsystem.

Lösung

Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung zweier starrer Kugeln (Radien r_A und r_B) *im Schwerpunktsystem*:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathrm{cm}}}(\theta) = \frac{(r_A + r_B)^2}{4} \tag{H1.1}$$

mit dem Streuwinkel θ im Schwerpunktsystem und dem Raumwinkelelement $d\Omega_{\mathrm{cm}}$

Beim Übergang in das Laborsystem transformiert sich der Wirkungsquerschnitt gemäß

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathrm{Lab}}}(\vartheta) = \frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathrm{cm}}}(\theta)\frac{d\Omega_{\mathrm{cm}}}{d\Omega_{\mathrm{Lab}}} = \frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathrm{cm}}}(\theta)\frac{\sin\theta}{\sin\vartheta}\frac{d\theta}{d\vartheta} \tag{H1.2}$$

Zusammenhang zwischen Streuwinkel ϑ im Laborsystem und Streuwinkel θ im Schwerpunktsystem (s. Vorlesung):

$$\tan\vartheta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + k} \tag{H1.3}$$

mit dem Massenverhältnis $k = m_A/m_B$. Hier soll nur der Fall $k = 1$ betrachtet werden, d.h.

$$\tan\vartheta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} = \frac{\sin 2\frac{\theta}{2}}{1 + \cos 2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1 + \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2} \tag{H1.4}$$

Mit $\theta = 2\vartheta$ folgt

$$\frac{d\Omega_{\text{cm}}}{d\Omega_{\text{Lab}}} = \frac{\sin\theta}{\sin\vartheta}\frac{d\theta}{d\vartheta} = 2\frac{\sin 2\vartheta}{\sin\vartheta} = 2\frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = 4\cos\vartheta \tag{H1.5}$$

Damit ist der Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung zweier starrer Kugeln gleicher Masse *im Laborsystem*:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{Lab}}}(\vartheta) = (r_A + r_B)^2 \cos\vartheta \tag{H1.6}$$

Zusatzinformation: Allgemeiner Fall mit $k \neq 1$

Andere Form von Gl. H1.2

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{Lab}}}(\vartheta) = \frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{cm}}}(\theta)\frac{d\Omega_{\text{cm}}}{d\Omega_{\text{Lab}}} = \frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{cm}}}(\theta)\frac{\sin\theta}{\sin\vartheta}\frac{d\theta}{d\vartheta} = \frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{cm}}}(\theta)\frac{-1}{\sin\vartheta}\frac{d(\cos\theta)}{d\vartheta} \tag{H1.7}$$

Auflösen von Gl. H1.3 nach $\cos\theta$:

$$(\cos\theta + k)^2 \tan^2\vartheta = \sin^2\theta \tag{H1.8}$$

$$(\cos\theta + k)^2 \sin^2\vartheta = \cos^2\vartheta(1-\cos^2\theta) \tag{H1.9}$$

Ordnen nach Potenzen von $\cos\theta$.

$$\cos^2\theta(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) + 2k\sin^2\vartheta\cos\theta + k^2\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta = 0 \tag{H1.10}$$

$$\cos^2\theta + 2k\sin^2\vartheta\cos\theta + k^2\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta = 0 \tag{H1.11}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\cos\theta$. Deren Lösung lautet

$$\cos\theta = -k\sin^2\vartheta \pm \sqrt{k^2\sin^4\vartheta - k^2\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta} \tag{H1.12}$$

$$= -k\sin^2\vartheta \pm \sqrt{k^2\sin^2\vartheta(\sin^2\vartheta - 1) + \cos^2\vartheta} \tag{H1.13}$$

$$= -k\sin^2\vartheta \pm \sqrt{-k^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta} \tag{H1.14}$$

$$= -k\sin^2\vartheta \pm \cos\vartheta\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta} \tag{H1.15}$$

