10 Präsenzblatt vom 24.1.13

10.1 Präsenz 10

Definition:

$$V: \quad \psi \to e^{-i\alpha_a \frac{r^a}{2}}\psi =: \psi'$$
$$A: \quad \psi \to e^{-i\gamma^5\alpha_a \frac{r^a}{2}}\psi =: \psi'$$
$$\mathscr{L}(\psi) = \overline{\psi}(i\gamma\mu\partial_\mu - m)\psi$$

Ziel: durch Transformation V und A soll $\mathscr{L}(\psi)$ auch für $\mathscr{L}(\psi')$ gelten.
Vorgehen: Durch Umformung wird versucht, die Transformierte $\mathscr{L}$ auf die ursprüngliche Form zurück zu führen, wobei Zusatzterme zusammengefasst werden.

V:
$\psi' = e^{-i\alpha_a \frac{r^a}{2}}\psi = e^{-iv}\psi.$
Da r^a die Pauli-Matrizen darstellt, die 2×2 Dimension besitzen, sind sie in Betracht der 4 γ^k-Matrizen als Skalar, also Forfaktor anzusehen. Daher Substitution und Behandlung als Vorfaktor.

$\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$
$\psi' = e^{-iv}\psi = \psi e^{-iv}$
$(\psi')^\dagger\gamma^0 = e^{iv}\psi^\dagger\gamma^0 = \psi\gamma^0 e^{iv}$

Für $\mathscr{L}$ gilt: $\gamma^\mu\partial_\mu$ als vertauschbar mit e^{iv}, da Skalar.
$\Rightarrow \mathscr{L}(\psi') = (\psi')^\dagger\gamma^0(i\gamma\mu\partial_\mu - m)\psi'$
$= e^{iv}\psi^\dagger\gamma^0(i\gamma\mu\partial_\mu - m)e^{-iv}\psi$
$= \psi^\dagger\gamma^0(i\gamma\mu\partial_\mu - m)e^{iv}e^{-iv}\psi$
$= \psi^\dagger\gamma^0(i\gamma\mu\partial_\mu - m)\psi = \mathscr{L}(\psi)$

Damit ist $\mathscr{L}$ invariant unter V.

A:
$\psi' = e^{-i\gamma^5\alpha_a \frac{r^a}{2}}\psi = e^{-iv\gamma^5}\psi.$
$(\psi')^\dagger\gamma^0 = e^{iv\gamma^5}\psi^\dagger\gamma^0 = (1 + iv\gamma^5 - \frac{v^2}{2}\underbrace{(\gamma^5)^2}_{\mathbb{1}} - \frac{iv^3}{3!}\underbrace{(\gamma^5)^3}_{\gamma^5} + ...)\gamma^0\psi$
mit $\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^5$ gilt durch die Reihendarstellung:
$\underbrace{(...)}_{gerade\ exp.}\ \mathbb{1}\gamma^0 + \underbrace{(...)}_{ungerade\ k}\ \gamma^5\gamma^0 = \gamma^0(...) - \gamma^0(...)\gamma^5$
Also $e^{iv\gamma^5}\psi^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 e^{-iv\gamma^5}\psi^\dagger$

Für $\mathscr{L}$ gilt hier: $\gamma^\mu\partial_\mu$ ergibt wie bei Vertauschung mit γ^0 ein negatives Vorzeichen im Exponenten, da $\{\gamma^k, \gamma^5\} = 0$
$\Rightarrow \mathscr{L}(\psi') = (\psi')^\dagger\gamma^0(i\gamma\mu\partial_\mu - m)\psi'$
$= e^{iv\gamma^5}\psi^\dagger\gamma^0(i\gamma\mu\partial_\mu - m)e^{-iv\gamma^5}\psi$
$= \psi^\dagger\gamma^0(i\gamma\mu\partial_\mu e^{-(-iv\gamma^5)} - me^{-iv\gamma^5})e^{-iv}\psi$
$= \psi^\dagger\gamma^0(i\gamma\mu\partial_\mu - me^{-2iv\gamma^5})\psi = \mathscr{L}(\psi)$

Also ist $\mathscr{L}$ wegen m nicht invariant unter A