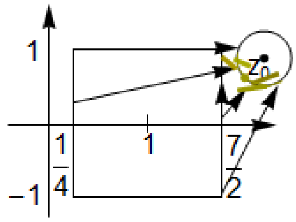
Beispiele zur 2. Klausur in Analysis 3

Beispiel 1

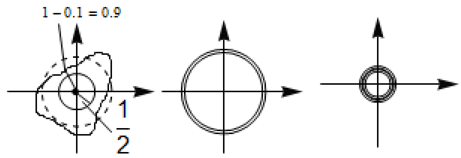


$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad z_0 \in \mathbb{C} \setminus Bild\gamma$

$r : [a,b] \to [0,\infty], \quad \gamma(t) = z_0 + r(t)e^{i\varphi(t)}$

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \nu_\gamma(z_0) = \varphi(b) - \varphi(a)$

Beispiel 2



$\gamma : [0,4\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{it} + 0.1e^{3it}$

$\gamma_{0,1/2} : [0,4\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_{0,1/2}(+) = \frac{1}{2}e^{it}$

Ist das der Fall, dann ist $z \mapsto \frac{1}{2}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\nu_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{0,1/2}} \frac{1}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{4\pi} \frac{\frac{1}{2}ie^{it}}{\frac{1}{2}e^{it}}dt = 2$

Hier Homotopie-Argument (Ausnutzen der Homotopie-Invarianz), da

φ mit $\gamma = re^{i\varphi}$ sehr schwierig ist und auch $\int\limits_\gamma \frac{1}{z}dz$ direkt berechnen schwierig ist.

Sei $H : [0,4\pi] \times [0,1] \to \mathbb{C}, \quad h(t,s) := (1-s)\gamma(t) + s\gamma_{0,1/2}(t)$

h stetig, $\quad h(*,0) = \gamma, \quad h(*,1) = \gamma_{0,1/2}$

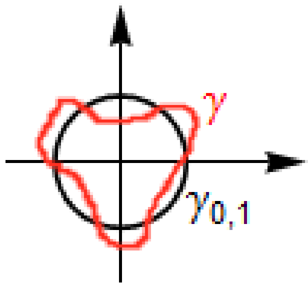
Bleibt z.z. $h(t,s) \neq 0 \forall t \in [0,4\pi]$ und $s \in [0,1]$

Seien $t \in [0,4\pi], \;\; s \in [0,1]$. Dann ist

$|h(t,s)| = |(1-s)e^{it} + (1-s)\frac{1}{10}e^{3it} + s\frac{1}{2}e^{it}| = |(1-\frac{s}{2})e^{it} + \frac{(1-s)}{10}e^{3it}|$

$\geq (1-s)|e^{it}| - \frac{(1-s)}{10}|e^{3it}| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} > 0$

Damit sind γ und $\gamma_{0,1/2}$ homotop in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

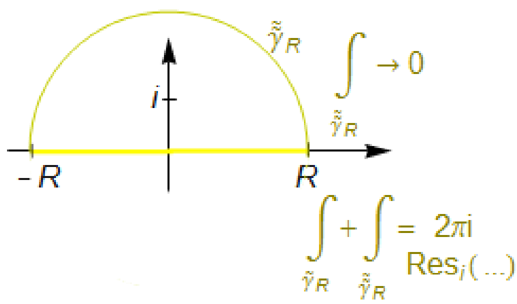


Alternativ:

$\gamma(t) = 1e^{it} + \frac{1}{10}e^{3it}$

$k(t,s) = (1-s)\gamma + s\gamma_{0,1}$

Beispiel 3



$\int\limits_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1}dx = ?$

$= \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} \frac{\cos(z)}{z^2+1}dz$

mit $\gamma_R : [0,R] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_R(x) = x$

$= \lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{2} \int\limits_{\tilde{\gamma}_R} \frac{\cos(z)}{z^2+1}dz$

mit $\tilde{\gamma}_R : [-R,R] \to \mathbb{C}, \quad \tilde{\gamma}_R(x) = x$

$\tilde{\tilde{\gamma}}_R : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \tilde{\tilde{\gamma}}_R(+) = Re^{it}$

Überlegungen:

$\cos(x) = \Re(e^{ix})$

$\frac{e^{ix}}{(xe^{ix}-1)(xe^{ix}+1)} = \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx = \Re\left(\int\limits_{\tilde{\gamma}_R} \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}dz\right)$

$|\frac{e^{iRe^{it}} \cdot Rie^{it}}{R^2 e^{2it}+1}| = |\frac{Re^{i(R+1)\cos(t)} + Re^{-(R+1)\sin(t)}}{R^2 e^{2it}+1}|$
$\leq |\frac{R\cos((r+1)\cos(t)) + i\sin(R+1)}{R^2(\cos(2t)+i\sin(2t))}|$
$\Rightarrow ... \Rightarrow \int \to 0$
Dann kann man mit kleinem Kreis um Sngt. Laurent-Reihe bestimmen.

Beispiel 4 (Stabilität)

x_0 Gleichgewicht.
$\dot{x}(t) = f(x(t)) = \underbrace{f(x_0)}_{=0} + Df(x_0)(x(t) - x_0) + R(x(t) - x_0)$
$\approx \underbrace{Df(x_0)}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}}(x(t) - x_0)$
Eigenwerte, komplex, n-Stück: $\lambda_1, ..., \lambda_n$
$\Re(\lambda_1) < 0 \Rightarrow\ x_0$ stabil

$V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Nachzurechnen: $< \nabla V(x), f(x) > \leq 0$
$$\left.\begin{array}{ll} (*) & x_0 \text{ ist isol. Nullstelle von f} \\ (*) & x_0 \text{ ist striktes Minimum} \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ stabil (asymptotisch)}$$

$f = \nabla G$
$V = -g \Rightarrow < \nabla v(x), f(x) >$
$= < -\nabla g(x), \nabla g(x) > = -|\nabla g(x)|^2 = -||\nabla g(x)||_2^2 \leq 0$