Jetzt kann die Ableitung $d(\cos\theta)/d\vartheta$ aus Gl. H1.7 berechnet werden:

$$\frac{d(\cos\theta)}{d\vartheta} = -2k\sin\vartheta\cos\vartheta \mp \sin\vartheta\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta} \tag{H1.16}$$

$$\pm\cos\vartheta\frac{-2k^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} \tag{H1.17}$$

$$\frac{-1}{\sin\vartheta}\frac{d(\cos\theta)}{d\vartheta} = 2k\cos\vartheta \pm \frac{1-k^2\sin^2\vartheta + k^2\cos^2\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} \tag{H1.18}$$

$$\frac{d\Omega_{\text{cm}}}{d\Omega_{\text{Lab}}} = 2k\cos\vartheta \pm \frac{1+k^2(1-2\sin^2\vartheta)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} \tag{H1.19}$$

Damit ist der Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung zweier starrer Kugeln *im Laborsystem*:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{Lab}}}(\vartheta) = \frac{(r_A + r_B)^2}{4}\left[2k\cos\vartheta \pm \frac{1+k^2(1-2\sin^2\vartheta)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}\right] \tag{H1.20}$$

Das zu wählende Vorzeichen hängt u. a. von dem Massenverhältnis $k = m_A/m_B$ ab.

Aufgabe H1.2 (5 Punkte)

Ein Strahl einfach geladener Heliumionen werde elastisch an einem Helium-Atomstrahl der Teilchendichte $n = 10^{14}$ cm^{-3} und der Dicke $\Delta x = 1$ mm gestreut. Der elektrische Strom des Ionenstrahls sei $I = 1.6$ nA. Die gestreuten Heliumionen werden mit einem kreisrunden, flächigen Detektor mit Durchmesser $D = 3$ cm nachgewiesen, der sich unter variablem Streuwinkel ϑ in einem Abstand $s = 30$ cm vom Kreuzungspunkt der Strahlen befindet. Behandeln Sie die Heliumionen und die Heliumatome in dem Atomstrahl grob vereinfachend als harte Kugeln mit Radius $r = 0.1$ nm. Wie hoch ist jeweils die Zählrate R im Detektor bei den Streuwinkeln $\vartheta = 10°$, $45°$ und $90°$.

Lösung Die Zählrate (Teilchen pro Sekunde) im Detektor ist

$$R(\vartheta) = S\, n\Delta x \Delta\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) \tag{H1.21}$$

mit dem Teilchenstrom

$$S = \frac{I}{e} = \frac{1.6 \times 10^{-9}\ \mathrm{A}}{1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{As}} = 10^{10}\ \mathrm{s}^{-1}, \tag{H1.22}$$

der Flächenbelegung

$$n\Delta x = 10^{14}\ \mathrm{cm}^{-3} \times 0.1\ \mathrm{cm} = 10^{13}\ \mathrm{cm}^{-2} \tag{H1.23}$$

dem vom Detektor eingesehenen Raumwinkel

$$\Delta\Omega = \frac{\pi(D/2)^2}{s^2} = \frac{\pi D^2}{4s^2} = 0.00785 \tag{H1.24}$$

sowie dem winkeldifferenziellen Wirkungsquerschnitt im Laborsystem aus Gl. H1.6. Einsetzen aller Größen in Gl. H1.21 ergibt

$$R(\vartheta) = 10^{10}\ \mathrm{s}^{-1} \times 10^{13}\ \mathrm{cm}^{-2} \times 0.00785 \times 10^{-16}\ \mathrm{cm}^2 \times 4\cos\vartheta = 3.14 \times 10^5\ \mathrm{s}^{-1}\cos\vartheta \tag{H1.25}$$

Im Einzelnen ergibt sich für die angegebenen Winkel $R(10°) = 3.09 \times 10^5\ \mathrm{s}^{-1}$, $R(45°) = 2.22 \times 10^5\ \mathrm{s}^{-1}$ und $R(90°) = 0\ \mathrm{s}^{-1}$.