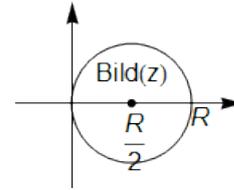


# Besprechung zu Blatt 11 zu Analysis 3

## Aufgabe 5

$$z(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + i\omega C} = y - i \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{R}{2}\right)^2}$$

wobei  $y = \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$   
 $\omega \in \mathbb{R} \Rightarrow y \in (0, R] \quad z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$



## Aufgabe 1

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \mathbb{C} \\ \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_I f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_I |f(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &\leq \|f|_{\text{Bild } \gamma}\|_{\infty} \cdot \underbrace{\int_I |\dot{\gamma}(t)| dt}_{\text{Bogenlänge von } \gamma} \end{aligned}$$

## Aufgabe 4

Sei  $G$  offen und zusammenhängend,  
 $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $f(G) \subset \mathbb{R}$   
 z.Z.  $f$  konstant.  
 Sei  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in G\}$   
 $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y) = \begin{pmatrix} \Re(f(x + iy)) \\ \Im(f(x + iy)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix}$   
 Da  $f$  holomorph, ist  $g$  diffbar mit  $\partial_x g_1 = \partial_y g_2, \partial_x g_2 = -\partial_y g_1$   
 Da  $f(G) \subset \mathbb{R}$  gilt  $g_2 = 0$ , dh,  $g_2 = 0$ ,  
 d.h.  $\partial_y g_1 = \partial_y g_2 = 0 \Rightarrow \partial_y g_1 = -\partial_x g_2 = 0$   
 Damit ist  $g$  lokal konstant.  
 Mit Aufgabe 3c folgt, dass  $g$  und damit  $f$  konstant ist.

## Aufgabe 2

$$\oint_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z^2+1} dz = ?, \quad z^2 + 1 = (z+1)(z-i)$$

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z+i$  holomorph  
 $\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z+i}$  holomorph  
 $\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z-i}$  holomorph  
 $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}$  holomorph

Es gilt für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ :  $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} + (-\frac{1}{2i}) \frac{1}{z+i}$   
 $\Rightarrow \oint_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z^2+1} dz = \frac{1}{2i} \oint_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z-i} dz - \frac{1}{2i} \oint_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z+i} dz$

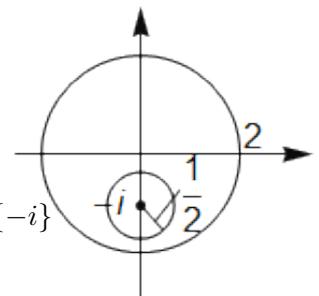
$$\oint_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z+i} dz = \int_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z+i} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{2e^{it}+i} dt \text{ hässlich.}$$

$$\overline{B(-i, \frac{1}{2})} \subseteq B(0, 2)$$

Aufgabe 6 liefert, dass  $\gamma_{0,2}$  homotop zu  $\gamma_{-i, \frac{1}{2}}$  in  $\overline{B(0, 2)} \setminus \{-i\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{-i\}$

$$\mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z+i} \text{ holomorph}$$

$$\text{mit 1.13} \Rightarrow \int_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z+i} dz = \int_{\gamma_{-i, \frac{1}{2}}} \frac{1}{z+i} dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{(-i + \frac{1}{2}e^{it}) + i}}_{=i} \cdot i \frac{1}{2} e^{it} dt = 2\pi i$$



Genauso sieht man  $\oint_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z-i} dz = \int_{\gamma_{i, \frac{1}{2}}} \frac{1}{z-i} dz$

$$\Rightarrow \oint_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z^2+1} dz = 0$$

Sei  $r > 2$  wie vorher sieht man mit Aufgabe 6 und Satz 1.13:

$$0 = \oint_{\partial B(0,r)} \frac{1}{z^2+1} dz = \oint_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z^2+1} dz$$

oder:

Mit Aufgabe 1 gilt für  $r > 2$ :

$$\left| \oint_{\partial B(0,r)} \frac{1}{z^2+1} dz \right| = \left| \int_{\gamma_{0,r}} \frac{1}{z^2+1} dz \right| \leq \underbrace{\max_{t \in [0, 2\pi]} |f(\gamma_{0,r}(t))|}_{(*)} \cdot \underbrace{\text{Bogenlänge von } \gamma_{0,r}}_{2\pi r}$$

$$zu(*) : |f(\gamma_{0,r}(t))| = \left| \frac{1}{|\gamma_{0,r}(t)^2+1|} \right| \leq \frac{1}{|\gamma_{0,r}(t)^2|-1} = \frac{1}{r^2-1}$$

$$\Rightarrow \dots \leq \frac{1}{r^2-1} 2\pi r = \frac{2\pi}{r-\frac{1}{r}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

Mit Aufgabe 6 gilt:

$$\oint_{\partial B(0,2)} \frac{1}{1+z^2} dz = \oint_{\partial B(0,r)} \frac{1}{z^2+1} dz = \lim_{\tilde{r} \rightarrow \infty} \oint_{\partial B(0,\tilde{r})} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$$

## Allgemeines

### Homotopien

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph

$$\int_{\gamma} f(z) dz = ? = \int_I f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

$U$  Sternförmig

$\gamma_1, \gamma_2 : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  geschlossen (d.h.  $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ ,  $\gamma_2(a) = \gamma_2(b)$ )

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z) dz = 0 = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Potenzreihenentwicklung (Satz 1.3, 1.7)

$B(z_0, \varepsilon)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 0$$

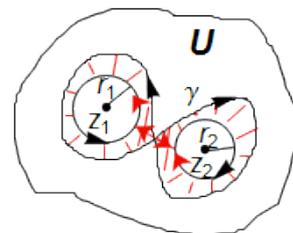
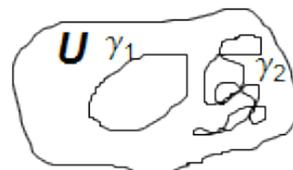
$(z - z_0)^n$  hat Stammfunktion  $\frac{1}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$

$$\int_{\gamma} f = ? = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

$\gamma_1 = \gamma_{z_1, r_1}$ ,  $\gamma_2 = \gamma_{z_2, r_2}$  (Aufgabe 6)

$$\gamma_2(t) = \gamma_{z_2, r_2}(-t) = z_2 + r_2 e^{-it}$$

$$\int_{\gamma} f = \left( \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_r} \right) f(z) dz = \left( \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} \right) f(z) dz$$



### Laurentreihen

$z_0$ ,  $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz$$

(hat Stammfunktion  $\frac{1}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ )

$$= a_{-1} \underbrace{\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz}_{= 2\pi i \cdot N(\gamma)} = 2\pi i a_{-1} \cdot N(\gamma)$$

$N(\gamma)$  = Umlaufzahl von  $\gamma$  zu  $z_0$

$a_{-1} = \text{res}(f, z_0)$  Residuum