

Analysis 4

Skript zur Vorlesung von Lani-Wayda (2011)

Mitgeschrieben und geL^AT_EXt von Julian Bergmann

Inhaltsverzeichnis

1	Anschluss an Ana II, Lebesgue-Integral	1
1.1	Satz: Eigenschaften Lebesgue-Integral	1
1.2	Bemerkung: Max/Min	1
1.3	Definition: Fundamentalfolge	1
1.4	Definition: Lebesguesche Nullmenge	1
1.5	Satz: Vereinigung v. Nullmengen	2
1.6	Folgerung: \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^n sind Nullmengen	2
1.7	Lemma: Konvergenz von Folgen	2
1.8	Definition/Bemerkung: Funktionen in \mathcal{L}^+	2
1.9	Bemerkung: Eigenschaften des Integrals auf \mathcal{L}^+	2
1.10	Bemerkung: fast überall $f=g$	2
1.11	Definition/Bemerkung: Lebesgue-integrierbare Funktionen	3
1.12	Satz: $\int f$ zulässig	3
1.13	Bemerkung: auch andere \mathcal{L} möglich	3
1.14	Bemerkung	3
1.15	Bemerkung/Definition: Seminorm $\ \cdot\ _1$	3
1.16	Satz: C_c^0 dicht	3
1.17	Bemerkung: Nullmengen irrelevant	3
2	Integrierbare Fu'n und Mengen	4
2.1	Definition: triviale Fortsetzung & Maß/Volumen	4
2.2	Folgerung: Maß-Rechenmethoden	4
2.3	Bemerkung: Ex. von C_c^0 -Folgen	4
2.4	Satz: triviale Forts. in \mathcal{L}^1	4
2.5	Bemerkung: triv. Fortsetzung & Lebesgue/Riemann-Integral	4
3	Satz von Fubini und Trans.-Formel	5
3.1	Lemma: Nullmengenteile	5
3.2	Satz: Fubini	5
3.3	Lemma: Abbildungen v. Nullmengen	5
3.4	Satz: Transformationsformel	5
4	Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral	6
4.1	Satz v.d. monotonen Konvergenz, Satz von Beppo Levo für \mathcal{L}^+	6
4.2	Bemerkung: Eig'n Lebesgue-Integrierbark'	6
4.3	Satz v.d. monotonen Konvergenz (Satz von Beppo Levi)	6
4.4	Bemerkung: Grenzwerte (& 4.3 auch f. fallende (u))	6
4.5	Satz: Lemma von Fatou	6

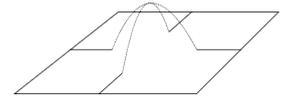
4.6	Bemerkung: Symmetrische Variante des Lemmas von Fatou	7
4.7	Satz von der majorisierten Konvergenz: Lebesguescher Konvergenzsatz	7
4.8	Folgerung: Vergleichssatz	7
4.9	stetige Abh'keit des Integrals vom Parameter	7
4.10	Satz: Diff.bare Abh'keit des Integrals vom Parameter	7
5	Messbare Fu'n und Mengen	7
5.1	Definition: Lebesgue-Messbarkeit	8
5.2	Definition: σ -Algebra und Eigenschaften	8
5.3	Def/Satz: Messbarkeit	8
5.4	Folgerung: mbark. stetiger Fu'n	9
5.5	Bemerkung: Möglichk'n im mbaren Vraum	9
5.6	Messbarkeit und Integrierbarkeit	9
5.7	Satz: mbark' pw. Limes	9
5.8	Satz: Lebesgue-mbar	9
5.9	Satz: Lebesgue-mbaren Fu'n auf σ -Algebra	9
5.10	Satz: Lebesgue-Maß additiv	9
5.11	Folgerung: Vereinigung/Durchschnitt mbarer Mengen	10
5.12	Bemerkung: Maß/Nullmenge/intbark.	10
5.13	Satz: Nullm.-Äquivalenz	10
5.14	Satz: Tonelli, auch: Fubini-Tonelli	10
6	Ausblick auf L^p-Räume	10
6.1	Definition: \mathcal{L}^p	10
6.2	Bemerkung: $f = 0 \Leftrightarrow \int f ^p = 0$	11
6.3	Definition/Bemerkung: $\text{esssup}()$ und \mathcal{L}^∞	11
6.4	Lemma: Cauchy-Folge und Seminorm	11
6.5	Satz: Fischer-Riesz	11
6.6	Satz: Fischer-Riesz in der Theorie der Fourierreihen	12
7	Faltung und Glättung	12
7.1	Def/Satz: Faltung	12
7.2	Satz: „ δ -Scharen“	13
7.3	Definition: Funktionenfamilie und Glättungsschar	13
7.4	Satz: Glättung	13
7.5	Folgerung: Dichtheit	14
8	Fouriertransformation	14
8.1	Def/Bemerkung: Fourtransformierte wohld.&st.	14
8.2	Folgerung: Abb. linear&st.	14
8.3	Satz: Eig'n v. $f \mapsto \hat{f}$	14
8.4	Schwartz-Raum der schnell fallenden Fu'n	15
8.5	Folgerung:	15
8.6	Folgerung	15
8.7	Satz: Riemann-Lebesgue	15
8.8	Satz: Fourier-Umkehrformel	15

8.9	Folgerung	15
8.10	Bemerkung	16
8.11	Satz: Plancherel	16
9	Riemann-, uneigentliches Riemann- und Lebesgue-Integral	16
9.1	Satz	16
9.2	Satz	16
9.3	Bemerkung	16
9.4	Satz: Lebesgueaches Integralibitatskriterium	17
10	Fourier-Reihen	17
10.1	Definition/Bemerkung	17
10.2	Folgerung	17
10.3	Bemerkung	18
10.4	Bemerkung	18
10.5	Definition	18
10.6	Satz	18
10.7	Bemerkung	18
10.8	Bemerkung	19
10.9	Satz	19
10.10	Satz	19
11	Beispiele zu einfacher PDE	19
	Allgemeine Situation	19
	Beispiel	19
	Fragen	20
	Beispiel	20
	Konvergenzeigenschaften	20
11.1	Satz	20
11.2	Satz	21
	11.2.1 Varianten möglich	21
	11.2.2 Beispiele	21
11.3	Bemerkung	24
12	DGLn 2.Ordn, Orth. bzgl. Gewichtsfu	24
12.1	Bemerkung	25
12.2	Beispiele zu Gleichungen der Form $(py')' - qy + \lambda py = 0$	25
13	Sobolev Räume	25
13.1	Bemerkung	25
13.2	Definition: schwache oder Distributions-Ableitung	25
13.3	Bemerkung	25
13.4	Definition: Sobolev-Räume	26
13.5	Dirichlet-Prinzip	26
13.6	Bemerkung	26

13.7 Bemerkung	26
Sololev'scher Einbettungssatz	26
Satz von Meyers und Serrim	26
14 Weierstraß'sches Approximations-Satz	27
14.1 Definition	27
14.2 Lemma	27
14.3 Satz von Stone-Weierstaß	27
14.4 Korollar: Weierstraß'scher Approximationssatz	28
15 (Prä-)Hilberträume	28
15.1 Erinnerung	28
15.2 Bemerkung	28
15.3 Bemerkung	29
15.4 Definition: orthogonalität	29
15.5 Satz von Pythagoras	29
15.6 Bemerkung	29
15.7 Riesz'sches Lemma	29
15.8 Folgerung: Projektionssatz	29
15.9 Folgerung	30
15.10 Definition/Bemerkung	30
15.11 Definition: Dualraum	30
15.12 Satz von Fréchy-Riesz / Riesz'scher Darstellungssatz	30
15.13 Definition	31
15.14 Bemerkung	31
15.15 Definition/Bemerkung	31
15.16 Definition	31
15.17 Bemerkung/Definition	31
15.18 Bemerkung/Definition	32
15.19 Definition: Spektrum, Resolvente	32
15.20 Bemerkung	32
15.21 Bemerkung	33
Beweise	35
Stichwortverzeichnis	62

Wiederholung:

Ana II: Integral $\int_Q f$ für Quader Q , $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
 Auch: für $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
 „Integral für vernünftige Mengen“
 \Rightarrow Lebesgue-Integral



1 Anschluss an Ana II, Lebesgue-Integral

$\mathcal{L} := \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (ste. Fu'n mit kp. Träger)

1.1 Satz: Eigenschaften Lebesgue-Integral

Das Integral $\mathcal{L} \ni u \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u$ hat folgende Eigenschaften:

- 1) $u \in \mathcal{L} \Rightarrow |u| \in \mathcal{L}$
- 2) $u, v \in \mathcal{L}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in \mathcal{L}, \int(\alpha u + \beta v) = \alpha \int u + \beta \int v$ (*Linearität*)
- 3) $u \geq 0 \Rightarrow \int u \geq 0$ (*Monotonie*)
- 4) $(u_j) \subset \mathcal{L}, u_j \geq u_{j+1}, u_j \rightarrow 0$ punktweise $\Rightarrow \int u_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

Siehe Beweis 1 (Anhang)

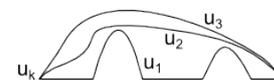
1.2 Bemerkung: Max/Min

$f, g \in \mathcal{L} \Rightarrow \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{L}$,
 $f^+ := \max\{f, 0\}, f^- := -\min\{f, 0\}$ alle in \mathcal{L}
 „positiver Anteil“ von f „negativer Anteil“ von f

Siehe Beweis 2 (Anhang)

1.3 Definition: Fundamentalfolge

$(u_j) \subset \mathcal{L}$ heißt *Fundamentalfolge* (FF)
 $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : u_k \leq u_{k+1}$ und $\sup_{k \in \mathbb{N}} \int u_k < \infty$
 (d.h. $(\int u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist beschr. und damit auch konv.)

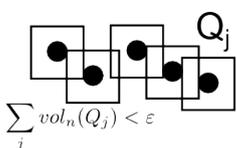


1.4 Definition: Lebesguesche Nullmenge

$N \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Lebesguesche Nullmenge* $\Leftrightarrow \exists (u_j) \subset \mathcal{L}$ FF.,
 sodass $\forall x \in N : u_j(x) \rightarrow \infty$

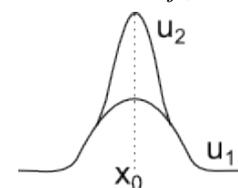
Bem.:

- 1) Später wird gezeigt: $N \subset \mathbb{R}^n$ *Nullmenge* $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ Quader $Q_j (j \in \mathbb{N}) :$



$$\sum_j \text{vol}_n(Q_j) < \varepsilon, N \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$$

- 2) Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen



3) Sprechweise „*fast überall*“ (f.ü.) bedeutet: überall außerhalb einer Nullmenge.

z.B. $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \geq g$ f.ü. $\Leftrightarrow \exists N \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge,

sodass $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N : f(x) \geq g(x)$

Beispiel:

Einpunktige Mengen $\{x_0\}$ sind Nullmengen.

Beweis: Übung.

1.5 Satz: Vereinigung v. Nullmengen

$N_j \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge ($j \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j$ Nullm.

(Abz.bare Vereinigung von Nullmengen ist Nullmenge)

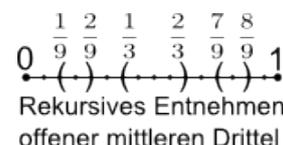
Siehe Beweis 3 (Anhang)

1.6 Folgerung: \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^n sind Nullmengen

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ sind Nullmengen.

Bemerkung: Es ex. auch in \mathbb{R} überabz.bare Nullmengen

z.B. Cantorsches Dikontinuum.



1.7 Lemma: Konvergenz von Folgen

$(u_j) \in \mathcal{L}, u_j \geq u_{j+1} \geq \dots \geq 0$ ($j \in \mathbb{N}$)

$u_j \rightarrow 0$ f.ü. $\Rightarrow \int u_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

Siehe Beweis 4 (Anhang)

1.8 Definition/Bemerkung: Funktionen in \mathcal{L}^+

Def.: $u \in \mathcal{L}^+ \Leftrightarrow \exists FF (u_j), u_j \rightarrow u$ f.ü.

Dann setzt man $\int u := \lim_{j \rightarrow \infty} \int u_j$

Dieser Wert ist unabhängig von der FF. (u_j) mit $u_j \rightarrow u$ f.ü. Es ist $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^+$

Siehe Beweis 5 (Anhang)

1.9 Bemerkung: Eigenschaften des Integrals auf \mathcal{L}^+

Seien $f, g \in \mathcal{L}^+, \alpha, \beta \geq 0$

a) $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ beide in $\mathcal{L}^+, f^+ := \max\{f, 0\} \in \mathcal{L}^+$

b) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^+, \Rightarrow \int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g$

c) $f \leq g$ f.ü. $\Rightarrow \int f \leq \int g$

Siehe Beweis 6 (Anhang)

1.10 Bemerkung: fast überall $f=g$

$f \in \mathcal{L}^+, g = f$ f.ü. $\Rightarrow g \in \mathcal{L}^+, \int g = \int f$

Siehe Beweis 7 (Anhang)

1.11 Definition/Bemerkung: Lebesgue-integrierbare Funktionen

$$\mathcal{L}^1 := \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f, g \in \mathcal{L}^+ : u = f - g\} \text{ (kurz: } \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^+ - \mathcal{L}^+)$$

Für $u \in \mathcal{L}^1$, $u = f - g$ setze $\int u := \int f - \int g$

(Wertunabh. von der Wahl von f, g mit $u = f - g$)

Siehe Beweis 8 (Anhang)

1.12 Satz: $\int f$ zulässig

Das Integral $L^1 \ni f \mapsto \int f$ erfüllt (1)-(4) aus 1.1

Siehe Beweis 9 (Anhang)

1.13 Bemerkung: auch andere \mathcal{L} möglich

Formal gleicher Aufbau, auch mit anderen „ \mathcal{L} “ als Anfangsklasse möglich, wenn (1)-(4) erfüllt sind.

z.B. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{L} := \{f \in C_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \text{supp}(f) \subset \Omega\}$ führt zu $\int_{\Omega} f$, $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$

$\underbrace{R[a, b]}_{\text{Rieman-int.bare Fu'n}} \ni h, \mathcal{L} := R[a, b] \ni f \mapsto \int_a^b f(x)h(x)dx$ gemischtes Integral,
entsteht *Riemann-Stieltjes-Integral*

1.14 Bemerkung

Zusammenhang zum Integral „über vernünftige Mengen“ aus AnaII noch unklar.

1.15 Bemerkung/Definition: Seminorm $\|\cdot\|_1$

Durch $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} f$ wird auf L^1 eine *Seminorm* definiert.

„Seminorm“ Bedeutet: Alle Eig'n einer Norm, außer $\underbrace{\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0}_{\text{gilt nicht}}$

Beweis: Leicht.

1.16 Satz: C_c^0 dicht

$C_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1$ ist dicht bzgl. $\|\cdot\|_1$, d.h.:

$$\forall f \in \mathcal{L}^1 \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{f} \in C_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \|\tilde{f} - f\|_1 < \varepsilon$$

Siehe Beweis 10 (Anhang)

1.17 Bemerkung: Nullmengen irrelevant

$$f \in \mathcal{L}^1, g = f \text{ f.ü.} \Rightarrow g \in \mathcal{L}^1, \int g = \int f$$

Siehe Beweis 11 (Anhang)

2 Integrierbare Fu'n und Mengen

2.1 Definition: triviale Fortsetzung & Maß/Volumen

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beliebig, f mindestens auf Ω def., reellwertig.

$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ (kurz: " $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ", „ f über Ω int.bar“)

\Leftrightarrow Die **triviale Fortsetzung** $\tilde{f}, \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in \Omega \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ ist in $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

b) Sei $\mathbb{1}_\Omega(x) := \begin{cases} 1 & , x \in \Omega \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

Ω heißt int.bar $\Leftrightarrow \mathbb{1}_\Omega \in \mathcal{L}^1$

$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_\Omega$ heißt dann **Volumen (Maß)** von Ω , in Zeichen: $\mu(\Omega)$

Genauer: n-dim. **Lebesgue-Maß**

2.2 Folgerung: Maß-Rechenmethoden

$M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ int.bar $\Rightarrow M_1 \cup M_2, M_1 \cap M_2, M_1 \setminus M_2$ int.bar, und

$$\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2) - \mu(M_1 \cap M_2)$$

$$\mu(M_1 \setminus M_2) = \mu(M_1) - \mu(M_1 \cap M_2)$$

Siehe Beweis 12 (Anhang)

2.3 Bemerkung: Ex. von C_c^0 -Folgen

a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ex. $(f_j) \subset C_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

mit $\forall j \in \mathbb{N} : f_j \leq f_{j+1}, \text{supp}(f_j) \subset U$

$$f_j \rightarrow \mathbb{1}_U(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

b) Falls U beschr., so (f_j) FF., $\Rightarrow U$ int.bar.

Siehe Beweis 13 (Anhang)

2.4 Satz: triviale Forts. in \mathcal{L}^1

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kp., $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann f über K int.bar.,

d.h. triviale Forts. $\tilde{f}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in K \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ ist in \mathcal{L}^1

Siehe Beweis 14 (Anhang)

2.5 Bemerkung: triv. Fortsetzung & Lebesgue/Riemann-Integral

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ st., $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die triv. Forts. Dann $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\text{und } \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}}_{\text{Lebesg.}} = R - \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{Riemann}}$$

Siehe Beweis 15 (Anhang)

3 Satz von Fubini und Trans.-Formel

Erinnerung

Für $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ st. ist

$\int_{a_1}^{b_1} (\int_{a_2}^{b_2} (\dots (\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n) \dots) dx_2) dx_1$ unabh. von Reihenfolge der Integrationen

Mit Def. des Integrals für $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$ folgt damit:

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} \varphi(x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} (\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x, y) dx) dy$$

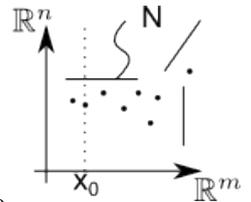
3.1 Lemma: Nullmengenteile

Sei $N \subset \mathbb{R}^{n+m}$ Nullmenge.

Dann: Für f.a. $x \in \mathbb{R}^m$: $N_x := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in N\} \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge.

Entsprechend: Für f.a. $y \in \mathbb{R}^n$: $N_y := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in N\} \subset \mathbb{R}^m$ Nullmenge.

Siehe Beweis 16 (Anhang)



3.2 Satz: Fubini

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \Rightarrow \begin{cases} \text{Für f.a. } x \in \mathbb{R}^m : f(x, *) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \\ \text{Für f.a. } y \in \mathbb{R}^n : f(*, y) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m) \end{cases}$$

$$\text{und } \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^m} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx) dy$$

nur für \mathbb{R}^m f.a. x definiert, spielt aber keine Rolle, wegen 1.16.

Existenz von $\int_{\mathbb{R}^m} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy) dx$ (ist auch Teil d. Beh.)

Siehe Beweis 17 (Anhang)

Bemerkung:

Aus Fubini folgt, dass das Integral für „vernünftige Mengen“ aus Ana 2 mit dem hier def. \mathcal{L}^1 -Integral übereinstimmt (in \mathcal{L}^1 -Integral enthalten ist).

Ziel: Transformationsformel

3.3 Lemma: Abbildungen v. Nullmengen

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \rightarrow V$ \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus und $N \subset V$ Nullmenge.

Dann $\varphi^{-1}(N)$ auch Nullmenge.

Siehe Beweis 18 (Anhang)

3.4 Satz: Transformationsformel

Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \rightarrow V$ \mathcal{C}^1 Diffeom. und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(V, \mathbb{R}) \Leftrightarrow U \ni x \mapsto f(\varphi(x)) \cdot |\det(D\varphi(x))| \in \mathbb{R} \in \mathcal{L}^1(U, \mathbb{R})$

und wenn beides gilt, so ist $\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |\det(D\varphi(x))| dx$

Siehe Beweis 19 (Anhang)

4 Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral

4.1 Satz v.d. monotonen Konvergenz, Satz von Beppo Levi für \mathcal{L}^+

Sei $(u_j) \subset \mathcal{L}^1$ monoton wachsend und $(\int u_j)$ beschr.
 Dann ex. $u \in \mathcal{L}^1$ mit $u_j \rightarrow u$ f.ü. und $\int u = \lim_{j \rightarrow \infty} \int u_j$
 Siehe Beweis 20 (Anhang)

4.2 Bemerkung: Eig'n Lebesgue-Integrierbar'.

Sei $u \in \mathcal{L}^1$. Dann $\forall \varepsilon \exists v, w \in \mathcal{L}^+, u = v - w$ f.ü., $w \geq 0$ f.ü., $\int w \leq \varepsilon$
 Siehe Beweis 21 (Anhang)

4.3 Satz v.d. monotonen Konvergenz (Satz von Beppo Levi)

Sei $(u_j) \subset \mathcal{L}^1$ f.ü. wachsend. $(\int u_j)$ beschr.
 Dann ex. $u \in \mathcal{L}^1$, $u_j \rightarrow u$ f.ü., $\int u_j \rightarrow \int u$.
 Siehe Beweis 22 (Anhang)

4.4 Bemerkung: Grenzwerte (& 4.3 auch f. fallende (u))

- a) Satz 4.3 gilt auch für f.ü. fallende Folgen (u_j) und $(\int u_j)$ beschr.
 b) Falls in der Sit. von 4.3 schon eine Grenzf. u^* bekannt ist mit $u_j \rightarrow u^*$, so folgt $\underbrace{u}_{\text{Beppo-Levi}} = u^*$ f.ü. und $\int u^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \int u_j$

Siehe Beweis 23 (Anhang)

Beispiel:

Falls $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ≥ 0 und $(\int_{-n}^n f(x)dx)$, $n \in \mathbb{N}$ beschr., so gilt:

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x)dx$$

Siehe Beweis 24 (Anhang)

4.5 Satz: Lemma von Fatou

Sei $(u_j) \subset \mathcal{L}^1$, $(\int u_j)$ nach oben beschr. und es gebe $f \in \mathcal{L}^1$ mit $\forall j \in \mathbb{N} : f \leq u_j$
 Dann $\underline{\lim}(u_j) \in \mathcal{L}^1$ und $\int \underline{\lim}(u_j) \leq \underline{\lim}(\int u_j)$

Beispiel:

$$u_j := \mathbb{1}_{[j, j+1]}, \quad u_j \geq 0, \quad \underline{\lim}(u_j) = 0, \quad \forall j : \int u_j = 1, \quad \underline{\lim}(\int u_j) = 1$$

Siehe Beweis 25 (Anhang)



4.6 Bemerkung: Symmetrische Variante des Lemmas von Fatou

Sei $(u_j) \subset \mathcal{L}^1$, $(\int u_j)$ nach unten beschr. und es gebe $f \in \mathcal{L}^1$ mit $\forall j \in \mathbb{N} : u_j \leq f$ f.ü.

Dann $\overline{\lim}(u_j) \in \mathcal{L}^1$

Siehe Beweis 26 (Anhang)

4.7 Satz von der majorisierten Konvergenz: Lebesguescher Konvergenzatz

Sei $(u_j) \subset \mathcal{L}^1$ und u_j f.ü. konv gegen eine Grenfu u .

Es gebe ein $f \in \mathcal{L}^1$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : |u_j| \leq f$. („*Integrable Majorante*“)

Dann $u \in \mathcal{L}^1$ und $\int u_j \rightarrow \int u$. (d.h. $\lim_{j \rightarrow \infty} \int u_j = \int \lim_{j \rightarrow \infty} u_j$)

Siehe Beweis 27 (Anhang)

4.8 Folgerung: Vergleichssatz

Sei $(u_j) \subset \mathcal{L}^1$, $u_j \rightarrow u$ f.ü. und es gebe $f \in \mathcal{L}^1$ mit $|u| \leq f$ f.ü.

Dann $u \in \mathcal{L}^1$.

Siehe Beweis 28 (Anhang)

4.9 stetige Abh'keit des Integrals vom Parameter

Sei $\Lambda \in \mathbb{R}^p$, $f : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda^* \in \Lambda$. Es gelte:

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x, *)$ stetig bei λ^*
- 2) $\forall \lambda \in \Lambda : f(*, \lambda) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
- 3) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \forall \lambda \in \Lambda : |f(*, \lambda)| \leq g$

Dann ist die Abb. $\Lambda \ni \lambda \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x, \lambda) dx \in \mathbb{R}$ stetig bei λ^*

4.10 Satz: Diff.bare Abh'keit des Integrals vom Parameter

Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}$ offen und $f : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ und es gelte:

- 1) $\partial_2 f$ ex. auf $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ (d.h. f part. d.bar. nach $\lambda \in \Lambda$)
- 2) $\forall \lambda \in \Lambda : f(*, \lambda) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
- 3) $\exists g \in \mathcal{L}^1 : \forall (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda : |\partial_2 f(x, \lambda)| \leq g(x)$

Dann ist die Abb. $\Lambda \ni \lambda \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x, \lambda) dx \in \mathbb{R}$ d.bar.,

für $\lambda_0 \in \Lambda$ ist $\partial_2 f(*, \lambda_0) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

und $\frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x, \lambda) dx \right] = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_2 f(x, \lambda_0) dx$

5 Messbare Fu'n und Mengen

Das Integral ist immer das bisher konstruierte auf $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

„ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ “ wird so verstanden, dass f evtl. nur auf $\mathbb{R}^n \setminus N$ def. ist, wobei $N \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge.

5.1 Definition: Lebesgue-Messbarkeit

$M \subset \mathbb{R}$ heißt *Lebesgue-messbar* $\Leftrightarrow \forall R > 0 : \mathbb{1}_M \times \mathbb{1}_{B(0,R)} \in \mathcal{L}^1$

5.2 Definition: σ -Algebra und Eigenschaften

Eine σ -Algebra \mathcal{A} in \mathbb{R}^n ist eine Kollektion von Teilmengen von \mathbb{R}^n (Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$) mit folgenden Eigenschaften:

- a) $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$
- b) $M \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus M \in \mathcal{A}$
- c) $M_j \in \mathcal{A}$ für alle $j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j \in \mathcal{A}$

Bemerkung: Dann auch $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} M_j \in \mathcal{A}$, falls alle $M_j \in \mathcal{A}$

Erinnerung: τ Topologie auf X:

- a) $\emptyset, X \in \tau$
- b) $u_j \in X, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} u_i \in X$
- c) $u_1, \dots, u_n \in X \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n u_i \in X$

Erinnerung:

$\mathcal{B}_n^* := \sigma$ -Algebra der Borel-Mengen in \mathbb{R}^n
 $= \left\{ \begin{array}{l} \text{offene Mengen} \\ \text{abg. Mengen} \\ \text{off./abg. Quadern} \end{array} \right\}$ erzeugte σ -Algebra.

Darauf ex. eindeutiges Maß μ^*

mit $\mu^*([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = (b_n - a_n) \cdot \dots \cdot (b_1 - a_1)$

Lebesgue-Borelsches Maß folgt aus Maß-Fortsetzungssatz von Carathéodory

$\lambda(M) = \int \mathbb{1}_M$, falls ex. Zusammenhang zwischen λ (*Lebesgue-Maß*) und

μ^* : Falls $A \subset \mathbb{R}^n$ *Lebesgue-Nullm.* und $B \subset A$, so B Lebesgue-Nullm.

Gilt nicht für μ^* (μ^* „*nicht vollständig*“)

Ansonsten $\lambda = \mu^*$ auf B^*

In diesem Sinn: λ *Vervollständigung* von μ^*

5.3 Def/Satz: Messbarkeit

Eine Fu. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *messbar* (in Zeichen: $f \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$), falls folgende äquiv. Eig'n erfüllt sind:

- (i) f ist f.ü. punktweise limes von Treppenu'n in der Art
 $\sum_{j=1}^k \alpha_j^{(l)} \mathbb{1}_{Q_j^{(l)}}$, $\alpha^{(l)} \in \mathbb{R}$, $Q_j^{(l)}$ Quader in \mathbb{R}^n
- (ii) $\dots \mathcal{C}_c^0$ -Fu'n
- (iii) $\forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}((-\infty, a]) \subset \mathbb{R}^n$ λ -messbar
- (iv) $\forall A \in \mathcal{B}_1^* : f^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^n$ λ -messbar

Genauer: f ist $\lambda - \mathcal{B}_1^*$ -messbar.

5.4 Folgerung: mbark. stetiger Fu'n

Stetige Fu'n sind messbar.

Siehe Beweis 29 (Anhang)

5.5 Bemerkung: Möglichk'n im mbaren Vraum

\mathcal{M} ist \mathbb{R} -Vraum und für $f, g \in \mathcal{M}$ sind

$f \cdot g$, $|f|$, $\min\{g\}$ und, falls $g \neq 0$ f.ü. auch $\frac{1}{g}$

Siehe Beweis 30 (Anhang)

5.6 Messbarkeit und Integrierbarkeit

Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- $f \in \mathcal{L}^1$
- f messbar und $|f| \in \mathcal{L}^1$
- f messbar und $\exists g \in \mathcal{L}^1$, $|f| \leq g$

Siehe Beweis 31 (Anhang)

5.7 Satz: mbark' pw. Limes

$(f_j) \subset \mathcal{M}$, $f_j \rightarrow f$ f.ü. $\Rightarrow f \in \mathcal{M}$

(Punktweise limes mbarer Fu'n (f.ü.) ist mbar.)

Siehe Beweis 32 (Anhang)

5.8 Satz: Lebesgue-mbar

$M \subset \mathbb{R}^n$ (*Lebesgue-*)mbar. $\Leftrightarrow \mathbb{1}_M$ messbar.

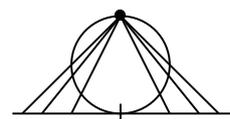
Siehe Beweis 33 (Anhang)

5.9 Satz: Lebesgue-mbaren Fu'n auf σ -Algebra

Die Lebesgue-mbaren Mengen in \mathbb{R}^n bilden eine σ -Algebra.

Siehe Beweis 34 (Anhang)

Lebesgue-Maß: für $M \subset \mathbb{R}^n$ mbar: $\lambda(M) := \begin{cases} \mathbb{1}_M & , \text{ falls } M \text{ intbar} \\ \infty & , \text{ sonst} \end{cases}$



5.10 Satz: Lebesgue-Maß additiv

Das Lebesgue-Maß ist σ -additiv,

d.h. für mbare und bis auf Nullmengen disjunkte Mengen M_j ($j \in \mathbb{N}$) gilt:

$$\lambda \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(M_j)$$

Siehe Beweis 35 (Anhang)

5.11 Folgerung: Vereinigung/Durchschnitt mbarer Mengen

Sei M_j mbar ($j \in \mathbb{N}$)

$$a) \forall j \in \mathbb{N} : M_j \subset M_{j+1} \Rightarrow \lambda\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j\right) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \lambda(M_j) \quad (\in (0, \infty))$$

$$b) \forall j \in \mathbb{N} : M_j \supset M_{j+1}, \lambda(M_1) < \infty \Rightarrow \lambda\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} M_j\right) = \inf_{j \in \mathbb{N}} \lambda(M_j) \quad (\in [0, \infty))$$

Siehe Beweis 36 (Anhang)

5.12 Bemerkung: Maß/Nullmenge/intbar.

$M \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge $\Leftrightarrow M$ int.bar, $\lambda(M) = 0$

Siehe Beweis 37 (Anhang)

5.13 Satz: Nullm.-Äquivalenz

Für $M \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

a) M ist Lebesgue-Nullmenge gemäß FF-Def.

b) M mbar (intbar), $\lambda(M) = 0$

c) $\forall \varepsilon > 0 \exists U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset U_\varepsilon$, $\lambda(U_\varepsilon) < \varepsilon$

d) $\forall \varepsilon > 0 \exists \text{Quader}(Q_l)_{l \in \mathbb{N}}$, $M \subset \bigcup_{l \in \mathbb{N}} Q_l$, $\sum_{l \in \mathbb{N}} \lambda(Q_l) < \varepsilon$

Siehe Beweis 38 (Anhang)

5.14 Satz: Tonelli, auch: Fubini-Tonelli

Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ mbar.

Dann sind äquivalent:

a) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$

b) $\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)| dx \right) dy$ ex.

c) $\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dy \right) dx$ ex.

Falls a)-c) äquivalent erfüllt, so gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy \right) dx$$

entsprechend für $|f|$. (Satz v. Fubini)

Siehe Beweis 39 (Anhang)

6 Ausblick auf L^p -Räume

6.1 Definition: \mathcal{L}^p

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, μ *Lebesgue-Maß* auf \mathbb{R}^n .

- a) Man setzt $\mathcal{L}^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid |f|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega)\}$ für $1 \leq p < \infty$
 und $\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ Dies def. eine Seminorm auf $\mathcal{L}^p(\Omega)$
 (möglich: $\|f\|_p = 0, f \neq 0$)
 Nicht trivial: Dreiecksungleichung, beruht auf Hölder- bzw. Minkowski-Ungl.
- b) Sei weiter $\mathcal{N} := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f = 0 \text{ f.ü.}\} \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$
 Und $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega) \setminus \mathcal{N}$. Elemente von $L^p(\Omega)$ sind also Funktionsklassen \underline{f} ,
 wobei
 $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ und $\underline{f} = \{g \in \mathcal{L}^p(\Omega) \mid g - f \in \mathcal{N}\} = \{g \in \mathcal{L}^p(\Omega) \mid g = f \text{ f.ü.}\}$
 Die Verknüpfung $\underline{f} + \underline{g} := f + g, \lambda \underline{f} = \lambda f$ sind wohldef.
 Weiter auch $\|\underline{f}\|_p := \|f\|_p$ wohldef. und ist eine Norm auf $L^p(\Omega)$
 Also $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ norm. Raum.
 Häufig: Keine strenge Unterscheidung zwischen $\mathcal{L}^p(\Omega)$ und $L^p(\Omega)$, kein Strich
 unter f , Schreibweise „ $f \in L^p(\Omega)$ “
 Benutzt wurde 6.2

6.2 Bemerkung: $f = 0 \Leftrightarrow \int |f|^p = 0$

$\forall f \in \mathcal{L}^p(\Omega) : \int_{\Omega} |f|^p = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ f.ü.}$
 Siehe Beweis 40 (Anhang)

6.3 Definition/Bemerkung: $\text{esssup}()$ und \mathcal{L}^{∞}

$\mathcal{L}^{\infty}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mbar und } \exists C \in \mathbb{R} : |f| \leq C \text{ f.ü.}\}$
 Für $f \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$ setze $\|f\|_{\infty} := \text{ess sup}(f) := \inf\{c \in \mathbb{R} \mid |f| \leq c \text{ f.ü.}\}$
 Es gilt $|f| \leq \|f\|_{\infty}$ f.ü. für $f \in \mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$
 Siehe Beweis 41 (Anhang)

6.4 Lemma: Cauchy-Folge und Seminorm

Sei $p \in [1, \infty]$ und $(f_j) \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$ Cauchy-Folge bzgl. der $\|\cdot\|_p$ -Seminorm

- Dann ex. ein $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ mit $\|f_j - f\|_p \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$
- Im Fall $p \in [1, \infty)$ ex. eine Teilfolge $(f_{\varphi(j)}) \subset (f_j)$ mit $f_{\varphi(j)} \rightarrow f$ f.ü.
- Im Fall $p = \infty$ gilt $f_j \rightarrow f$ glm. ausserh. einer Nullmenge

Siehe Beweis 42 (Anhang)

6.5 Satz: Fischer-Riesz

Für $p \in [1, \infty]$ ist $L^p(\Omega)$ vollständig, also ein Banachraum.

Siehe Beweis 43 (Anhang)

Für Quantenmechanik speziell wichtig:

$L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ bzw. $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$

Mit (Semi-)Norm $\|f\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\right)^{1/2}$, wird erzeugt von Skpr.

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} \bar{f} \cdot g,$$

(L^2, \langle, \rangle) ist Hilbertraum (Vektorr. m. Skpr, mit erz. Norm vollst.)

Für Wellenfu'n $\Psi(t, x) : \int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(t, x)|^2 dx = 1.$

Mehr: Reed/Simon - Modern Methods of Math. Physics

Bemerkung:

Sei H *separabler Hilbertraum* (d.h. es ex. abz'bare dichte Teilmenge).

1) Dann ex. „*ONB*“ (Orthonormalbasis), $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$

$$\text{mit } \forall x \in H : x = \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle u_n, x \rangle u_n}_{\text{verall. Fourier-Reihe}}$$

(zu verstehe als $\| \sum_{n=1}^N \langle u_n, x \rangle u_n - x \|_2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$)

$$2) \|x\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle u_n, x \rangle|^2$$

Man hat also Abb.

$$\iota : H \ni x \mapsto (\langle u_n, x \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 = \{(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_j |a_j|^2 < \infty\}$$

die isometrisch ist.

6.6 Satz: Fischer-Riesz in der Theorie der Fourierreihen

ι ist surjektiv, also Isom.

Also: jeder Separ. Hilbertraum isomorph zu ℓ^2

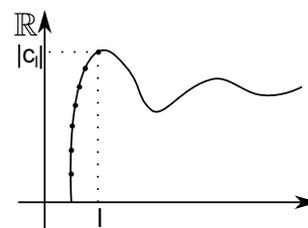
Die jeweilige Basis (u_n) ist dem quantenmechanischen Problem angepasst (Eigenfu'n d. Hamolton-Operators, Drehimpuls-Operator etc.)

Beispiel: Kugelflächenfu'n $(Y_{l,m}(\theta, \varphi)) \in \mathcal{L}^2(S^2, \mathbb{C})$ Oberflächenintegral S^2 Einheitssphäre in \mathbb{R}^3)

Kosmische Hintergrundstrahlung:

Intensität $\sigma(\theta, \varphi)$, Entwicklung nach den $Y_{l,m}$,

Mittelung über $\varphi : \bar{\sigma}(\theta) \sim \sum c_l \eta_l(\theta)$



7 Faltung und Glättung

7.1 Def/Satz: Faltung

Sei $f, g \in \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$

Dann ex. $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ für f.a. x

Die dadurch def. Fu $f * g$ ist in \mathcal{L}^1

$$a) \int f * g = (\int f) \cdot (\int g)$$

$$b) \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

$$c) f * g = g * f \text{ f.ü.}$$

$$d) \text{Die Faltung von } \mathcal{L}^1 \times \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{L}^1 : (f, g) \mapsto f * g \text{ ist bilinear}$$

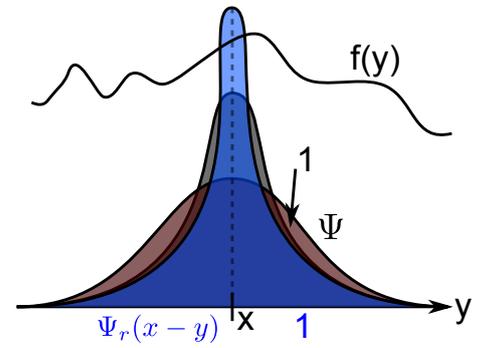
Siehe Beweis 44 (Anhang)

7.2 Satz: „ δ -Scharen“

Sei $\Psi \in \mathcal{L}^1, \int \Psi = 1$
 $\Psi_r(x) := \frac{1}{r^n} \Psi(\frac{x}{r}), r > 0$
 Dann $\forall r > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_r(x) dx = 1$
 Dann gilt auch:

a) $\forall f \in \mathcal{L}^1 : \|\Psi_r * f - f\|_1 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$

b) $\forall f \in BC^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ (beschr. & st.): $\underbrace{\Psi_r * f}_{\substack{\text{entspr. zu lesen} \\ \text{sogar für alle x def.}}} \rightarrow f$ pw. überall.



Die Ψ_r bilden „ δ -Schar“, speziell $(\Psi_r * f)(0) \rightarrow f(0)$

Physik: $\int \Psi_r(x - y)f(y)dy, \int \delta(x - y)f(y)dy = f(x)$

Siehe Beweis 45 (Anhang)

Bemerkung:

Faltung geht auch für $f \in \mathcal{L}^1, g \in \mathcal{L}^p, \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$

7.3 Definition: Funktionenfamilie und Glättungsschar

Sei $j \in BC^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1$ mit $\int j = 1$ und so dass

$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \partial^\alpha j = (\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n})j \in BC^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

(Ableitungen aller Ordnungenbeschr.)

Dann heißt die **Funktionenfamilie** $\{j_r\}_{r>0}$,

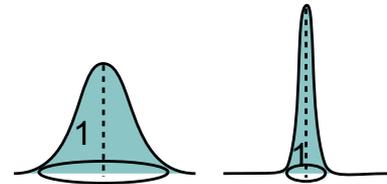
$j_r(x) := \frac{1}{r^n} j(\frac{x}{r})$ die von j erzeugte „**Glättungsschar**“.

Beispiel:

1. Friedrichsche Glättung: $\tilde{j}(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|_2^2}}, & \|x\|_2 < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$j(x) := \frac{\tilde{j}(x)}{\int \tilde{j}(x) dx}, (j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \text{supp}(j) = \overline{B_{\|\cdot\|_2}(0, 1)})$

2. $j(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\|x\|_2^2/2}$ (Gauß-Glocke)



7.4 Satz: Glättung

Sei $\{j_r\}_{r>0}$ **Glättungsschar** zu j un für $f \in \mathcal{L}^1, r > 0$.

Sei $J_r f := j_r * f$, also $(J_r f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} j_r(x - y)f(y)dy$ sogar für alle x. Dann

a) $J_r : \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{L}^1, f \mapsto J_r f$ ist linear und stetig (bzgl $\|\cdot\|_1$)

$(L^1 \rightarrow L^1, f \mapsto J_r f)$

Also $J_r \in L_c L^1, L^1) (\|J_r f\|_1 \leq \|j_r\|_1 \cdot \|f\|_1)$

b) $J_r f \in C^\infty$

c) $\|J_r f - f\|_1 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$

Siehe Beweis 46 (Anhang)

Bemerkung:

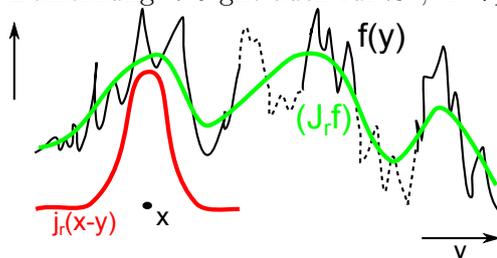
Falls $j \in \mathcal{C}_c^\infty$ (z.B. Friedrichsche Glättungsschar)
 so gilt für $f \in \mathcal{L}^p$ ($1 \leq p < \infty$): $\|J_r f - f\|_p \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$

7.5 Folgerung: Dichtheit

$\mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{L}^1$ ist dicht bezgl. $\|\cdot\|_1$

Siehe Beweis 47 (Anhang)

Bemerkung: 7.5 gilt auch für \mathcal{L}^p , $1 < p < \infty$, nicht für $p = \infty$



8 Fouriertransformation

8.1 Def/Bemerkung: Fourtransformierte wohldef.&st.

Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ist die **Fourtransformierte** \hat{f} def. durch:

$$\hat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \omega, x \rangle} f(x) dx \quad (\omega \in \mathbb{R}^n)$$

a) \hat{f} ist wohldef., stetig und beschr. Es gilt $\|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \|f\|_1$

b) Es gilt im Allg. nicht: $\hat{f} \in \mathcal{L}^1$

Siehe Beweis 48 (Anhang)

Fourier-Reihen: $f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{H}} c_k e^{ikx}$

8.2 Folgerung: Abb. linear&st.

Sei $BC^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) := \{g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid g \text{ st, beschr.}\}$ mit der sup-Norm $\|\cdot\|_\infty$

Die Abb. $(\mathcal{L}^1, \|\cdot\|_1) \ni \underline{f} \mapsto \hat{f} \in (BC^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ ist linear und st.

8.3 Satz: Eig'n v. $f \mapsto \hat{f}$

Seien $f, g \in \mathcal{L}^1$

a) $\forall a \in \mathbb{R}^n : \widehat{f(*-a)}(\omega) = e^{-i\langle \omega, a \rangle} \hat{f}(\omega)$

b) $\widehat{f * g}(\omega) = \sqrt{2\pi}^n \cdot \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$

c) Falls $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$ und $\partial_j f$ ex.
 und $\partial_j f \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{L}^1$ für ein $j \in \{0, \dots, n\}$, so gilt:
 $\widehat{\partial_j f}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega) \quad (\omega \in \mathbb{R}^n)$

d) Falls $x \mapsto x_j \cdot f(x) \in \mathcal{L}^1$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$, so ex. $\partial_j \hat{f}$ ist st. und
 $\widehat{x_j \cdot f} = i \cdot \partial_j \hat{f}$

$$e) \hat{f}g \in \mathcal{L}^1, \quad \int \hat{f}g = \int f\hat{g}$$

Siehe Beweis 49 (Anhang)

8.4 Schwartz-Raum der schnell fallenden Fu'n

Sei $\mathcal{S} := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \text{ (Multiind.)} : |x^\beta \cdot \partial^\alpha f(x)| \text{ beschr. als Fu. von } x\}$
(Hier: $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$)

Beispiel:

- a) $f(x) := e^{-\|x\|_2^2}$ oder $f(x) := p(x)e^{-\|x\|_2^2}$ Polynomfunktion in n Variabeln.
b) $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

8.5 Folgerung:

- a) $\forall f \in \mathcal{S} \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : x^\alpha \cdot f \in \mathcal{S}, \partial^\alpha f \in \mathcal{S}$
b) $\forall p \in [1, \infty) : \mathcal{S} \subset \mathcal{L}^p$ Unterraum
c) $\forall f \in \mathcal{S} : \hat{f} \in \mathcal{C}^\infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \partial^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|} x^\alpha \cdot \widehat{f(*)}$
d) $\forall f \in \mathcal{S} \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n : \widehat{\partial^\alpha f}(\omega) = (i\omega)^\alpha \hat{f}(\omega)$

Siehe Beweis 50 (Anhang)

8.6 Folgerung

$$f \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}$$

Siehe Beweis 51 (Anhang)

8.7 Satz: Riemann-Lebesgue

$$\forall x \in \mathcal{L}^1 : |\hat{f}(\omega)| \xrightarrow{\|\omega\| \rightarrow \infty} 0$$

Siehe Beweis 52 (Anhang)

Notation:

$$\text{Für } f \in \mathcal{L}^1 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n \text{ sei } \check{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int e^{i\langle \omega, x \rangle} f(\omega) d\omega$$

8.8 Satz: Fourier-Umkehrformel

Sei $f \in \mathcal{L}^1$, so dass auch $\hat{f} \in \mathcal{L}^1$

Dann $f = (\hat{f})^\vee$ f.ü., und $f = (\hat{f})^\vee$ falls f stetig.

Siehe Beweis 53 (Anhang)

8.9 Folgerung

Die Abb. $\mathcal{F}_\mathcal{S} : \mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}, f \mapsto \hat{f}$ ist ein Isom. mit Inverser $f \mapsto \check{f}$.

Siehe Beweis 54 (Anhang)

8.10 Bemerkung

$$\forall f \in \mathcal{S} (\subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})) : \|f\|_2 = \|\mathcal{F}_S(f)\|_2$$

Siehe Beweis 55 (Anhang)

8.11 Satz: Plancherel

- a) \mathcal{F}_S hat eindeutige Fortsetzung $\mathcal{F} : \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2$ (modulo Nullm).
 und \mathcal{F} ist *unitär* (Isom. bzgl. $\|\cdot\|_2$) und Isom. in L^2
- b) $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^2, \mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1 \Rightarrow \mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^2$
 Für $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ ist $\mathcal{F}f = \hat{f}, \mathcal{F}^{-1}f = \check{f}$ f.ü.

Siehe Beweis 56 (Anhang)

9 Riemann-, uneigentliches Riemann- und Lebesgue-Integral

Notation:

$R[a, b]$: Riemann-intb. Fu'n auf $[a, b]$

UR: Uneigentlich-Riemann-intb. Fu'n auf \mathbb{R}

\tilde{f} : triviale Fortsetzung von f auf ganz \mathbb{R} (durch 0)

$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, Schreibweise: $R - \int, UR - \int, \mathcal{L} - \int$

9.1 Satz

$$f \in R[a, b] \Rightarrow \tilde{f} \in \mathcal{L}^1, R - \int_a^b f(x)dx = \mathcal{L} - \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}$$

Siehe Beweis 57 (Anhang)

9.2 Satz

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und für alle $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ sei $f|_{[a,b]} \in R[a, b]$

Dann $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \Leftrightarrow |f| \in UR$

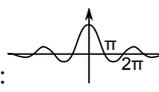
Falls beide Seiten der Äqu. erfüllt, sind, so gilt auch $f \in \mathcal{L}^1, f \in UR$, und $\mathcal{L} - \int f = UR - \int f$

Siehe Beweis 58 (Anhang) Bemerkung: Analog für UR auf $[0, \infty), [0, 1)$ etc.

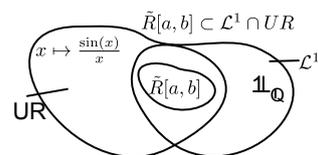
9.3 Bemerkung

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \not\Rightarrow f \in UR$$

Gegenbeispiel zu „ \Rightarrow “: Setze $f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, dann auch für $a, b \in \mathbb{R}, a < b : f|_{[a,b]} \notin R[a, b]$

Gegenbeispiel zu „ \Leftarrow “: $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$:  $f \in UR, |f| \notin UR$

Nicht $|f| \in \mathcal{L}^1$ nach 9.2, also auch nicht $f \in \mathcal{L}^1$



9.4 Satz: Lebesgueaches Integralibitatskriterium

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann

$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$ ist beschr. und f.ü. stetig, (d.h. es ex. Nullmenge $N \subset [a, b]$, sodass

$\forall x \in [a, b] \setminus N : f$ stetig bei x)

10 Fourier-Reihen

Grundidee: $f(x) = \sum_k c_k \cdot e^{ikx}$

(Darstellung (Approx.) von Fu'n durch trigonometr. Polynome/Reihen)

Besonders geeignet falls f 2π -periodisch

Grund für dieses Fu'system: e^{ikx} bzw. $\cos(kx)$, $\sin(kx)$ sind Eigenfu'n

$\frac{\partial}{\partial x}$ bzw. $(\frac{\partial}{\partial x})^2$ z.B. $(\frac{\partial}{\partial x})^2(\cos(kx)) = -k^2 \cos(kx)$, $(\frac{\partial}{\partial x})^2(e^{ikx}) = -k^2 e^{ikx}$

10.1 Definition/Bemerkung

a) $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ ist mit dem unitären Produkt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)dx$$

ein unitärer Raum (Existenz des Integrals nicht trivial!)

Entspr. $\mathcal{L}^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ Semi-normierter Raum mit Skpr.

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)dx$$

Unterscheide manchmal nicht zwischen \mathcal{L}^2 und L^2

b) Die $\varphi_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$ bilden ein **ONS** (Orthonormalsystem) in $\mathcal{L}^2 := \mathcal{L}^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$

c) Für $f \in \mathcal{L}^2$ und $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$\hat{f}_k := \langle \varphi_k, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx \quad (\text{k-ter Fourierkoeffizient von } f)$$

Falls f reellwertig, so $\forall k \in \mathbb{Z} : \hat{f}_{-k} = \overline{\hat{f}_k}$

Siehe Beweis 59 (Anhang)

10.2 Folgerung

Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $F_k := \text{span}_{\mathbb{C}}\{\varphi_j \mid |j| \leq k\} = \left\{ \sum_{j=-k}^k c_j \varphi_j \mid c_j \in \mathbb{C}, j = -k, \dots, k \right\}$

a) $\dim_{\mathbb{C}} F_k = 2k + 1$

b) $\mathcal{L}^2 = F_k \oplus \underbrace{F_k^\perp}_{\text{unendl. dim.}} \Leftrightarrow$ orthog. Komplement

c) Die **orthog. Projektion**

$pr_k : \mathcal{L}^2 \rightarrow F_k$ auf F_k ist geg. durch

$$pr_k f = \sum_{j=-k}^k \langle \varphi_j, f \rangle \cdot \varphi_j = \sum_{j=-k}^k \hat{f}_j \varphi_j$$

$$\forall f \in \mathcal{L}^2 : \|f\|_2^2 = \|pr_k f\|_2^2 + \|f - pr_k f\|_2^2$$

$$\text{d) } \forall f \in \mathcal{L}^2 : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \text{ konv.,}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|_2^2 \text{ (Besselsche Ungleichung)}$$

Siehe Beweis 60 (Anhang)

10.3 Bemerkung

Die Aussagen 10.2a)-d) gelten für jedes ONS $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ in \mathcal{L}^2 , z.B. auch für $\psi_j := \varphi_{2j}$

10.4 Bemerkung

Für $f \in \mathcal{L}^2$ und ein ONS $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ und die entspr. $pr_k f$ ($k \in \mathbb{N}_0$) wie in 10.2 gilt:

$$\|pr_k f - f\|_2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \underbrace{\|pr_k f\|_2^2}_{k \rightarrow \infty} \rightarrow \|f\|_2^2$$

$$= \sum_{j=-k}^k |\hat{f}_j|^2$$

Mit \hat{f}_j Fourier-Koeff. bzgl. $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$

Beweis klar nach 10.2d)

10.5 Definition

Sei $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ein ONS.

$\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ heißt *vollständiges ONS* oder *ONB (Orthonormalbasis)* oder *Hilbert-Basis*

$$\Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{L}^2 : \underbrace{\|pr_k f - f\|_2}_{\text{zu } \{\psi_j\}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Gleichbedeutend: } \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_j|^2 = \|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

10.6 Satz

Für ein ONS $\{\psi_j\}_{j \in J}$ sind äquiv. (J: abz. unendliche Indexmenge):

i) $\{\psi_j\}_{j \in J}$ ist vollständig

ii) $\overline{\text{span}\{\psi_j\}_{j \in J}} = \mathcal{L}^2$ (Abschluss bzgl. $\|\cdot\|_2$)

(Erinnerung: $\text{span}\{\psi_j\}_{j \in J} = \left\{ \sum_{j \in I} c_j \psi_j \mid I \subset J \text{ endlich} \right\}$)

iii) $f \in \mathcal{L}^2, \forall j \in J : \langle \psi_j, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ (Im Sinne von \mathcal{L}^2 , also $f = 0$ f.ü.)

iv) $\forall f \in \mathcal{L}^2 : \|f\|_2^2 = \sum_{j \in I} |\hat{f}_j|^2, \quad \hat{f}_j := \langle \psi_j, f \rangle$ (*Parsevalsche Gleichung*)

Siehe Beweis 61 (Anhang)

Betr. jetzt wieder $\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

10.7 Bemerkung

Sei $f \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{C}), f(0) = f(2\pi)$

Dann $\forall k \in \mathbb{Z} : \widehat{(f')} = ik \hat{f}_k$

(Differentiation wirkt „aufrauend“, Integration „glättend“)

Siehe Beweis 62 (Anhang)

10.8 Bemerkung

Seien $[a, b] \subset [0, 2\pi]$, $a < b$ und $f := \mathbb{1}_{[a,b]}$

Dann gilt für f die Parsevalsche Gleichung: $\|f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2$

Siehe Beweis 63 (Anhang)

10.9 Satz

Die $\varphi_k (k \in \mathbb{Z})$ bilden ein vollständiges ONS (in $\mathcal{L}^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$)

Siehe Beweis 64 (Anhang)

10.10 Satz

Sei $f \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{C})$, $f(0) = f(2\pi)$

Dann $\|pr_k f - f\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$

Siehe Beweis 65 (Anhang)

11 Beispiele zur Lösung einfacher PDE (partielle DGL) durch Fourier-Ansatz

Allgemeine Situation:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
- *Differentialoperator* L (z.B. $L = \Delta$, *Laplace-Operator*)
- PDE, etwa $Lu = 0$, $u_t = Lu$, $u_{tt} = Lu$
in Ω bzw. in $(0, \infty) \times \Omega$ bzw. $\mathbb{R} \times \Omega$
+ *Randbedingungen* (z.B. $u(t, x) = 0 \quad \forall t > 0, x \in \partial\Omega$)
- *Hilbert-Basis* $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von $L^2(\Omega)$ aus Eigenfu' von L .
(Inklusive Randbed. R , $L = L_R$)

Beispiel:

$$\Omega = [0, 2\pi]^2,$$

$$\varphi_{mn} := \frac{2}{\pi} \sin(mx) \sin(ny), \quad \varphi_{mn}|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\Delta \varphi_{mn} = -(m^2 + n^2) \varphi_{mn},$$

φ_{mn} sind Eigenfu'n von Δ_D (*Dirichlet-Laplace-Op*) auf Ω

Lösungsansatz für PDE in der Form $u(t, x) = \sum_k \underbrace{\alpha_k(t)}_{\text{zeitabh.}} \varphi_k(x)$

$$\text{bzw. } u_k(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(x)$$

Ergibt notw. Bed'n für die α_k

Im zeitabh. Fall: *Entkoppeltes System* von der *ODE (gew. DGL)* für die α_k .

Bei nichtlinearen Gleichungen: Nichtlineare, gekoppelte DGL für die α_k ,
unendlich viele k .

Abschneidung führt auf ODE. (z.B. Lorenz-System)

Lösung des PDE als Fourierreihe (mit zeitabh. Koeffiz.)

Fragen:

- Konvergenz in \mathcal{L} ?
- Konvergenz gegen stetig differenzierbare \mathcal{C}^k -Fu?
- typisch: Majorisierung von $\sum \alpha_k(t)\varphi_k(x)$, $\sum \dot{\alpha}_k(t)\varphi_k(x)$, $\sum \alpha_k(t)\varphi'_k(x)$ etc. durch konvergente Zahlenreihen

Beispiel:

für (zunächst formale) Lösung der **Wärmeleitungsgleichung**:

$$u_t = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in [0, \pi],$$

$$u(0, x) = f(x) := \sin(x) + 2\sin(3x), \quad x \in [0, \pi].$$

$$\text{Randbedingung: } U(t, 0) = U(t, \pi) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$\text{Ansatz: } u(t, x) = \alpha_1(t) \sin(x) + \alpha_3(t) \sin(3x)$$

$$\text{Anfangsbed.} \Rightarrow \alpha(0) = 1, \quad \alpha_3(0) = 2$$

$$\text{Einsetzen in PDE: } \dot{\alpha}_1(t) \sin(x) + \dot{\alpha}_3(t) \sin(3x) = -\alpha_1(t) \sin(x) - 9\alpha_3(t) \sin(3x) \quad (f(x) = \sum c_k e^{ikx}, \quad \varphi_k(x) := e^{ikx}, \quad c_k = \langle \varphi_k, f \rangle)$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } \dot{\alpha}_1(t) = -\alpha_1(t), \quad \dot{\alpha}_3(t) = -9\alpha_3(t)$$

$$\text{Lösung: } \alpha_1(t) = e^{-t}, \quad \alpha_3(t) = 2e^{-9t}$$

$$\text{(Formale) Lösung des PDE: } u(t, x) = e^{-t} \sin(x) + 2e^{-9t} \sin(3x)$$

(diese u ist \mathcal{C}^∞ , löst das **Anfangs-Randwert-Problem**)

Allgemeiner:

$$\text{„Anfangswert“ } u(0, x) = f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \sin(kx) \in \mathcal{L}^2([0, \pi], \mathbb{R}), \quad (b_k) \in l^2$$

Ansatz $u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \sin(kx)$ führt zur formalen Lösung:

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

Konvergenzeigenschaften:

Konvergenzeigenschaften hängen von (b_k) ab. Man kann zeigen:

u ist \mathcal{C}^∞ auf $(0, \infty) \times [0, \pi]$.

Konvergenz der Reihe in $t = 0$, Stetigkeit von u bei $t = 0$ abhängig von (b_k) , erfüllt falls $\sum |b_k| < \infty$.

Um Konvergenz der zunächst formalen Reihen und deren Ableitungen nach t, x zu untersuchen, ist hilfreich:

11.1 Satz

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. (auch abg. Quader, Kugeln etc. möglich), $k \in \mathbb{N}_0$

und $(u_j) \subset \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$, $u_j \rightarrow u^*$ lokal glm. in M .

lokal glm: zu jedem Pkt. $x_0 \in M$ ex. Umg. von x_0 in M , auf der die Konv. glm. ist.

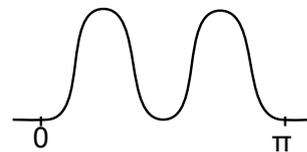
a) Dann u^* stetig

b) Falls für alle Multiindizes α , $|\alpha| \leq k$:

$(\partial^\alpha u_j)$ lokal glm. konv. in M , so gilt:

$$u^* \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}),$$

$$\partial^\alpha u^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \partial^\alpha u_j \quad \text{für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| < k$$



Siehe Beweis 66 (Anhang)

Um Satz 11.1 zum Nachweis von *Glattheitseigenschaften* formaler Lösungen $u(t, x) = \sum_k \alpha_k(t) \varphi_k(x)$, braucht man Majoranten für die Reihen $\sum_k \dot{\alpha}_k(t) \varphi_k(x)$, $\sum_k \alpha_k(t) \varphi_k'(x)$ etc. Diese Reihen enthalten die Fourier-Koeffizienten des „Anfangswertes“. $u(0, x) = f(x) = \sum_k \alpha_k(0) \varphi_k(x)$.

11.2 Satz

Sei $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, $f \underset{\text{mit } \mathcal{L}^2}{=} \sum_k c_k \varphi_k$, $\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Dann gilt: $\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^r \text{ für ein } r \geq 1 \\ \text{und } f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi), \\ j = 0, 1, \dots, r-1 \end{array} \right\} \Rightarrow |c_k| \leq \frac{\|f^{(r)}\|_\infty}{|k|^r} \sqrt{2\pi}, \quad |c_0| \leq \|f\|_\infty$

Siehe Beweis 67 (Anhang)

11.2.1 Varianten möglich

Falls z.B. f eine reine „*Sinus-Entwicklung*“ hat,

$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \sin(kx)$ auf $[0, \pi]$, dann

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \underbrace{\left[-\frac{1}{k} \cos(kx) f(x) \right]_0^\pi}_{=0, \text{ da } f(0)=f(\pi)=0} + \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos(kx) f'(x) dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{k} \left\{ \underbrace{\left[\frac{1}{k} \sin(kx) f'(x) \right]_0^\pi}_{=0, \text{ auch bei } f'(0) \neq f'(\pi)} - \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kx) f''(x) dx \right\} = \dots \end{aligned}$$

$$|b_k| \leq \frac{2}{\pi |k|^r} \|f^{(r)}\|_\infty,$$

falls alle gerade Ableitungen $f^{(j)}$, $j \in 2\mathbb{N}_0$ bei 0 und π verschwinden, $j \in \{0, 1, \dots, r-1\} \cap 2\mathbb{N}_0$.

11.2.2 Beispiele

(1) $u_{tt} = u_{xx}$ auf $[0, 2\pi]$ (lin. Näherung d. Gl. d. *schwingender Saite*)

$$\begin{cases} u(0, x) = f(x) \\ u_t(0, x) = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sum c_k \varphi_k(x), \quad (\text{z.B. } \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx})$$

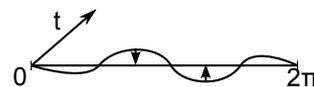
$$\text{Ansatz: } u(t, x) = \sum_k \alpha_k(t) \varphi_k(x) \text{ führt auf } \sum_k \alpha_k \varphi_k(x) = \sum_k \alpha_k(t) (-k^2) \varphi_k(x),$$

$$\alpha_k''(t) = -k^2 \alpha_k(t), \quad d_k(0) = c_k, \quad \alpha_k'(0) = 0$$

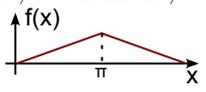
$$\text{Lösung: } \alpha_k(t) = c_k \cos(kt)$$

$$\text{Formale Lösung: } u(t, x) = \sum_k \alpha_k \cos(kt) \varphi_k(x) \quad (*)$$

Bemerkung:



Die „Einspannbedingung“ $u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ wird hier nicht unbedingt erfüllt, auch nicht, wenn $f(0) = f(2\pi) = 0$.



Für f der Form (vgl. Übung)

ergibt sich Lösung:

$$u(t, x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \cos((2k+1)t) \cos((2k+1)x) \quad (1)$$

Andere Entwicklung: $f(2x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \sin(kx) \quad (x \in [0, \pi])$, also $f(x) =$

$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \sin(\frac{kx}{2})$ führt auf formale Lsg.

$$\tilde{u}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\frac{k}{2}t) \sigma_k \sin(\frac{kx}{2}) \quad (2)$$

(diese erfüllt auch die Einspannungsbedingung $\tilde{u}(t, 0) = \tilde{u}(t, 2\pi) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$)

Sowohl (1) wie auch (2) definieren st. Fu'n

(Majorante: $\sum \frac{4}{(2k+1)^2\pi}$ für (1), bei (2) ähnlich)

$$u(t, 0) = u(t, 2\pi) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \cos((2k+1)t) = f(t)$$

$$\tilde{u}(t, 0) = \tilde{u}(t, 2\pi) = 0$$

u, \tilde{u} verschieden, beide „Lösungen“.

Veranschaulichung in $C^0([0, 2\pi], \mathbb{R}) := X$

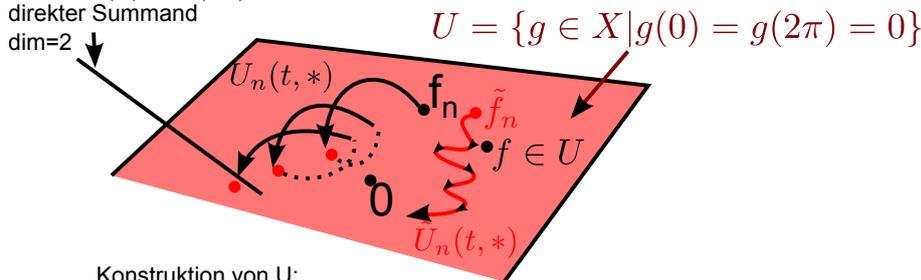
$U := \{g \in X \mid g(0) = g(2\pi) = 0\}$ (Unterraum der Kodim. 2)

direkter Summand wird z.B. aufgespannt von den Fu'n 1, x oder

von $\cos(x), \cos(2x)$

direkter Summand

dim=2



Konstruktion von U:

Approx. von f durch Partialsummen f_n , die **nicht** in U liegen.

$t \mapsto U_n(t, *) \in X$ verlaufen **nicht** in U

Konstruktion von: \tilde{U}

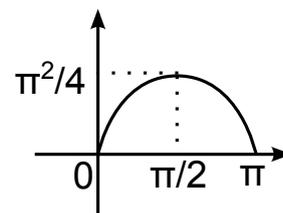
Approx. ... \tilde{f}_n , die in U liegen, "Lösungskurven" verlaufen in U .

Man sieht: Fourier-Entwicklung sollte Orthogonalsystem von Fu'n benutzen, die eventuelle Randbed. erfüllen.

(Genauer Fu'raum, in dem das Anfangs-RWP betrachtet wird, ist wichtig.)

$$(2) \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \\ (x \in [0, \pi], t \in \mathbb{R}) \\ u(0, x) = f(x) := x(\pi - x) \\ u_t(0, x) = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$



$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) f(x) dx$$

$$\text{Also } f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2l+1)^3} \sin((2l+1)x) = \begin{cases} 0 & , k = 2l \\ \frac{4}{k^3} & , k = 2l + 1, l \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Formale Lösung: } u(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2l+1)^3} \cos((2l+1)t) \sin((2l+1)x)$$

$$u \text{ ist } \mathcal{C}^1 \text{ (Majorante: } \sim \sum \frac{1}{(2l+1)^2}$$

$$\text{Kann nicht } \mathcal{C}^2 \text{ sein: } u(t, 0) = 0 \forall t \text{ impliziert } u_{tt}(t, 0) = u_{xx}(t, 0) = 0 \forall t$$

$$u_{xx}(0, 0) = f''(0) = -2$$

3) $u_t = u_{xx}, \quad u(0, x) = f(x), \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$

$$u(t, x) = \alpha_k(t) \sin(kx)$$

$$\text{DGL für die Fourierkoeff.: } \begin{cases} \dot{\alpha}_k(t) = -k^2 \alpha_k(t), \\ \alpha_k(0) = \begin{cases} 0 & , k = 2l \\ \frac{4}{k^3} & , k = 2l + 1, l \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Formale Lösung: } u(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2l+1)^3} e^{-(2l+1)^2 t} \sin((2l+1)x)$$

$$u \text{ ist } \mathcal{C}^\infty \text{ auf } (0, \infty) \times [0, \pi]:$$

$$\text{(folgt daraus, dass } \sum_l (2l+1)^j e^{-(2l+1)^2 t} \text{ konv. für } j \in \mathbb{N}_0, t > 0)$$

$$u \text{ ist stetig auf } [0, \infty) \times [0, \pi]:$$

$$\text{(folgt daraus, dass } \sum_l \frac{1}{(2l+1)^3} \text{ konv.)}$$

$$u \text{ erfüllt nicht DGL bei } t = 0:$$

$$\text{Wäre } u_t(0, 0) = 0 \text{ wegen Randed., } u_{xx}(0) = f''(0) = -2$$

4) $\Delta u = 0$ in $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$u(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = f(\varphi), \quad f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(0) = f(2\pi)$$

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)$$

$$u \text{ Lösg. } \Leftrightarrow v(r, \varphi) := u(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) : \begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} = 0 \quad (\Delta \text{ in Polar-Koord.}) \\ v(1, \varphi) = f(\varphi) \end{cases}$$

$$\text{Formale Lösung: } v(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi))$$

$$\left. \begin{aligned} v_{rr} &= \sum k(k-1)r^{k-2}(\dots), \\ \frac{1}{r} v_r &= \sum k \cdot r^{k-2}(\dots), \\ \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} &= \sum (-k^2)r^{k-2}(\dots) \end{aligned} \right\} \Sigma = 0$$

$$v \text{ ist in } BC^\infty \text{ (Alle Reihen der Form } \sum_{k=1}^{\infty} k^j r^k, \quad j \in \mathbb{N}_0 \text{ konv., falls } r < 1).$$

(Stetigkeit, Dbarkeit am Rand hängt von f ab und vom Abfallverhalten der a_k, b_k)

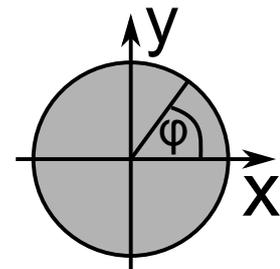
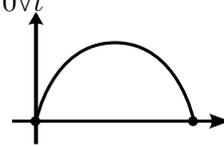
5) **Schwingende Membran**

$$\begin{cases} U_h = \Delta u \text{ in } \Omega = [0, \pi]^2 \\ u \text{ auf } \partial\Omega, \quad u(0, x, y) = f(x, y) \\ u_t(0, x, y) = 0, \quad \forall x, y \in \Omega \end{cases}$$

$$\varphi_{mn}(x, y) = \sin(mx) \sin(ny)$$

(Eigenfu'n von Δ_D auf Ω , Ewert $-(m^2 + n^2)$)

$$\text{Entwicklung von } f : \quad f(x, y) = \sum_{m,n} c_{mn} \sin(mx) \sin(ny),$$



$$c_{mn} := 4\pi^2 \int_0^\pi \int_0^\pi f(x) \sin(mx) \sin(ny) dx dy$$

Formale Lösung: $u(t, x) = \sum_{m,n} c_{mn} \cos(\sqrt{m^2 + n^2}t) \sin(mx) \sin(ny)$

Konvergenz, Glattheit abhängig von c_{mn} und damit von f .

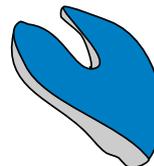
6) Für **Bodensee**:

Numerische Eigenfu' φ_j , EW λ_j (von Δ)

Lösungen: $\sum c_j \cos(\sqrt{|\lambda_j|}t) \varphi_j(x, y, z)$

λ_j : Oszillatorfrequenz, eine davon hat Periode ≈ 15 min.

(entspr. dem „Konstanzer Wasserwunder“ (ca 1400))



11.3 Bemerkung

Fourier-Ansatz „funktioniert“ auch mit der Fourier-Transf. analog zur Fourier-Entw.

Beispiel:

Angenommen, u erfüllt auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ die **Wärmeleitungsgl.**

$$u_t = u_{xx}, \quad u(0, x) = u_0(x)$$

$$(\mathcal{F}_{\text{bzgl. } x \text{ var.}}(u_t))(\omega) = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\mathcal{F}u)}_{=:v(t,\omega)}(\omega)$$

$$= (\mathcal{F}(u_{xx}))(\omega) = (i\omega)^2 (\mathcal{F}u)(\omega) = -\omega^2 \underbrace{(\mathcal{F}u)}_{v(t,\omega)}(\omega)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, \omega) = -\omega^2 v(t, \omega) \quad (\text{„Entkopplung“})$$

$$v(0, \omega) = (\mathcal{F}u_0)(\omega) =: v_0(\omega)$$

$$v(t, \omega) = e^{-\omega^2 t} \cdot v_0(\omega)$$

$$\text{Umkehrtransf.: } u(t, x) = (v(t, *)^\vee)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\omega} \underbrace{v_0(\omega)}_{=: \hat{u}_0(\omega)} d\omega = \dots = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy$$

(Bekannter Lösungsansatz)

12 DGLen zweiter Ordnung, Orthog'tät bzgl. Gewichtsfu'

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $p \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $q, \rho \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ (ρ : **Gewichtsfunktion**)

Betr. DGLen der Form

1) $(p, y')' - qy + \lambda \rho y = 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) (auf I) mit homogenen (linearen) Randbed. \mathbb{R}

z.B. $\alpha y + \beta x = 0$ am Rand mit gewissen Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

oder $y(a) = 0$, $y'(b) = 0$, falls $I = [a, b]$ etc.

Ausgeschrieben: $p'(x)y'(x) + p(x)y''(x) - q(x)y(x) + \lambda \rho(x)y(x) = 0$

Definition: $L : \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$

$$Ly := (py')' - qy$$

Dann hat 1) die Form (SL) $\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{1}) : Ly + \gamma \rho y = 0 \\ + \mathbb{R} \end{array} \right.$ (**Sturm-Liouville-Eigenwertproblem**)

- Nicht-triviale Lösungen heißen **Eigenfunktionen** der Randwertaufgabe / von (SL)
- $\lambda \in \mathbb{R}$ zu denen solche ex., heißen **Eigenwerte** von (SL)

12.1 Bemerkung

EFu'n zu verschiedenen EW λ von (SL) sind orthogonal in $\mathcal{L}^2(I, \rho)$, falls \textcircled{R} den Beweis unten richtig machen.

Siehe Beweis 68 (Anhang)

12.2 Beispiele zu Gleichungen der Form $(py)'' - qy + \lambda\rho y = 0$

a) *Hermit-Polynome* H_n sind Lösung der Gleichung

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y'' - e^{-\frac{x^2}{2}} x y' + n e^{-\frac{x^2}{2}} y = 0$$

$$I = \mathbb{R}, \quad q = 0, \quad p = 0 \text{ bei } \pm\infty \quad (\text{vgl. Blatt 9 und 12})$$

b) *Laguerre Polynome* L_n sind Lösung der Gl

$$x y'' + (1 - x) y' + n y = 0$$

$$I = (0, \infty), \quad q = 0, \quad p = 0 \text{ bei } 0, \infty$$

c) *Legendre Polynome* P_n sind Lösung der Gl.

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + (n + 1) n y = 0$$

$$I = [-1, 1], \quad p = 0 \text{ bei } \pm 1 \quad \rho = 1$$

d) *Tschebyscheff Polynome* T_n sind Lösung d. Gl.

$$\sqrt{1 - x^2} y'' - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} y' + \frac{n^2}{\sqrt{1 - x^2}} y = 0$$

$$p = 0 \quad (\pm q) \quad I = (-1, 1)$$

13 Sobolev Räume

13.1 Bemerkung

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$

$$\forall k = 1, \dots, n : \int_{\Omega} (\partial_{x_k} u) \varphi dx = - \int u \partial_{x_k} \varphi dx$$

Allgemeiner: falls $u \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$, α Multiindex, $|\alpha| \leq k$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \underbrace{(\partial^\alpha u)}_{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u (\partial^\alpha \varphi) dx$$

13.2 Definition: schwache oder Distributions-Ableitung

Sei $u \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, $v \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Dann ist v die *schwache Ableitung* nach x_k ($k = 1, \dots, n$)

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \underbrace{v}_{\mathcal{D}_k u, \text{ nicht Standard}} \varphi dx = - \int \mu \partial_{x_k} \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$$

Ist Allgemein α ein Multiindex, so definieren wir $\mathcal{D}^\alpha u = v$, falls

$$\int_{\Omega} v \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \varphi^\alpha dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

13.3 Bemerkung

Die Distributionsableitung $\mathcal{D}u$ ist modulo Nullmengen eindeutig, d.h. erfüllen $v, \tilde{v} \in \mathcal{L}^2$ die Gleichung $\int v \varphi = - \int u \partial_{x_k} \varphi = \int \tilde{v} \varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$

$$\Rightarrow \int (v - \tilde{v})\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty, \text{ da } C_c^\infty \text{ dicht in } \mathcal{L}^2 \Rightarrow \langle v - \tilde{v} | f \rangle = 0 \forall f \in \mathcal{L}^2$$

$$\|v - \tilde{v}\|_2 = 0 \Rightarrow v = \tilde{v} \text{ f.ü.}$$

13.4 Definition: Sobolev-Räume

$$H^k(\Omega) := \{u \in \mathcal{L}^2(\Omega) \mid \forall \alpha \text{ Multiindex mit } |\alpha| \leq k \text{ ex. schw. Abl. } \mathcal{D}^\alpha u \in \mathcal{L}^2\}$$

$$\forall u, v \in H^k : \langle u | v \rangle_{H^k} := \langle u | v \rangle_{\mathcal{L}^2} + \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \langle \mathcal{D}^\alpha u | \mathcal{D}^\alpha v \rangle$$

$$\Rightarrow \|u\|_{H^k} = \sqrt{\langle u | u \rangle_{H^k}} = \sqrt{\|u\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \sum \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{\mathcal{L}^2}^2}$$

Für $k = 1 : H^1 = \{u \in \mathcal{L}^2 \mid \forall k = 1, \dots, n \exists \text{ schwache Abl } \mathcal{D}_k u \in \mathcal{L}^2\}$

$$\langle u | v \rangle_{H^1} = \langle u | v \rangle_{\mathcal{L}^2} + \sum_{k=1}^n \langle \mathcal{D}_k u | \mathcal{D}_k v \rangle_{\mathcal{L}^2}$$

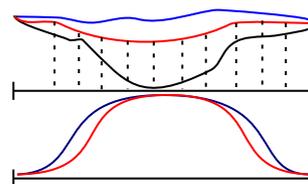
$$\|u\|_{H^1} = \|u\|_{\mathcal{L}^2}^2 + \sum_{k=1}^n \|\mathcal{D}_k u\|_{\mathcal{L}^2}^2$$

Problem: DGLn mit Randwert-Vorgabe:

Problem mit $\partial\Omega$ ist λ -Nullmenge

$$Ln = 0 \wedge u|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\text{Ansatz: } H_0^1 = \overline{C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})}^{H^1(\Omega)}$$



13.5 Dirichlet-Prinzip

$$-\Delta u + g(u) = 0 \text{ in } \Omega \text{ in } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$u \text{ ist kritischer Punkt von } E(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underbrace{(\nabla u)^2}_{\langle \partial u | \partial u \rangle = -\langle u | \partial^2 u \rangle} + G(u) dx$$

$$\int (\nabla u)^2 = - \int u \Delta u$$

(mit $G' = g$)

Suche kritische Punkte: $0 = \frac{d}{d\varepsilon} E(u + \varepsilon\varphi) \text{ in } H_0^1 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$

Bilde $\min_{\gamma} (\min_t (\max_t (E(\gamma(t)))) = c^*$

Dies ist kritischer Wert von E:

$$\text{d.h. } \exists u \in H_0^1 \mid E(u) = c^*, \quad E'(u) > 0$$



13.6 Bemerkung

H^k ist nur spezieller **Sobolev-Raum** (analog \mathcal{L}^2 als Spezialfall des \mathcal{L}^p)

$$\text{Allgemein: } W^{p,k} = \{f \in \mathcal{L}^p \mid \exists \underbrace{\mathcal{D}^\alpha f}_{\text{im schw Sinne}} \in \mathcal{L}^p \quad \forall |\alpha| \leq k\}$$

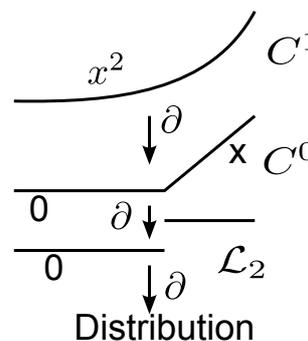
$$\|f\|_{W^{p,k}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\mathcal{D}^\alpha f\|_{\mathcal{L}^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow W^{2,k} = H^k$$

13.7 Bemerkung

a) **Sobolev'scher Einbettungssatz**

$$k > l + \frac{n}{p} \Rightarrow W^{p,k}(\Omega) \subset C^l(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$



b) Satz von Meyers und Serrin:

$$W^{p,k} = \overline{\{u \in C^k \mid \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^p < \infty\}}^{W^{p,k}} = \{u \in C^k \mid \|u\|_{W^{p,k}} < \infty\}$$

Analog: $\mathcal{L}_p = \{u \text{ mb.} \mid \|u\|_p < \infty\}$, $C(\Omega)$ dicht in \mathcal{L}_p

14 Weierstraß'sches Approximations-Satz

14.1 Definition

Sei $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

a) Eine **K-Algebra** A ist ein \mathbb{K} -Vraum mit Multiplikation „ \cdot “, so, dass $(A, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins-Element „ $\mathbb{1}$ “ wird und $\forall \lambda \in \mathbb{K}, f \cdot g \in A : (\lambda f) \cdot g = \lambda(f \cdot g) = f \cdot (\lambda g)$

b) $(A, \|\cdot\|)$ heißt normierte Algebra, falls

- 1) $(A, \|\cdot\|)$ normierter Vraum
- 2) $\|\mathbb{1}\| = \mathbb{1}$
- 3) $\forall f, g \in A : \|f \cdot g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$

Beispiel:

- 1) X Menge $\Rightarrow (B(X, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ ist normierte Algebra.
- 2) $\mathbb{K}^{n \times n}$ mit \mathbb{K} -Algebra mit Matrix-Multiplikation ($|\det(A)| = \|A\|$)
- 3) X kompakter top. Raum $\Rightarrow |C(X, \mathbb{K})|$ ist normierte Algebra, genauer **Subalgebra** von $B(X, \mathbb{K})$

14.2 Lemma

Sei $(B, \|\cdot\|)$ normierte \mathbb{K} -Algebra, $A \subset B$ **Subalgebra**

- a) $\Rightarrow \bar{A} \subset B$ ist ebenfalls Subalgebra
- b) Ist insbesondere $B = B(X, \mathbb{R})$, X Menge, $A \subset B$ abgeschlossene Subalgebra $\Rightarrow \forall f \in A : |f| \in A$

$$\forall f, g \in A : |f| \in A \wedge \underbrace{f \vee g}_{=:\max(f(x), g(x))} \in A \wedge \underbrace{f \wedge g}_{=:\min(f(x), g(x))} \in A$$

Siehe Beweis 69 (Anhang)

14.3 Satz von Stone-Weierstraß

Es sei X kompakter topolog. Raum. Dann ist jede punktsymmetrische Subalgebra $A \subset C(X, \mathbb{R})$ dicht in $C(X, \mathbb{R})$.

Dabei heißt A **punktstrennend** $\Leftrightarrow \forall p, q \in X | p \neq q : \exists f \in A | f(p) \neq f(q)$

Siehe Beweis 70 (Anhang)

Bemerkungen:

- In $\mathbb{C} : A \subset C(X, \mathbb{C})$ dicht, falls $A \subset C(X, \mathbb{C})$ punktetrennend und selbstadjungiert
d.h. $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$

- $\mathbb{R}[x]$ dicht in $\mathcal{L}^2([a, b])$, denn sei $f \in \mathcal{L}^2$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists g \in \mathcal{C}[a, b] \|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{R}[x] \|g - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}$$

$$\Rightarrow \|g - p\|_2 = \sqrt{\int_a^b \underbrace{(g-p)^2}_{\leq \|g-p\|_\infty^2} dx} \leq \sqrt{(b-a) \|g-p\|_\infty^2}$$

$$= \sqrt{b-a} \|g-p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \|f - p\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - p\|_2 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \text{Legendre Polynome } P_l \text{ sind VONS auf } \mathcal{L}^2[-1, 1], \text{ da } \text{span}\{P_l | l \in \mathbb{N}_0\} = \mathbb{R}[x]$$

14.4 Korollar: Weierstraß'scher Approximationssatz

$\mathbb{R}[x]$ ist dicht in $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

Siehe Beweis 71 (Anhang)

Anwendung von Stone-Weierstraß: z.B. Vollständigkeit von Orthogonalsystemen in $\mathcal{L}^2([a, b])$ (z.B.)

vgl. z.B. Achiezer-Glasmann, Theorie der lin. Op. im Hilbertraum

Beispiel:

Legendre-Polynome $P_l(x)$, $l = 0, 1, 2, \dots$

(entstehen durch Orthogonalisierung von $1, x, x^2, x^3, \dots$ bzgl. des Skpr. auf $\mathcal{L}^2([-1, 1], \mathbb{R})$),

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

$$(\tilde{u}_{n+1} := u_{n+1} - \sum_{j=1}^n \langle u_{n+1}, u_j^* \rangle \cdot u_j^*, \quad u_{k+1}^* := \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\|\tilde{u}_{k+1}\|})$$

Siehe Beweis 72 (Anhang)

15 (Prä-)Hilberträume

15.1 Erinnerung

Ein Skalarpr. (*unitäres Pr.*) auf einem \mathbb{R} (\mathbb{C})-VRaum

ist eine *symmetr.*, pos. def. *Bilinearform* $\langle *, * \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$
(hermitische) konjugiert linear im 1. Argument

$v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle$$

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \text{ falls } v \neq 0$$

15.2 Bemerkung

Sei E ein VRaum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (unitäres Produkt) Skpr. auf E

Dann def. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf E und es gilt:

$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ ($x, y \in E$) (*Cauchy-Schwarz-Ungl.*)

$(E, \|\cdot\|)$ heißt dann *Prä-Hilbertraum* und Hilbertraum, falls $(E, \|\cdot\|)$ vollst.

15.3 Bemerkung

Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einen \mathbb{R} oder \mathbb{C} -VRaum E kommt von einem Skpr \langle, \rangle genau dann, wenn die Parallelogrammgl.

$\forall x, y \in E : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ gilt.

Siehe Beweis 73 (Anhang)

Beispiel:

$$1) \mathbb{C}^n, \langle z, \omega \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{z}_j \omega_j$$

$$2) \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C}), \langle f, g \rangle := \int_0^1 \bar{f}(x)g(x)dx$$

Orthogonalität: Sei stets H Prä-Hilbertraum über \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C})

15.4 Definition: orthogonalität

a) $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$

b) Für $\phi \neq M \subset H : M^\perp := \{x \in H \mid \forall m \in M : x \perp m\}$

c) Für $M, N \subset H : M \perp N \Leftrightarrow \forall m \in M \forall n \in N : m \perp n$

15.5 Satz von Pythagoras

$$x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

15.6 Bemerkung

a) $M \perp N \Rightarrow \overline{\text{span}(M)} \perp \overline{\text{span}(N)}$

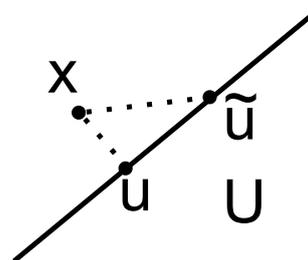
b) M^\perp ist abg. Uraum von H .

Siehe Beweis 74 (Anhang)

15.7 Riesz'sches Lemma

Sei $U \subset H$ vollst. Unterraum, $x \in H$

Dann $\exists_1 u \in U : \|u - x\| = \min_{\tilde{u} \in U} \|\tilde{u} - x\|$



15.8 Folgerung: Projektionssatz

Sei $U \subset H$ Uraum, $x \in H$

Dann $\exists_1 u \in U \exists_1 u^\perp \in U^\perp : x = u + u^\perp$

(Also $H = U \oplus U^\perp$)

Siehe Beweis 75 (Anhang)

15.9 Folgerung

Sei H Hilbertraum:

- Für abg. Unterraum $U \subset H$ ist $(U^\perp)^\perp = U$
- Für $M \subset H$ beliebig: $(M^\perp)^\perp = \overline{\text{span}(M)}$
Insbesondere für den Uraum $U \subset H$: $(U^\perp)^\perp = \overline{U}$

Siehe Beweis 76 (Anhang)

15.10 Definition/Bemerkung

Seien $(E, |\cdot|_E)$, $(F, |\cdot|_F)$ normierte Räume

- $L_c(E, F) := \{T : E \rightarrow F \mid T \text{ linear und stetig}\}$
- Für $T : E \rightarrow F$ linear gilt:
 T stetig $\Leftrightarrow T$ stetig bei $0 \Leftrightarrow \exists c \geq 0 \forall x \in E : |Tx|_F \leq c|x|_E$
 Falls T stetig, so def. man $\|T\| := \sup_{\substack{x \in E \\ |x|_E \leq 1}} (|Tx|_F)$

Es gilt dann:

- $\forall x \in E : |Tx|_F \leq \|T\| \cdot |x|_E$
- $\|\cdot\|$ ist Norm auf $L_c(E, F)$ (die von $|\cdot|_E$ und $|\cdot|_F$ induzierte Norm)
- Falls F vollst. (also Banach), so auch $(L_c(E, F), \|\cdot\|)$

Siehe Beweis 77 (Anhang)

15.11 Definition: Dualraum

Für einen normierten \mathbb{K} -Vraum $(E, |\cdot|_E)$ sei

$$E^* := \{\varphi : E \rightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ linear und stetig}\}$$

also $E^* = L_c(E, \mathbb{K})$. Für $\varphi \in E^*$ ist

$$\|\varphi\|_{E^*} := \sup_{\substack{x \in E \\ |x|_E \leq 1}} |\varphi(x)|.$$

Es ist $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ Banachraum

15.12 Satz von Fréchy-Riesz / Rieszscher Darstellungssatz

Si H Hilbertraum. Dann:

$$\forall \varphi \in H^* \exists_1 x \in H : \varphi = \langle x, * \rangle$$

$$\text{Insbesondere } \|\varphi\|_{H^*} = \|x\|_H \quad (\langle x, x \rangle = \frac{1}{2})$$

Anders ausgedrückt: Die Abb. $L : (H, \|\cdot\|_H) \rightarrow (H^*, \|\cdot\|_{H^*})$
 $x \mapsto \langle x, * \rangle$

ist isometrisch, konjugiert linearer Isomorphismus (vor allem surjektiv)

Beispiel:

$$L^2([0, 2\pi], \mathbb{C}) =: H.$$

$$\forall \varphi \in H^* \exists_1 f \in H :$$

$$\forall g \in H : \varphi(g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

Siehe Beweis 78 (Anhang)

Bemerkung:

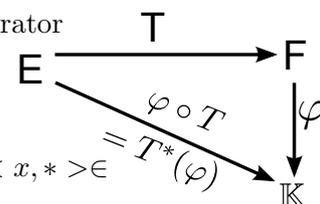
Dualraum zu $L^p \cong L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, falls $1 < p < \infty$

$g \in L^q$ lässt sich identifizieren mit der Abb. $L^p \ni f \mapsto \int \bar{f}(x)g(x)dx$

Hölder-Ungleichung: $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

15.13 Definition

- a) Seien E,F normierte Räume, $T \in L_c(E, F)$. Man def. den dualen Operator $T^* : F^* \rightarrow E^*$ durch $T^* \varphi := \varphi \circ T$

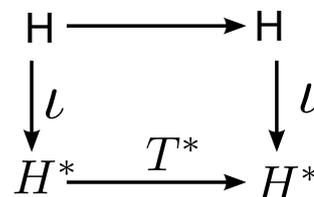


- b) Falls H Hilbertraum, so ex. der konjugiert lineare Isom $\iota : H \ni x \mapsto \langle x, * \rangle \in H^*$

Für $T \in L_c(H, H)$ ist nach a) der duale Operator $T^* : H^* \rightarrow H^*$ def.

Er kann mittels ι auch als Element von $L_c(H, H)$ aufgefasst werden:

$T^\dagger := L^{-1} \circ T^* \circ L$ (zu T *adjungierter Operator*)



15.14 Bemerkung

Für $T \in L_c(H, H)$, T^\dagger wie oben gilt:

$$\forall x, y \in H : \langle x, Ty \rangle = \langle T^\dagger x, y \rangle$$

Siehe Beweis 79 (Anhang)

15.15 Definition/Bemerkung

$T \in L_c(H, H)$ heißt *selbstadjungiert*, falls $T = T^\dagger$ (Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: *hermitisch*)

Typ. Situation allerdings: T nur auf Teilraum von H definiert bzgl. $\|\cdot\|_H$ unstetig.

15.16 Definition

Sei $D(T) \subset H$ Unterraum, $T : D(T) \rightarrow H$ linear (typischerweise unstetig)

T heißt *symmetrisch* $\Leftrightarrow \forall \varphi, \psi \in D(T) : \langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T\varphi, \psi \rangle$

15.17 Bemerkung/Definition

Sei $D(T) \subset H$ dichter Unterraum, H Hilbertraum und

$T : H \supset D(T) \rightarrow H$ linear.

Man def. $D(T^\dagger) := \{x \in H | \exists y \in H : \forall z \in D(T) : \langle x, Tz \rangle = \langle y, z \rangle\}$

Für $x \in D(T^\dagger)$ ist das entspr. y eindeutig; es wird als $T^\dagger(x)$ definiert.

$D(T^\dagger) \subset H$ ist Unterraum und $T^\dagger : D(T^\dagger) \rightarrow H$ ist linear.

Siehe Beweis 80 (Anhang)

15.18 Bemerkung/Definition

Sei T „*dicht definiert*“ in H , d.h. $D(T) \subset H$ dichter Unterraum.

Dann T *symmetrisch* $\Leftrightarrow T \subset T^\dagger$ (als Teilmengen von $H \times H$)

T heißt *selbstadjungiert (hermitisch)*, falls $T = T^\dagger$ $T = \{(x, Tx) \mid x \in D(T)\} \subset H \times H$

Siehe Beweis 81 (Anhang)

Beispiel:

$$T := \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \text{ in } H := L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

$$D(T) := C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ dicht in } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

$\forall \varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $\varphi' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt:

$\forall \psi \in D(T)$, $\text{supp}(\psi) \subset [a, b]$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, T\psi \rangle_{\mathcal{L}^2} &= \int_{\mathbb{R}} \bar{\varphi}(x)(Tx)(x)dx = \int_a^b \bar{\varphi}(x)\left(\frac{\hbar}{i}\right)\psi'(x)dx \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{\hbar}{i} \left(\underbrace{[\bar{\varphi}(x) \cdot \psi(x)]_a^b}_{=0} - \int_a^b \bar{\varphi}'(x)\psi(x)dx \right) = + \int_a^b \frac{\hbar}{i} \overline{\varphi'(x)}\psi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots = \langle \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{L}^2} \end{aligned}$$

Speziell gilt dies für $\varphi \in D(T)$, also T symmetrisch!

Alle φ wie oben sind in $D(T^\dagger)$, also

$$D(T) \subsetneq D(T^\dagger), \quad T \subsetneq T^\dagger$$

Hier: „Randbedingung“ für Funktionen in $D(T)$ C_c^∞ viel stärker als für Fu'n in $D(T^\dagger)$

Problem: Randbed. so zu formulieren, dass $D(T) = D(T^\dagger)$

15.19 Definition: Spektrum, Resolvente

Sei E \mathbb{C} -Banachraum, $D(T) \subset E$ Uraum, $T : D(T) \rightarrow E$ linear.

$$\text{Man def. } \rho(T) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} \lambda - T \text{ ist injektiv} \\ \text{Bild}(\lambda - T) \subset E \text{ ist dicht} \\ (\lambda - T)^{-1} : \text{Bild}(\lambda - T) \Rightarrow D(T) \text{ ist stetig} \end{array} \right. \right\}$$

ist *Resolventenmenge*)

Hierbei „ λ “ für $\lambda \cdot \text{id}_E$

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T) \quad (\text{Spektrum von } T)$$

15.20 Bemerkung

a) Für $\lambda \in \rho(T)$ hat $(\lambda - T)^{-1}$ eine eindeutige st. Fortsetzung auf ganz E , die Resolvente $R(\lambda; T) \in L_c(E, E)$ bezeichnet wird.

Falls schon $\text{Bild}(\lambda - T) = E$

b) $\sigma(T)$ zerfällt in drei Teilmengen:

1) $\{\lambda \mid (\lambda - T) \text{ nicht injektiv}\}$ (*Punktspektrum, Eigenwerte von } T*)

2) $\{\lambda \mid (\lambda - T) \text{ injektiv, } \text{Bild}(\lambda - T) \subset E \text{ dicht, } (\lambda - T)^{-1} \text{ unstetig}\}$ „*kontinuierliches Spektrum*“

3) $\{\lambda \mid (\lambda - T) \text{ injektiv, Bild}(\lambda - T) \text{ nicht dicht}\}$ „*duales Spektrum*“

15.21 Bemerkung

Falls E \mathbb{R} -Banachraum, $T : E \supset D(T) \rightarrow E$ linear:

$E_{\mathbb{C}} := E \times E = \{(x, y) \mid x, y \in E\} = \{x + iy \mid x, y \in E\}$ (*Komplexifizierung*)

ist \mathbb{C} -Vraum ($(a + ib)(x + iy) = ax - by + i(Bx + ay)$)

Mit der Norm $\|(x, y)\|_{E_{\mathbb{C}}} := \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|\cos(\theta)x + \sin(\theta)y\|_E$ wir $(E_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{E_{\mathbb{C}}})$ \mathbb{C} -Banachr.

$\|(x, y)\|_{E_{\mathbb{C}}} \leq \|x\|_E + \|y\|_E \leq 2 \max\{\|x\|_E, \|y\|_E\}$

$D(T)_{\mathbb{C}} := D(T) \times D(T)$

$T_{\mathbb{C}} : D(T)_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$, $T(x, y) := (Tx, Ty)$ oder $T(x + iy) := Tx + iTy$. „Spektrum/Resolventenmenge/Resolvente von T “ = von $T_{\mathbb{C}}$

Beispiele:

1) $X := (C^0([0, 1], \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty})$ ist Banachraum

$$(\|f\|_{\infty} := \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|)$$

$$X \cap C^1([0, 1], \mathbb{C}) \subset X$$

$T : D \rightarrow X$, $Tf := f'$. T ist unstetig!

(z.B. $f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$, $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{n} < \infty$,

$(T(f_n))(x) = N \cos(n^2 x)$, $\|Tf_n\|_{\infty} = n \rightarrow \infty$)

Beh.: $\sigma(T) = \mathbb{C}$, alles Eigenwerte

Beweis: $T(\underbrace{x \mapsto e^{\lambda x}}_{=: f_{\lambda}}) = \lambda f_{\lambda}$, also $(\lambda - T) \underbrace{f_{\lambda}}_{\neq 0} = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

\Rightarrow Spektrum = \mathbb{C}

2) $X_0 := \{f \in C^0([0, 1], \mathbb{C}) \mid f(0) = 0\}$, mit $\|\cdot\|_{\infty}$

$$D := \{f \in X_0 \mid f'(0) = 0\}$$

$T : D \rightarrow X_0$, $Tf := f'$

Betr. G. $(\lambda - T)f = g$ für $f \in D$, $g \in X_0$

$$\text{Gleichbed.: } (*) \begin{cases} f'(x) = \lambda f(x) = g(x) & (x \in [0, 1]) \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$$

(*) wird gelöst (mit RB) von: $f(x) = - \int_0^x e^{\lambda(x-s)} g(s) ds$

Also $(\lambda - T)$ bijektiv $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\|(\lambda - T)^{-1}g\|_{\infty} = \|f\|_{\infty} \leq \int_0^1 |e^{\lambda(x-s)}| \cdot \|g\|_{\infty} \leq e^{|\lambda|} \|g\|_{\infty}$$

$\Rightarrow (\lambda - T)^{-1} : X_0 \rightarrow X_0$ stetig.

\Rightarrow Resolventenmenge $\rho(T) = \mathbb{C} \Rightarrow$ Spektrum $\sigma(T) = \emptyset$.

3) $X_1 := (C^0([0, 1], \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty})$

$$D := X_1, (Tf) := f - \mu(f), (Tf)(x) := f(x) - \mu(f), \mu(f) = \int_0^1 f(x) dx$$

$$(\lambda - T)f = g \Leftrightarrow \lambda f - f + \mu(f) = g \Leftrightarrow (\lambda - 1)f + \mu(f) = g$$

Notwendig: $\lambda \mu(f) = \mu(g)$

$\lambda = 0 \in \sigma(T)$ Eigenwert, Eigenfunktion: konstante Fu'n, etwa $1_{[0, 1]}$

Für $\lambda \neq 0$: Notw.: $\mu(t) = \frac{\mu(g)}{\lambda}$, $(\lambda - 1)f = g - \frac{\mu(g)}{\lambda}$

Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$: $f := \frac{1}{\lambda - 1} [g - \frac{\mu(g)}{\lambda}]$ def. Inverse zu $\lambda - T$

$$\|f\|_{\infty} \leq \frac{1}{|\lambda - 1|} (\|g\|_{\infty} + \frac{\|g\|_{\infty}}{|\lambda|}) = \frac{1}{|\lambda - 1|} (1 + \frac{1}{|\lambda|}) \|g\|_{\infty}$$

also $(\lambda - T)^{-1}$ st., $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \subset \rho(T)$

$\lambda = 1$:

$(\lambda - T)(f) = (id - T)f = \mu(t)$, $Bild(\lambda - T) = \{g \in X_1 \mid g \text{ konstant}\}$

nicht dicht in X_1

Fu'n mit Mittel 0 sind Eigenfu' zum Eigenwert 1 von T.

4) $T : l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, $T(a_1, a_2, a_3, \dots) := (a_2, a_3, a_4, \dots)$

T ist surj., nicht injektiv ($T(1, 0, 0, \dots) = (0, 0, \dots)$)

$\|T\| \leq 1$, T stetig. ($\|(a_n)\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$)

Beh.: $\forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1$: λ Ewert von T

Bew.: $T(a_n) = \lambda(a_n) \Leftrightarrow a_2 = \lambda a_1, a_3 = \lambda a_2, a_4 = \lambda a_3, \dots \Leftrightarrow a_n = \lambda^{n-1} a_1$ ($n \in \mathbb{N}$)

Also: $a_n := \lambda^{n-1}$, $(a_n) \in l^2$, falls $|\lambda| < 1$, $T(a_n) = \lambda(a_n)$

$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\} \subset \sigma(T)$

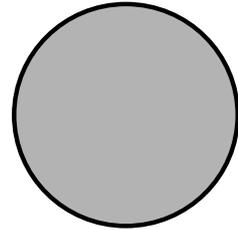
Allg. Theorie $\Rightarrow \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$

Frage: EW mit $|\lambda| = 1$?

Falls $|\lambda| = 1$ und $T(a_n) = \lambda(a_n)$, so würde folgen: $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| = |\lambda|^{n-1} |a_1| = |a_1|$

$a_n = 0$ f.a. \mathbb{N} (sonst $(a_n) \notin l^2$)

Also alle λ mit $|\lambda| = 1$ Spektralwerte, keine Eigenwerte.



Beweise

1 Beweis (Unterabschnitt 1.1):

(1-3) trivial.

zu 4) Sei (u_j) wie angeg. Offenbar $u_j \geq 0$, $K_j := \text{supp}(u_j)$ kp. für alle $j \in \mathbb{N}$.

Wegen $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq 0$ gilt: $\forall j \in \mathbb{N} : K_j \subset K_1$, alle $u_j = 0$ außerhalb K_1

Wähle achsenparallele Quader Q mit $K_1 \subset Q$, dann $\forall j \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{R}^n} u_j = \int_Q u_j$,

und $\forall j \in \mathbb{N} : \left| \int_Q u_j \right| \leq \|u_j\|_\infty \cdot \text{vol}_n(Q)$ (vgl. Ana II 14.5.d)

Reicht also z.z. $\|u_j\|_\infty \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

Annahme nicht.

Dann $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall j \in \mathbb{N} \exists x_j \in K_1 : u_j(x_j) \geq \varepsilon_0$ (! benutzt dass $u_k \geq u_l$ für $k \geq l$)

Nach **Bolzano Weierstraß** ex. konv. Teilfolge $(x_{\varphi(j)}) \subset (x_j)$ mit limes $x^* \in K_1$

Sei $k \in \mathbb{N}$. Es ex. $j \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(j) \geq k$, also $u_k(x^*) \geq u_{\varphi(j)}(x^*) = u_{\varphi(j)}(\lim_{l \rightarrow \infty} x_{\varphi(l)}) \stackrel{*}{\geq}$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \underbrace{u_{\varphi(j)}(x_{\varphi(l)})}_{\geq u_{\varphi(l)}(x_{\varphi(l)}) \geq \varepsilon_0, \text{ Monotonie falls } l \geq j} \geq \varepsilon_0$$

*: $u_{\varphi(j)}$ st.

Widerspruch zu $u_k(x^*) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

(Argument ähnlich wie im Satz von Dini vgl. Übg.)

2 Beweis (Unterabschnitt 1.2):

$$\begin{aligned} \max\{f, g\} &= \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}, \\ \min\{f, g\} &= \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2} \end{aligned}$$

3 Beweis (Unterabschnitt 1.5):

Zu $j \in \mathbb{N}$ sei $(u_l^{(j)})_{l \in \mathbb{N}}$ FF., $u_l^{(j)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$ auf N_j , $u_{l+1}^{(j)} \geq u_l^{(j)}$

O.E. alle $u_l^{(j)} \geq 0$ (sonst ersetze $u_l^{(j)}$ durch $u_l^{(j)} - u_1^{(j)}$)

Es. ex. $c_j > 0$ mit $\forall l \in \mathbb{N} : \int u_l^{(j)} \leq c_j$.

O.E. $\int u_l^{(j)} \leq 2^{-j} (\forall j, l \in \mathbb{N})$ (sonst: $v_l^{(j)} := \frac{2^{-j}}{c_j} u_l^{(j)}$).

Setze nun $g_l := \sum_{j=1}^l u_l^{(j)}$, dann $g_l \leq g_{l+1}$, $g_l \in \mathcal{L}$

$$\int g_l = \sum_{j=1}^l \underbrace{\int u_l^{(j)}}_{\leq 2^{-j}} \leq 1 \text{ für } l \in \mathbb{N}. \text{ Also } (g_l) \text{ FF}$$

Falls $x \in \bigcup_j N_j$, so ex. $j_0 \in \mathbb{N} : x \in N_{j_0}$

Für $l \geq j_0$ ist $g_l(x) = \sum_{j=1}^l u_l^{(j)}(x) \geq u_l^{j_0}(x) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$

Also $\bigcup_j N_j$ Nullmenge

4 Beweis (Unterabschnitt 1.7):

Sei $N \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge, $u_j(x) \rightarrow 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$

$(v_k) \in \mathcal{LFF}$. mit $v_k(y) \rightarrow \infty$ für $y \in N$. O.E. $v_k \geq 0$

Sei $S := \lim_{k \rightarrow \infty} \int v_k$

Sei $\varepsilon > 0$. Def.: $\tilde{v}_j = \frac{\varepsilon v_j}{S+1}$ ($j \in \mathbb{N}$).

Dann $(\tilde{v}_j) \text{ FF.}$, $\int \tilde{v}_j \leq \varepsilon$, $\tilde{v}_j \rightarrow \infty$ auf N .

Setze $h_j := (u_j - \tilde{v}_j)^+$, dann $h_j \geq h_{j+1} \dots \geq 0$, $h_j \in \mathcal{L}$ und $h_j \rightarrow 0$ überall

Denn falls $x \notin N$: $h_j(x) = 0$ oder $h_j(x) \leq u_j(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$, da $x \notin N$

Falls $x \in N$: $u_j(x) - \tilde{v}_j(x) \leq u_1(x) - \underbrace{\tilde{v}_j(x)}_{\xrightarrow{j \rightarrow \infty} +\infty} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} -\infty$, $h_j(x) \rightarrow 0$

Mit (4): $\int h_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

Folgt $\int u_j = \int (u_j - v_j) + \int \tilde{v}_j \leq \underbrace{\int (u_j - \tilde{v}_j)^+}_{h_j \rightarrow 0} + \underbrace{\int \tilde{v}_j}_{\leq \varepsilon}$. Also $\underbrace{\lim_{j \rightarrow \infty} \int u_j}_{\substack{\text{einsetzbar wegen} \\ \int u_j \geq \int u_{j+1} \geq 0}} \leq \varepsilon$

Dies für alle $\varepsilon > 0$, also $\int u_j \rightarrow 0$

5 Beweis (Unterabschnitt 1.8):

Zeige (*): Seien $(u_j), (v_k)$ FF, $u(x) := \underbrace{\lim_{j \rightarrow \infty} u_j}_{\text{ex. f.ü.}} \leq v(x) := \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} v_k}_{\text{ex. f.ü.}}(x)$ f.ü.

Dann $\lim_{j \rightarrow \infty} \int u_j \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int v_k$

Wohldefiniertheit folgt durch Anw. von (*) mit $u = v$

Beweis von *: Sei $j \in \mathbb{N}$. Beh. $\int u_j \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int v_k$ (**)

Bew.: $h_k := (u_j - v_k)^+$ ($k \in \mathbb{N}$). Dann $h_k \geq 0$, $h_k \geq h_{k+1}$ und

$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) \leq \lim_{f.ü. \ k \rightarrow \infty} (u(x) - v_k(x))^+ = (u - v)^+(x)$ f.ü.

Nach 1.7: $\int h_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

Es ist $u_j - v_k + v_k \leq \underbrace{(u_j - v_k)^+}_{h_k} + v_k$, also $\int u_j \leq \underbrace{\int h_k}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} + \int v_k$,

also $\int u_j \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int v_k$ (**) gezeigt.

Für $j \rightarrow \infty$ folgt aus (**): $\lim_{j \rightarrow \infty} \int u_j \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int v_k$, also (*)

Wohldef. gezeigt.

$\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^+$ klar: Für $u \in \mathcal{L}$ wähle alle $u_j = u$

6 Beweis (Unterabschnitt 1.9):

Seien $(f_j), (g_j)$ FF., $f_j \rightarrow f$ f.ü. $g_j \rightarrow g$ f.ü.

zu a) $h_j := \max\{f_j, g_j\}$. Dann $h_j \rightarrow \max\{f, g\}$ f.ü.

(h_j) ist FF. Also $\max\{f, g\} \in \mathcal{L}^+$, min analog., $f^+ = \max\{f, 0\}$

zu b) $(\alpha f_j + \beta g_j)$ ist FF. (beachte: $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$)

$\alpha f_j + \beta g_j \rightarrow \alpha f + \beta g$ f.ü., also $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^+$

zu c) Beachte: Nicht notw. $f_j \leq g_j$ für alle j .

Setze $h_j := \max\{f_j, g_j\}$ ($j \in \mathbb{N}$). Dann $h_j \in \mathcal{L}$, $h_j \leq h_{j+1}$

$$(*) : \int h_j \leq \int |f_j| + \int |g_j|$$

$$*: \text{ beschr. für } j \rightarrow \infty, \text{ denn } \int |f_j| = \int |f_j - f_1 + f_1| \leq \int |f_j - f_1| + \int |f_1| = \underbrace{\int f_j - \int f_1 + \int |f_1|}_{\text{beschr. für } j \rightarrow \infty}$$

analog für $|g_j|$

$$\text{Weiter wegen } g_j \leq h_j = \max\left\{ \underbrace{f_j}_{\leq f \text{ f.ü.}}, \underbrace{g_j}_{\leq g \text{ f.ü.}} \right\} \leq g \text{ f.ü.}$$

Und $g_j \rightarrow g$ f.ü. gilt $h_j \rightarrow g$ f.ü.

$$\text{Nach 1.8: } \int g = \lim_{j \rightarrow \infty} \int h_j, \text{ also } \int f = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j \underset{f_j \leq h_j}{\leq} \lim_{j \rightarrow \infty} \int h_j = \int g$$

7 Beweis (Unterabschnitt 1.10):

Sei (u_j) FF. $u_j \rightarrow f$ f.ü.

\exists Nullmengen N_1, N_2 mit $u_j(x) \rightarrow f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N_1$, $f(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N_2$

Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{N_1 \cup N_2}_{\text{Nullm.}}$: $u_j(x) \rightarrow f(x) = g(x)$

Also $u_j \rightarrow g$ f.ü. Somit $g \in \mathcal{L}^+$ $\int g = \lim_{j \rightarrow \infty} \int u_j = \int f$ gemäß Def. 1.8

8 Beweis (Unterabschnitt 1.11):

Seien $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^+$ sodass $f - g = u = \tilde{f} - \tilde{g}$.

$$\text{Dann } \mathcal{L}^+ \ni f + \tilde{g} = g + \tilde{f}, \quad \underbrace{\int f + \tilde{g}}_{= \int f + \int \tilde{g}} = \underbrace{\int g + \tilde{f}}_{= \int g + \int \tilde{f}}$$

$$\text{Also } \int f - \int g = \int \tilde{f} - \int \tilde{g}$$

9 Beweis (Unterabschnitt 1.12):

zu 1): Sei $u \in \mathcal{L}$, $u = f(\in \mathcal{L}^+) - g(\in \mathcal{L}^+)$,

dann $|u| = |f - g| = \max\{f, g\}(\in \mathcal{L}^+) - \min\{f, g\}(\in \mathcal{L}^+)$, also $|u| \in \mathcal{L}^+$

zu 2): Seien $\mathcal{L}^1 \ni u = f(\in \mathcal{L}^+) - g(\in \mathcal{L}^+)$, $\mathcal{L}^1 \ni v = \tilde{f}(\in \mathcal{L}^+) - \tilde{g}(\in \mathcal{L}^+)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{Falls } \alpha, \beta \geq 0: \alpha u + \beta v = \alpha(f - g) + \beta(\tilde{f} - \tilde{g}) = \underbrace{\alpha f + \beta \tilde{f}}_{\in \mathcal{L}^+} - \underbrace{(\alpha g + \beta \tilde{g})}_{\in \mathcal{L}^+} \in \mathcal{L}^1$$

$$\text{Falls } \alpha \geq 0, \beta < 0: \alpha u + \beta v = \alpha f + |\beta| \tilde{g} - \alpha g - |\beta| \tilde{f} = \underbrace{\alpha f + |\beta| \tilde{g}}_{\in \mathcal{L}^+} - \underbrace{(\alpha g + |\beta| \tilde{f})}_{\in \mathcal{L}^+} \in \mathcal{L}^1$$

$$\text{Falls } \alpha < 0, \beta < 0: \alpha u + \beta v = -(|\alpha| f + |\beta| \tilde{f} - |\alpha| g - |\beta| \tilde{g}) \\ = \underbrace{|\alpha| g + |\beta| \tilde{g}}_{\in \mathcal{L}^+} - \underbrace{(|\alpha| f + |\beta| \tilde{f})}_{\in \mathcal{L}^+} \in \mathcal{L}^1$$

(Linearität klar)

zu 3): Sei $u \geq 0$, $u = f(\in \mathcal{L}^+) - g(\in \mathcal{L}^+)$, dann $f \geq g$, $\int f \geq \int g$ (1.9c), $\int u = \int f - \int g \geq 0$

zu 4): Folgt später aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue oder dem Satz von Beppo Levi.

10 Beweis (Unterabschnitt 1.16):

1. Sei zunächst $f \in \mathcal{L}^+$, $(f_j) \subset \mathcal{L} = \mathcal{C}_C^0$ FF. mit $f_j \uparrow f$ f.ü.

$$\text{Dann } \|f - f_j\|_1 = \int \underbrace{|f - f_j|}_{= f - f_j \text{ f.ü.}} = \int (f - f_j) \underset{\text{Bew. später}}{=} \int f - \int f_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

2. Sei $f \in \mathcal{L}^1$, dann $f = u(\in \mathcal{L}^+) - v(\in \mathcal{L}^+)$.

Nach Teil 1 ex. $\tilde{u} \in \mathcal{L}, \tilde{v} \in \mathcal{L}, \|u - \tilde{u}\|_1 < \frac{\epsilon}{2}, \|v - \tilde{v}\|_1 < \frac{\epsilon}{2}$. Dann $\tilde{u} - \tilde{v} \in \mathcal{L}$
 $\|f - (\tilde{u} - \tilde{v})\|_1 = \|u - v - (\tilde{u} - \tilde{v})\|_1 \leq \|u - \tilde{u}\|_1 + \|v - \tilde{v}\|_1 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

11 Beweis (Unterabschnitt 1.17):

$f = u - v, u, v \in \mathcal{L}^+$. Es ex. FF $(u_n), u_n \rightarrow u$ f.ü.

$$\text{Def. } \tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & , \text{ falls } f(x) = g(x) \\ g(x) + v(x) & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann $\forall x \in \mathbb{R}^n : g(x) = \tilde{u}(x) - v(x)$ und $\tilde{u} = u$ f.ü.

Nach 1.10 ist $\tilde{u} \in \mathcal{L}^+, \int \tilde{u} = \int u$

Also $g \in \mathcal{L}^1, \int g = \int \tilde{u} - \int v = \int u - \int v = \int f$

(1.1b wurde im Beweis von 1.15 benutzt.)

12 Beweis (Unterabschnitt 2.2):

$$\mathbb{1}_{M_1 \cup M_2} = \max\{\mathbb{1}_{M_1}, \mathbb{1}_{M_2}\}, \quad \mathbb{1}_{M_1 \cap M_2} = \min\{\mathbb{1}_{M_1}, \mathbb{1}_{M_2}\}$$

$$\mathbb{1}_{M_1 \setminus M_2} = \mathbb{1}_{M_1} - \mathbb{1}_{M_1 \cap M_2} \text{ (daraus die Int.barkeit)}$$

$$\mathbb{1}_{M_1 \cup M_2} = \mathbb{1}_{M_1} + \mathbb{1}_{M_2} - \mathbb{1}_{M_1 \cap M_2}$$

Daraus mit Linearität des Integrals die beiden Gl.

13 Beweis (Unterabschnitt 2.3):

- a) 1. Für $L \subset \mathbb{R}^n$ kp., $\epsilon > 0$ ex. $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), 0 \leq g \leq 1, g = 1$ auf L ,
 $\text{supp}(g) \subset L + B(0, \epsilon)$

Bew.: Übung



2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $j \in \mathbb{N}$ def. $L_j := \{x \in U \mid \|x\| \leq j, \text{dist}(x, \partial U) \geq \frac{1}{j}\}$
 $\text{dist}()$: keine Bed. falls $\partial U = \emptyset$, d.h. $U = \mathbb{R}^n$

Dann L_j kp. (beschr., abg., Heine Borel.), $L_j + B(0, \frac{1}{j}) \subset U$

Sei hierzu $g_j \in \mathcal{C}_c^0$ wie in Teil 1, mit $\epsilon = \frac{1}{j}$. (Dann $\text{supp}(g_j) \subset U$)

Setze $f_j := \max_{k=1, \dots, j} g_k$. Dann $f_j \leq f_{j+1}, 0 \leq f_j \leq 1, f_j \in \mathcal{C}_c^0, \text{supp} f_j \subset U$

Für $x \in U$ ex. j_x mit $x \in L_{j_x}$, dann $\forall j \geq j_x : f_j(x) = 1$

Für $x \notin U$: Alle $f_j(x) = 0$. Also $f_j \nearrow \mathbb{1}_U$

Falls U beschr., so ex. (achsenpar.) Quader $Q, Q \subset U$.

Dann $\int f_j = \int_Q f_j \leq \int_Q 1 = \text{vol}_n(Q)$. Also (f_j) FF., also $\mathbb{1}_U \in \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^1$, also U int.bar.



- b) $K \subset \mathbb{R}^n$ kp. $\Rightarrow \mathbb{1}_K$ intbar.

Es ex. $R > 0$ mit $K \subset \underbrace{B(0, R)}_{=: U}$

nach a): U int.bar, $U \setminus K$ intbar.

$$\mathbb{1}_K = \mathbb{1}_U - \mathbb{1}_{U \setminus K}$$

14 Beweis (Unterabschnitt 2.4):

1. Sei zunächst $f \leq 0$. Setze $M := \min_{x \in K} f(x) - 1$, dann $0 \geq \tilde{f} \geq M$.

Sei $Q_f := \{(p, r, c) \mid p \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+, c \in \mathbb{Q}, 0 \geq c \geq M, \tilde{f} \geq c \text{ auf } B(p, r)\}$

zu $(p, r, c) \in Q_f$ wähle $\varphi_{p,r,c} \in \mathcal{C}_c^0$ mit $0 \geq \varphi_{p,r,c} \geq M$,



$$\varphi_{p,r,c}(x) := \begin{cases} M & , x \in K, \|x - p\| \geq r \\ c & , \|x - p\| \leq \frac{r}{2} \\ \leq c & , \frac{r}{2} \leq \|x - p\| < r \end{cases}$$

Behauptung (*): $\forall x \in \mathbb{R}^n : \tilde{f}(x) \sup\{\varphi_{p,r,c}(x) | (p,r,c) \in Q_f\}$ Beweis:

Nach Def. von Q_f ist für $x \in \mathbb{R}^n, (p,r,c) \in Q_f$:

$\tilde{f}(x) \geq c \geq \varphi_{p,r,c}$, falls $x \in B(p,r)$

$\tilde{f}(x) \geq M = \varphi_{p,r,c}(x)$, falls $x \in K, x \notin B(p,r)$

$\tilde{f}(x) = 0 > \varphi_{p,r,c}(x)$, falls $x \notin K, x \notin B(p,r)$

Weiter: Zu $\varepsilon > 0$ ex. $c \in \mathbb{Q}$ und $r \in \mathbb{Q}^+$ mit $0 \geq \tilde{f}(x) > c > \tilde{f}(x) - \varepsilon$

und $\tilde{f} \geq c$ auf $B(x, 2r)$

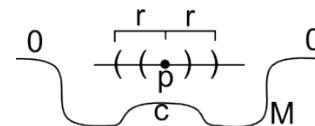
Beachte, dass wegen $f \leq 0, \tilde{f}$ unterhalb st.

Weiter ex. $p \in \mathbb{Q}^n, \|p - x\| < \frac{r}{2}$

Dann $B(p,r) \subset B(x, 2r)$ und somit $(p,r,c) \in Q_f$

Es ist $\varphi_{p,r,c}(x) = c$, also $\sup... \geq \tilde{f}(x) - \varepsilon$

Dies für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$, also gilt in (**)"=".



Q_f ist abz.bar. Sei $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung der Fu'n $\{\varphi_{p,r,c} | (p,r,c) \in Q_f\}$.

Für $j \in \mathbb{N}$ sei $f_j(x) = \max_{k=1, \dots, j} g_k(x)$. Dann $f_j \in \mathcal{C}_c^0, f_j \leq f_{j+1}, f_j \leq 0$. Also (f_j) FF.

Weiter wegen (*): $f_j(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \tilde{f}(x)$. Also $\tilde{f} \in \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^1$

2. Sei jetzt f beliebig und $A := \max_{x \in K} f(x)$

Da $\mathbb{1}_K \in \mathcal{L}^1$ nach 2.3b, ist auch $A\mathbb{1}_K \in \mathcal{L}^1$. Da $\tilde{f} - A\mathbb{1}_K \leq 0$, ist nach 1.: $\tilde{f} - A\mathbb{1}_K \in \mathcal{L}^1$

Noch nicht klar: Für achsenparallelen Quadern $Q, f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

$$\underbrace{\int_Q f}_{\text{wie in AnaII}} = \mathcal{L} - \underbrace{\int_Q f}_{\text{Lebesgue-Int.}}$$

$$\int_Q f = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$$

15 Beweis (Unterabschnitt 2.5):

$\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ nach 2.4

Sei zunächst $f \leq 0$. Def. für $j \in \mathbb{N}, f_j$ durch

$$f_j(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in [a, b] \\ 0 & , x \in (-\infty, a - \frac{1}{j}] \cup [b + \frac{1}{j}, \infty) \\ \text{lin. Interpol. zwischen } f(b) \text{ und } 0 & \text{auf } (b, b + \frac{1}{j}] \\ \dots f(a) \dots & \text{auf } [a - \frac{1}{j}, a] \end{cases}$$



Dann $f_j \in \mathcal{C}_c^0, f_j \leq f_{j+1}, f_j(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $(\int f_j)$ beschr., da $f_j \leq 0$

Also (f_j) FF. also $\tilde{f} \in \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^1$

$$\mathcal{L} - \int \tilde{f} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f_j = \lim_{j \rightarrow \infty} R - \int_{a - \frac{1}{j}}^{b + \frac{1}{j}} f_j(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \underbrace{\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\int_{a - \frac{1}{j}}^a f_j(x) dx + \int_b^{b + \frac{1}{j}} f_j(x) dx \right)}_{=0} =$$

$$R - \int_a^b f(x) dx$$

16 Beweis (Unterabschnitt 3.1):

Sei $(\varphi_j) \subset \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$ FF., $\varphi_j \rightarrow \infty$ auf N

Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\varphi_j(x, y) dy}_{\in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})})_{j \in \mathbb{N}} \text{ unbeschr.}\}$

Setze $\psi_j(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x, y) dy$. Dann $\psi_j \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \psi_j(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} (\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} \varphi_j \text{ (beschr. Folge)}$$

Also ψ_j FF., $\psi_j \rightarrow \infty$ auf M .

Damit (nach Def.) $M \subset \mathbb{R}^m$ Nullmenge.

Sei $x \in \mathbb{R}^m \setminus M$. Dann $(\varphi_j(x, *))_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ FF. nach Def. von M .

Also $\tilde{N}_x := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_j(x, y) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty\}$

Es ist $N_x \subset \tilde{N}_x$, also N_x Nullmenge in \mathbb{R}^n .

Rest analog.

17 Beweis (Unterabschnitt 3.2):

1. Sei zunächst $f \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$ und $(f_j) \subset \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$ FF., $f_j \nearrow f$ f.ü.

$$\text{Für } j \in \mathbb{N} \text{ ist } \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f_j = \int_{\mathbb{R}^m} (\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(x, y) dy) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_j(x, y) dx) dy$$

Hinweis: $\varphi = f \neq \varphi$

Def.: $\varphi_j(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x, y) dy$. Dann $\varphi_j \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\varphi_j \leq \varphi_{j+1}$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_j = \int_{\mathbb{R}^m} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy) dx = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f_j,$$

also $(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ beschr. (φ_j) FF.

Sei $M_1 := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \varphi_j(x) \rightarrow \infty\}$, $M_1 \subset \mathbb{R}^m$ ist Nullmenge.

Sei $x \in \mathbb{R}^m \setminus M_1$. $f_j(x, *) \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $f_j(x, *) \leq f_{j+1}(x, *)$,

$(\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x, *) dy)_{j \in \mathbb{N}}$ beschr., also $(f_j(x, *))$ FF. in $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Sei $N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ die Nullmenge, außerhalb $f_j \rightarrow f$ gilt.

Nach Lemma 3.1 ex. Nullmenge $M_2 \subset \mathbb{R}^m$ Nullmenge, sodass:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus M_2 : N_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in N\} \subset \mathbb{R}^n \text{ Nullm.}$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^m \setminus M_2 : f_j(x, *) \rightarrow f(x, *)$ f.ü. auf \mathbb{R}^n .

Für $x \in \mathbb{R}^m \setminus M_1 \cup M_2 : (f_j(x, *)) \subset \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist FF. die f.ü. auf \mathbb{R}^n gegen $f(x, *)$ konvergiert.

Somit für diese $x : f(x, *) \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x, y) dy = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j(x)$$

Damit, da (φ_j) FF.: $[x \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy] \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$

(def. auf $\mathbb{R}^m \setminus M_1 \cup M_2$, Rest egal).

Nach Def. des Integrals auf \mathcal{L}^+ :

$$\int_{\mathbb{R}^m} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_j(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{m+1}} f_j = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f.$$

2. Sei jetzt $f \in \mathcal{L}^1$ allgemein. Dann ex. $u, v \in \mathcal{L}^+ f = u - v$.

Wende Teil 1 auf u und v an.

18 Beweis (Unterabschnitt 3.3):

Sei $(f_j) \subset \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ FF., $f_j \rightarrow \infty$ auf N .

$$\text{Def.: } g_j(x) := \begin{cases} f_j(\varphi(x)) |\det(D\varphi(x))| & , x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

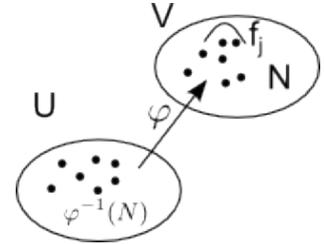
Wähle f_j mit $\text{supp}(f_j) \subset V$!

Dann $\text{supp}(g_j) = \varphi^{-1}(\text{supp}(f_j)) \subset U, g_j \in \mathcal{C}_c^0, g_j \leq g_{j+1}$.

Nach Transf.-Formel für \mathcal{C}_c^0 -Fu'n. (Ana2):

$$\int_U g_j = \int_V f_j = \int f_j, \text{ also } (\int g_j) \text{ beschr.}$$

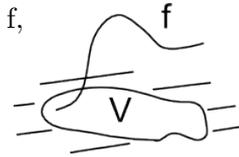
(g_j) FF., $g_j(x) \rightarrow \infty$ falls $x \in \varphi^{-1}(N)$, also $\varphi^{-1}(N)$ Nullmenge.



19 Beweis (Unterabschnitt 3.4):

„ \Leftarrow “ folgt aus „ \Rightarrow “ mit $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ und $\underbrace{(f \circ \varphi) |\det(D\varphi(*))|}_{=:g}$ statt f ,

$$\text{denn } y \mapsto g(\varphi^{-1}(y)) \det(D\varphi^{-1}(y)) = \dots = f(y)$$



„ \Rightarrow “ Sei \tilde{f} triv. Forts. von f (asserhalb V), also $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$

1. Fall $\tilde{f} \in \mathcal{L}^+$. Sei $(f_j) \subset \mathcal{C}_c^0$ FF., $f_j \nearrow \tilde{f}$ f.ü.

O.E. sei für alle $j \in \mathbb{N}$ $\text{supp}(f_j) \subset V$ (sonst wäre $(v_j) \in \mathcal{C}_c^0, \underbrace{\text{supp}(v_j) \subset V, v_j \uparrow 1_V}_{\text{mögl. nach 2.3a}}$,

ersetze f_j durch $f_j \dot{v}_j$).

$$\text{Def. } g_j(x) := \begin{cases} f_j(\varphi(x)) |\det(D\varphi(x))| & , x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann $(g_j) \subset \mathcal{C}_c^0, \text{supp}(g_j) = \varphi^{-1}(\text{supp}(f_j))$. Nach Transformationsformel für \mathcal{C}_c^0 -Fu'n : $\int_U g_j = \int_V f_j$ und $g_j \leq g_{j+1}$, also (g_j) FF.

Es gilt $f_j(y) \rightarrow \tilde{f}(y)$ f.a. $y \in \mathbb{R}^n$ ausserhalb einer Nullm. $N \subset V$

Nach Lemma 3.3: $\varphi^{-1}(N) \subset U$ auch Nullmenge und für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \varphi^{-1}(N)$ gilt:

$$g_j(x) \rightarrow \begin{cases} f(\varphi(x)) |\det(D\varphi(x))| & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$$

Es folgt: $\tilde{f} \circ \varphi \cdot |\det(D\varphi(*))| \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$\Rightarrow f \circ \varphi \cdot |\det(D\varphi(*))| \in \mathcal{L}^1(U, \mathbb{R})$.

$$\text{Weiter: } \int_U f(\varphi(x)) |\det(\varphi(x))| dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_U g_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_V f_j = \int_V f$$

2. Fall $f \in \mathcal{L}^1, f = u - v, u, v \in \mathcal{L}^+$

Wende Teil 1 auf u, v an. Linearität des Integrals

20 Beweis (Unterabschnitt 4.1):

Nach Def von \mathcal{L}^+ ex zu $k \in \mathbb{N}$ eine FF $(f_j^{(k)})_{j \in \mathbb{N}}, f_j^{(k)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} u_k$ f.ü.

(Nicht unbedingt $f_j^{(k)} \leq k f_j^{(k+1)}$)

Setze $v_j := \max\{f_j^{(1)}, \dots, f_j^{(j)}\}$. Dann $v_j \in \mathcal{C}_c^0$, $v_j \leq v_{j+1}$, $v_j \leq \max\{u_1, \dots, u_j\}$ f.ü.

Deshalb $\int f_j \leq \underbrace{\int u_j}_{\text{beschr.}}$, also (v_j) FF.

Sei $u = \lim_{j \rightarrow \infty} v_j$ (wo ex.)

Dann nach Def. von Nullmenge: $v_j \rightarrow u$ f.ü., also $u \in \mathcal{L}^+$, $\int u = \lim_{j \rightarrow \infty} \int v_j$

Beh.: $u_k \leq u$ f.ü. $\forall k \in \mathbb{N}$

Bew.: Falls $k \leq j$, so $\underbrace{f_j^{(k)}}_{\xrightarrow{\text{f.ü.}} u_k} \leq \underbrace{v_j}_{\xrightarrow{\text{f.ü.}} u}$,

also (betr. $j \rightarrow \infty$), $u_k \leq u$ f.ü.

Damit $\forall k \in \mathbb{N} : v_k \leq u_k \leq u$ f.ü., also $\int v_k \leq \int u_k \leq \int u$ und es gilt $\int v_k \rightarrow \int u$ also auch $\int u_k \rightarrow \int u$

21 Beweis (Unterabschnitt 4.2):

Nach Def. ex. $f, g \in \mathcal{L}^+$, $u = f - g$ f.ü.

Sei $(g_j)_{FF.}$, $g_j \nearrow g$ f.ü. Dann $\int g = \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j$

also ex. $j \in \mathbb{N}$ mit $\int (g - g_j) \leq \varepsilon$.

Setze $w := g - g_j$. Dann $w \in \mathcal{L}^+$, $w \geq 0$ f.ü., $\int w \leq \varepsilon$.

Ebenso: $v := f - g_j \in \mathcal{L}^+$, $v - w = f - g_j - (g - g_j) = f - g = u$ f.ü.

22 Beweis (Unterabschnitt 4.3):

Sei (u_j) wie vorausgesetzt.

Beh.: Es ex. $(v_j), (w_j) \in \mathcal{L}^+$, $u_j = v_j - w_j$, v_j wachsend f.ü., w_j wachsend f.ü., $(\int w_j), (\int v_j)$ beschr.

Beweis:

Setze $z_0 := 0$, $\Delta_j := u_j - u_{j-1}$ ($j \in \mathbb{N}$). Dann $\Delta_j \in \mathcal{L}^+$, $u_j = \sum_{k=1}^j \Delta_k$ ($j \in \mathbb{N}$)

Nach 4.2 ex. zu $k \in \mathbb{N}$ $f_k, g_k \in \mathcal{L}^+$ mit $\Delta_k = f_k - g_k$ f.ü., $g_k \geq 0$ f.ü., $\int g_k \leq 2^{-k}$

Somit $\forall j \in \mathbb{N} : u_j = \sum_{k=1}^j \Delta_k = \underbrace{\sum_{k=1}^j f_k}_{=: v_j \in \mathcal{L}^+} - \underbrace{\sum_{k=1}^j g_k}_{=: w_j \in \mathcal{L}^+} = v_j - w_j$ f.ü.

(w_j) wachsend f.ü., $V_j = u_j + w_j$ wachsend f.ü.

$\int w_j \leq \sum_{k=1}^j \int g_k \leq 1$ und $\int g_k \leq 2^{-k}$

$\int v_j = \underbrace{\int u_j}_{\text{beschr.}} + \underbrace{\int w_j}_{\leq 1}$, $(\int v_j)$ beschr.

Anwendung von 4.1 liefert: Es ex. $v, w \in \mathcal{L}^+$, $v_j \rightarrow v$ f.ü., $w_j \rightarrow w$ f.ü.

Setze $u := v - w \in \mathcal{L}^1$. Dann $u_j = v_j - w_j \rightarrow v - w$ f.ü.

$\int u = \int v - \int w = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \underbrace{(v_j - w_j)}_{u_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \int u_j$

23 Beweis (Unterabschnitt 4.4):

a) Wende Beppo-Levi auf $(-u_j)$ an.

$$b) \left. \begin{array}{l} u_j \rightarrow u^* \text{ f.ü.} \\ u_j \rightarrow u \text{ f.ü.} \end{array} \right\} \Rightarrow u = u^* \text{ f.ü., also auch } u^* \in \mathcal{L}^1, \int u^* = \int u = \lim_{j \rightarrow \infty} \int u_j$$

24 Beweis (Unterabschnitt 4.4):

$f_n := f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]} \in \mathcal{L}^1$ (ste Fu' auf kp. Int.)

$(f_n) \nearrow f$ puweise.

$\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{-n}^n f(x) dx$ beschr. für $n \rightarrow \infty$. Wende Beppo-Levi an.



$$\text{z.B. } f(x) = e^{-x^2}, \quad \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \leq 2 \int_0^n e^{-x^2} dx \leq 2 \left[\underbrace{\int_0^1 e^{-x^2} dx}_{\leq 1} + \underbrace{\int_1^n e^{-x^2} dx}_{\leq \int_1^n e^{-x} dx = e^{-1} - e^{-n}} \right] \leq 2[1 + e^{-1} - e^{-n}]$$

$$e^{-n} \leq 2[1 + e^{-1}]$$

Folgt: $x \mapsto e^{-x^2} \in \mathcal{L}^1$

25 Beweis (Unterabschnitt 4.5):

$$\text{Es ist } \lim_{j \rightarrow \infty} \inf(u_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\inf\{u_j \mid j \geq k\}}_{=: v_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\min\{u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+m}\}}_{=: u_{k,m} \in \mathcal{L}^1}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ ist $u_{k,m} \subset m \rightarrow \infty \searrow v_k$ und $u_{k,m} \geq f$, (f.ü.), also $\int u_{k,m} \geq \int f$.

Nach Beppo-Levi („fallende Version“): $v_k \in \mathcal{L}^1$, $\int u_{k,m} \rightarrow \int v_k$

(v_k) ist wachsend, $\int v_k = \lim_{m \rightarrow \infty} \int u_{k,m} \leq \int u_k$

$\int u_k$ nach oben beschr. für $k \rightarrow \infty$ nach Vor., also $(\int v_k)$ beschr.

Nach Beppo-Levi: $\lim_{j \rightarrow \infty} \inf(u_j) \in \mathcal{L}^1$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \inf(u_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int v_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int u_k$

26 Beweis (Unterabschnitt 4.6):

Wende 4.5 auf $-u_j$ und $-f$ an. ergibt:

$$\underbrace{\lim(-u_j)}_{-\lim(u_j)} \in \mathcal{L}^1, \quad \underbrace{\int \lim(-u_j) \leq \lim(\int(-u_j))}_{-\int \lim(u_j) \leq -\lim \int u_j}$$

Behauptung folgt.

27 Beweis (Unterabschnitt 4.7):

$$|\int u_j| \leq \int \underbrace{|u_j|}_{\leq f} \leq \int f \text{ und } -f \leq u_j \leq f (\forall j \in \mathbb{N})$$

Außerdem $\lim(u_j) = \overline{\lim}(u_j) = u$ f.ü.

Es folgt: $u \in \mathcal{L}^1$,

$$\int u = \int \lim(u_j) \leq \lim \int u_j \leq \overline{\lim} \int u_j \leq \int \underbrace{\overline{\lim}(u_j)}_{=u \text{ f.ü.}} = \int u$$

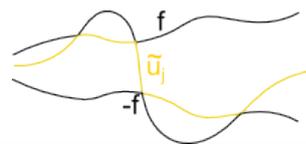
Somit $\lim \int u_j = \overline{\lim} \int u_j$, also $\int u_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int u$

28 Beweis (Unterabschnitt 4.8):

Setze $\tilde{u}_j := \max\{\min\{u_j, f\}, -f\}$

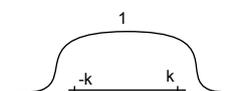
Dann $|\tilde{u}_j| \leq f$, $\tilde{u}_j \in \mathcal{L}^1$, $\tilde{u} \rightarrow u$ f.ü.

Nach Lebesgue: $u \in \mathcal{L}^1$

**29 Beweis** (Unterabschnitt 5.4):

$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f \cdot \varphi_k$, $\varphi_k \in \mathcal{C}_c^0$, $\varphi_k = 1$ auf $B(0, K)$

$f \cdot \varphi_k \in \mathcal{C}_c^0$ falls f st.

**30 Beweis** (Unterabschnitt 5.5):

Idee: Seien (f_j) , (g_j) Folgen von Treppenfunktionen (\mathcal{C}_c^0 -Fu'n)

$f_j \rightarrow f$ f.ü., $g_j \rightarrow g$ f.ü.

Dann $f_j \cdot g_j \rightarrow f \cdot g$ etc.

$f_j \cdot g_j$ ist auch Treppenfunktion bzw. auch \mathcal{C}_c^0 -Fu'n.

Weiter, falls $g_j = \sum_{k=1}^{N_j} \alpha_k^{(j)} \mathbb{1}_{Q_k^{(j)}}$, alle $\alpha_k^{(j)} \neq 0$, so setze

$\tilde{g}_j := \sum_{k=1}^{N_j} \frac{1}{\alpha_k^{(j)}} \mathbb{1}_{Q_k^{(j)}}$. Dann $\tilde{g}_j \rightarrow \frac{1}{g}$ f.ü.

31 Beweis (Unterabschnitt 5.6):

a) \Rightarrow b): bekannt

b) \Rightarrow c): trivial, setze $g := |f|$

c) \Rightarrow a): Wähle Folge (f_j) von Treppenfunktionen, bzw. \mathcal{C}_c^0 -Fu'n mit $f_j \rightarrow f$ f.ü.

Dann $f_j \in \mathcal{L}^1$, $|\lim_{j \rightarrow \infty} f_j| = |f| \leq g \in \mathcal{L}^1$ f.ü.

Nach Vergleichssatz (4.8): $f \in \mathcal{L}^1$

32 Beweis (Unterabschnitt 5.7):

Es ex. $h \in \mathcal{L}^1$ mit $h > 0$ auf ganz \mathbb{R}^n

(z.B. $A_n := B(0, n) \setminus B(0, n-1)$ ($n \in \mathbb{N}$) $h := \sum_{\forall n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \lambda(A_n) \mathbb{1}_{A_n}$)

Def. für $j \in \mathbb{N}$: $\tilde{f}_j := \frac{h \cdot f_j}{h + |f_j|}$, $\tilde{f} := \frac{h \cdot f}{h + |f|}$

Dann $|\tilde{f}| \leq h$, \tilde{f}_j mbar nach 5.5. Nach 5.6c): $\tilde{f}_j \in \mathcal{L}^1$ insbes mbar.

$\tilde{f} = \frac{h \cdot f}{h + |f|} \Rightarrow |\tilde{f}| \cdot (h + |f|) = h|f| \Rightarrow |f|(|\tilde{f}| - h) = -h|\tilde{f}|$

$\Rightarrow |f| = \frac{h|\tilde{f}|}{h - |\tilde{f}|}$

Es folgt: $|f| = \frac{|\tilde{f}| \cdot h}{h - |\tilde{f}|}$, $|f|$ mbar.

Also $f = \frac{\tilde{f} \cdot (h + |f|)}{h}$, f mbar.

33 Beweis (Unterabschnitt 5.8):

„ \Rightarrow “: $\forall k \in \mathbb{N}$: $\underbrace{\mathbb{1}_M \cdot \mathbb{1}_{B(0, k)}}_{\text{paarw. } k \rightarrow \infty} \in \mathcal{L}^1$ also mbar.

$\xrightarrow{\text{paarw. } k \rightarrow \infty} \mathbb{1}_M$

Also nach 5.7: $\mathbb{1}_M \in \mathcal{M}$

„ \Leftarrow “: Sei $\mathbb{1}_M$ messbar und $R_i 0$. Dann $\underbrace{\mathbb{1}_M}_{\text{mbar.}} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{B(0,R)}}_{\text{mbar.}}$ und $|\dots| \leq \mathbb{1}_{B(0,R)}$
 $\mathbb{1}_{B(0,R)} \in \mathcal{L}^1$, da $B(0,R)$ off, beschr., also intbar.

34 Beweis (Unterabschnitt 5.9):

Sei $\mathcal{A} := \{M \subset \mathbb{R}^n \mid M \text{ Lebesgue - mbar.}\}$

$\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$ klar. Falls $M \in \mathcal{A}$, so $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus M} = \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}}_{\text{mbar.}} - \underbrace{\mathbb{1}_M}_{\text{mbar. n. 5.8}}$

Also $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus M}$ mbar, also nach 5.8 $\mathbb{R}^n \setminus M$ mbar.

Sei $M_j \in \mathcal{A} \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

$M := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j$. Sei $f_k := \mathbb{1}_{\bigcup_{j=1}^k M_j}$. Dann $f_k \in \mathcal{M}$ und $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbb{1}_M$

$\underbrace{\bigcup_{j=1}^k M_j}_{\text{mbar, endl Verein. v. mbaren Mengen}}$

Nach 5.7: $\mathbb{1}_M$ mbar.

Nach 5.8: M mbar.

35 Beweis (Unterabschnitt 5.10):

Nach 5.9: $M := \bigcup_j M_j$ mbar.

1. Fall: $\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(M_j) < \infty$ Dann $\forall j \in \mathbb{N} : \mathbb{1}_M \in \mathcal{L}^1$, $\lambda(M_j) = \int \mathbb{1}_{M_j}$.

Mit $f_k := \sum_{j=1}^k \mathbb{1}_{M_j}$ gilt: $f_k \nearrow \mathbb{1}_M$ f.ü. und

$$\int f_k = \sum_{j=1}^k \underbrace{\int \mathbb{1}_{M_j}}_{\lambda(M_j)} \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(M_j) < \infty$$

Nach Beppo Levi: $\mathbb{1}_M \in \mathcal{L}^1$ und

$$\int \mathbb{1}_M = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(M_j), \text{ also } \lambda(M) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(M_j)$$

2. Fall $\sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(M_j) = \infty$. Mit f_k wie oben ist $f_k \in \mathcal{M}$ und $f_k \nearrow \mathbb{1}_M$, also mbar.

Wäre $\mathbb{1}_M \in \mathcal{L}^1$, so $\forall k \in \mathbb{N} : |f_k| \leq \mathbb{1}_M$, also f_k mbar.,

$|f_k| \leq \mathbb{1}_M \in \mathcal{L}^1$ und somit nach 56c): $f_k \in \mathcal{L}^1$

Analog: Wegen $\mathbb{1}_{M_j} \leq f_k$, falls $k \geq j$: $\mathbb{1}_{M_j} \in \mathcal{L}^1$, $\lambda(M_j) < \infty \forall j \in \mathbb{N}$

$$\text{Weiter: } \int f_k = \sum_{j=1}^k \underbrace{\int \mathbb{1}_{M_j}}_{\lambda(M_j)} = \sum_{j=1}^k \lambda(M_j)$$

Wid. zu $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(M_j) = \infty$

36 Beweis (Unterabschnitt 5.11):

a) $M := \bigcup_j M_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j \setminus M_{j-1}$
 (wobei $M_0 := \emptyset$).

$$\text{Nach 5.10: } \lambda(M) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(M_j \setminus M_{j-1}) \stackrel{*}{=} \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda(M_j) - \lambda(M_{j-1})$$

$$\begin{aligned}
 * : M_j &= M_{j-1} \dot{\cup} (M_j \setminus M_{j-1}) \\
 &= \sup_{j \in \mathbb{N}} \lambda(M_j), \text{ falls alle } \lambda(M_j) < \infty \\
 &\text{Falls } \lambda(M_j) = \infty \text{ für ein } j, \text{ so klar.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \lambda \left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} M_j \right) &= \lambda(M_1) - \lambda(M_1 \setminus \bigcap_{j \in \mathbb{N}} M_j) \stackrel{\text{de Morgan}}{=} \lambda(M_1) - \lambda \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (M_1 \setminus M_j) \right) \\
 &= \lambda(M_1) - \sup_j \lambda(M_1 \setminus M_j) = \inf_j (\lambda(M_1) - \lambda(M_1 \setminus M_j)) = \inf_j \lambda(M_j)
 \end{aligned}$$

37 Beweis (Unterabschnitt 5.12):

„ \Rightarrow “ $\mathbb{1}_M = 0$ f.ü., nach 1.16: $\mathbb{1}_M \in \mathcal{L}^1$, $\int \mathbb{1}_M = 0$, also $\lambda(M) = 0$

„ \Leftarrow “ Fall M beschr., also $\exists R > 0 : M \subset B(0, R)$

$$\text{Wähle } \varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad \begin{cases} \varphi(x) = 1 & \text{für } x \in B(0, R) \\ \varphi(x) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, 2R) \end{cases}$$

Da $\mathbb{1}_M \in \mathcal{L}^1$, ex. $(f_k) \subset \mathcal{C}_c^0$, $f_k \rightarrow \mathbb{1}_M$ f.ü.

$$\int f_k \rightarrow \int \mathbb{1}_M = 0$$

Setze $\tilde{f}_k := \max\{\min\{f_k, 1\}, 0\} \cdot \varphi$

Dann auch $\tilde{f}_k \in \mathcal{C}_c^0$, $\tilde{f}_k \rightarrow \mathbb{1}_M$ f.ü. und $0 \leq \tilde{f}_k \leq \varphi \in \mathcal{L}^1$

Somit nach Lebesgue: $\int \tilde{f}_k \rightarrow \int \mathbb{1}_M = 0$ Es ex. Teilf. $(\tilde{f}_{\varphi(k)}) \subset (\tilde{f}_k)$ mit $\forall k \in \mathbb{N} :$

$$\int \tilde{f}_{\varphi(k)} \leq 2^{-k}$$

$$\text{Def. für } k \in \mathbb{N} : \quad g_k := \sum_{j=1}^k \underbrace{\tilde{f}_{\varphi(j)}}_{\geq 0}$$

Dann $g_k \in \mathcal{C}_c^0$, $g_k \leq g_{k+1}$

$$\int g_k = \sum_{j=1}^k \int \tilde{f}_{\varphi(j)} \leq \sum_{j=1}^k 2^{-j} \leq 1, \text{ also } (g_k) \text{ FF.}$$

Sei M_0 die Nullmenge, außerhalb der $\tilde{f}_k \rightarrow \mathbb{1}_M$ gilt.

Für $x \in M \setminus M_0$ gilt: $g_k(x) \rightarrow \infty$

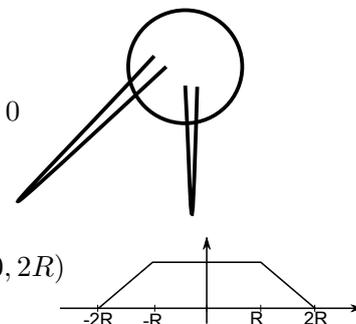
Also nach Def. von „Nullmenge“: $M \setminus M_0$ Nullm.

Somit $M = \underbrace{M \setminus M_0}_{\text{Nullm.}} \cup \underbrace{(M \cap M_0)}_{\subset M_0 \text{ Nullm.}}$ Nullm.

2. Fall M unbeschr. Dann $M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{(M \cap B(0, k))}_{=: M_k}$

M_k beschr., mbar., $\lambda(M_k) = 0$

Nach 1. Fall: M_k Nullm., also M auch Nullm als abz. Vereinigung von Nullm.



38 Beweis (Unterabschnitt 5.13):

a) \Leftrightarrow b) 5.12

a) \Leftrightarrow c) \Leftrightarrow d) Übung

39 Beweis (Unterabschnitt 5.14):

Die Aussage b) \Rightarrow a) bzw. c) \Rightarrow a) wird auch als Satz von Tonelli bezeichnet

b)⇒a) Setze $f_k := \mathbb{1}_{B(0,k)} \cdot \min\{k, |f|\}$

Dann f_k mbar, $|f_k| \leq k \cdot E_{B(0,k)} \in \mathcal{L}^1$

Also nach 3.8: $f_k \in \mathcal{L}^1$

Weiter nach Fubini $\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f_k = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{f_k(x,y)}_{|\dots| \leq |f|} dx \right) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)| dx \right) dy$.

$f_k \nearrow |f|$. Nach Beppo-Levi: $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$

Da f mbar, $|f| \in \mathcal{L}^1$: Nach 5.6 $f \in \mathcal{L}^1$

c)⇒a) Analog.

40 Beweis (Unterabschnitt 6.2):

„⇐“ $f = 0$ f.ü. $\Rightarrow |f|^p = 0$ f.ü. $\Rightarrow \int_{\Omega} |f|^p = \int_{\Omega} 0 = 0$

„⇒“ $g \geq 0, g \in \mathcal{L}^1, \int g = 0 \Rightarrow g = 0$ f.ü. (*)

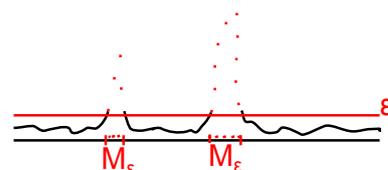
(*) Für $\varepsilon > 0$ sei $M_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) > \varepsilon\}$

Behauptung: M_ε ist intbar $\mu(M_\varepsilon) = 0$

Beweis:

M_ε ist mbar, da g mbar, $M_\varepsilon = g^{-1}((\varepsilon, \infty))$ (vgl 5.3) Weiter $\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{M_\varepsilon} \leq g \in \mathcal{L}^1$, also nach 5.6: $\mathbb{1}_{M_\varepsilon} \in \mathcal{L}^1$, also $\mathbb{1}_{M_\varepsilon}, M_\varepsilon$ intbar.

Weiter $0 \leq \int \mathbb{1}_{M_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int \varepsilon \mathbb{1}_{M_\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int g = 0$, also $\mu(M_\varepsilon) = 0$



Folgt: $\{x \in \mathbb{R}^n | g(x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n | g(x) > \frac{1}{k}\}}_{M_{\frac{1}{k}}, \text{ Nullm.}}$

Also $g=0$ f.ü.

Nachtrag:Nachweis der Mbarkeit M_ε

Esex. $(g_j) \in C_c^0, g_j \nearrow g$ ausserh. Nullm. N

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N : g(x) > \varepsilon \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \exists j_0 \in \mathbb{N} \forall j \geq j_0 : g_j(x) > \varepsilon + \frac{1}{k}$

Also $x \in M_\varepsilon \setminus N \Leftrightarrow x \in \underbrace{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{j_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geq j_0} \{y \in \mathbb{R}^n | g_j(y) > \varepsilon + \frac{1}{k}\} \setminus N}_{\substack{\text{offen, also mbar} \\ \text{mbar}}}$

Somit $M_\varepsilon \setminus N$ mbar.

Also $M_\varepsilon = \underbrace{M_\varepsilon \setminus N}_{\text{mbar}} \cup \underbrace{(M_\varepsilon \cap N)}_{* \subset N}$

*: $\subset N$ Nullmenge, also auch mbar, \cap auch Nullmenge da Lebesgue-Maß vollständig.

41 Beweis (Unterabschnitt 6.3):

Sei $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega), C := \text{ess sup } f$. Sei $(C_j) \subset \mathbb{R}, C_j \searrow C$

Dann $\forall j \in \mathbb{N} \exists \text{Nullm. } N_j, |f| \leq C_j$ ausserh. N_j

Auf $\Omega \setminus \underbrace{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j}_{\text{Nullm.}} : |f| \leq C_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$, also auch $|f| \leq C = \|f\|_\infty$

Wie bei \mathcal{L}^p, L^p : Def. $L^\infty(\Omega) := \mathcal{L}^\infty(\Omega) \setminus \mathcal{N}, \|f\|_\infty := \|f\|_\infty$ def. Norm auf $L^\infty(\Omega)$

42 Beweis (Unterabschnitt 6.4):

1. Fall: $p = \infty$. Zu $k \in \mathbb{N}$ ex. $M_k \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall l, m \geq M_k : \|f_l - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{k}, \text{ und Nullmenge } N_k \text{ mit}$$

$$\forall l, n \geq M_k : f_j, f_m \text{ beschr. auf } \Omega \setminus N_k \text{ und } |f_l - f_m| \leq \frac{1}{k} \text{ auf } \Omega \setminus N_k$$

(zumindest bei jedem (l, m) bilde Vereinigung)

$$\forall f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) : |f| \leq f_\infty$$

$$N := \bigcup_k N_k \text{ ist Nullm und}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall l, m \geq M_k : |f_l - f_m| \leq \frac{1}{k} \text{ auf } \Omega \setminus N$$

Also (f_l) auf $\Omega \setminus N$ glm. konvergent gegen beschr. Fu' $f : \Omega \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$

Setze f auf Ω fort (z.B. mit 0), schreibe wieder f .

$$\text{Dann } f \in \mathcal{L}^\infty, \|f_l - f\|_\infty \leq \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f_l - f| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

Damit a) gezeigt im Fall $p = \infty$

2. Fall $p \in [1, \infty)$ und es ex. Teilf. $(f_{\varphi(j)}) \subset (f_j)$ mit

$$\forall j \in \mathbb{N} : \|f_{\varphi(j+1)} - f_{\varphi(j)}\|_p \leq 2^{-j}$$

$$\text{Setze } g_j := f_{\varphi(j)} \text{ (} j \in \mathbb{N}\text{). und } h_j := \underbrace{\sum_{k=1}^j |g_{k+1} - g_k|}_{\|\cdot\|_p \leq 2^{-k}}$$

Dann $\|h_j\|_p \leq 1$ ($j \in \mathbb{N}$).

$$(h_j^p)_{j \in \mathbb{N}} \text{ wachsend, } \int h_j^p = (\|h_j\|_p)^p \leq 1,$$

also nach Beppo-Levi: $\exists H^* \in \mathcal{L}^1, h_j^p \rightarrow H^*$ f.ü.

Mit $h^* := (H^*)^{\frac{1}{p}}$ (sinnvoll f.ü.) gilt $h_j \nearrow h^*$ f.ü. und $h^* \in \mathcal{L}^p$

Folgt: $\underbrace{\left(\sum_{k=1}^j (g_{k+1} - g_k)\right)}_{g_{k+1} - g_1} \text{ f.ü. konv (abs.konv. } \Rightarrow \text{konv.)}, \text{ also } (g_j) \text{ f.ü. konv. gegen eine}$

Genzfu' f. f mbar (*).

Wegen $|g_{j+1} - g_1| = \left| \sum_{k=1}^j g_{k+1} - g_k \right| \leq \sum_{k=1}^j |g_{k+1} - g_k| = h_j \leq h^*$ f.ü. ist $|f - g_1| \leq h^*$ f.ü.,

also $|f| \leq |f - g_1| + |g_1| \leq h^* + |g_1|$. Es folgt $|f|^p$ mbar. $|f|^p \leq (h^* + |g_1|)^p$, also $|f|^p \in \mathcal{L}^1, f \in \mathcal{L}^p$.

Es gilt $|g_j - f|^p \rightarrow 0$ f.ü. und $|g_j - f| = \left| \sum_{k=j}^{\infty} (g_{k+1} - g_k) \right| \leq h^*$ f.ü.

$|g_j - f|^p \leq (h^*)^p$ f.ü. Nach Lebesgueschem Konvsatz:

$$\int |g_j - f|^p \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, \text{ also } \|g_j - f\|_p \rightarrow 0. \text{ Da } (f_j) \text{ Cauchy-F, folgt: } \|f_j - f\|_p \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

a) gezeigt, b) folgt aus (*), c) in Fall 1 gezeigt.

43 Beweis (Unterabschnitt 6.5):

$$\underline{(f_j)} \subset L^p \text{ Cauchy-F} \Rightarrow (f_j) \subset \mathcal{L}^p \text{ Cauchy-F.}$$

Nach 6.4 ex Grenzfu' $f \in \mathcal{L}^p, \|f_j - f\|_p \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

$$\text{Also } \|\underline{f_j} - \underline{f}\|_p \rightarrow 0$$

44 Beweis (Unterabschnitt 7.1):

$$\text{Def. } \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x, y) := f(x - y)g(y)$$

$$\text{Für } y \in \mathbb{R}^n \text{ ex. } \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x, y)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| \cdot |g(y)| dx = |g(y)| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |f| = |g(y)| \cdot \|f\|_1$$

Also ex. auch $\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x, y)| dx \right) dy = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$

Da φ mbar (!), folgt mit dem Satz von Tonelli: $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Nach Fubini: Für f.a. $x \in \mathbb{R}^n$ ex. $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, y) dy$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \varphi(x, y) d(x, y)$

Also ex. für f.a. $x \in \mathbb{R}^n$ $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ ($f * g$ wohldef. und $f * g \in \mathcal{L}^1$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right) dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) dx \right) dy =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g$$

Damit a) gezeigt.

zu b):

$$\|f * g\|_1 = \int \underbrace{\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right|}_{(f * g)(x)} dx \leq \int \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \cdot |g(y)| dy \right) dx = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

zu c):

$$(g * f) \stackrel{\text{f.ü.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y) dy = \int_{\substack{z:=x-y \\ y=x-z}} \int_{\mathbb{R}^n} g(z)f(x-z) \cdot \underbrace{|\det(\dots)|}_{=1} dz = (f * g)(x)$$

zu d): trivial

45 Beweis (Unterabschnitt 7.2):

zu a):

1. Sei zumindest $f \in C_c^0$ und $\varepsilon > 0$. Sei $R > 0$ mit $\text{supp}(f) \subset B(0, R)$

$$\text{Es ex. } \delta \in [0, 1] \text{ mit } |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2\lambda(B(0, R+1)) \cdot \|\Psi\|_1}$$

(f glm. st auf $\text{supp}(f)$ außerh. 0)

Dann für $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$:

$$|f(x) - (\Psi_r * f)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\Psi_r(y) dy - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_r(x-y)f(y) dy}_{= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\Psi_r(y) dy} \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-y))\Psi_r(y) dy \right| \leq \underbrace{\int_{\|y\| \leq \delta} |f(x) - f(x-y)| \cdot |\Psi_r(y)| dy}_{=: A(x)} + \underbrace{\int_{\|y\| > \delta} |f(x) - f(x-y)| \cdot |\Psi_r(y)| dy}_{=: B(x)}$$

$$\text{Es ist } A(x) = 0 \text{ falls } x \notin B(0, R+1), \text{ und sonst } A(x) \leq \frac{\varepsilon}{2\lambda(B(0, R+1)) \|\Psi\|_1} \cdot \underbrace{\int_{\|y\| \leq \delta} |\Psi_r(y)| dy}_{\leq \|\Psi\|_1}$$

$$\frac{\varepsilon}{2\lambda(B(0, R+1))}$$

$$\text{Also } \int_{\mathbb{R}^n} A(x) dx \leq \int_{B(0, R+1)} \frac{\varepsilon}{2\lambda(\dots)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Weiter: Wegen $|f(x) - f(x-y)| \cdot |\Psi_r(x)| \leq (|f(x)| + |f(x-y)|) |\Psi_r(y)|$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|f(x)| + |f(x-y)|) |\Psi_r(y)| dx dy \text{ ex.}$$

Gilt nach Tonelli und Fubini: $\int_{\mathbb{R}^n} (|f(x)| + |f(x-y)|) |\Psi_r(y)| dx dy$

$$\text{Speziell: } \int_{\mathbb{R}^n} B(x) dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\|y\| > \delta} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x-y)| dx \right)}_{\leq 2\|f\|_1} |\Psi_r(y)| dy \leq \|f\|_1 \int_{\|y\| > \delta} |\Psi_r(y)| dy$$

$$\Psi_r(y) = \frac{1}{r^n} \Psi\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{1}{r^n} \Psi(z)$$

$$\dots = 2\|f\|_1 \underbrace{\int_{\|z\| > \frac{\delta}{r}} |\Psi(z)| dz}_{=: I(r)}$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } \int_{\mathbb{R}^n} |\Psi(z)| dz &= \int_{\|z\| \leq \frac{\delta}{r}} |\Psi(z)| dz + I(r) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\Psi(z)| \cdot \mathbb{1}_{B(0, \frac{\delta}{r})} \\ &\xrightarrow{r \rightarrow 0} |\Psi(z)| \text{ wachsend} \end{aligned}$$

Nach Beppo-Levi: linker Teil $\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\Psi(z)| dz$

Also $I(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$

Es ex. $r_\varepsilon > 0$ mit $\forall r \in (0, r_\varepsilon] : I(r) \leq \frac{\varepsilon}{4(\|f\|_1 + 1)}$

für solche $r : \int_{\mathbb{R}^n} B(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Insgesamt: $\|f - \Psi_r * f\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} (A(x) + B(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2. Sei nun $f \in \mathcal{L}^1$ beliebig und $\varepsilon > 0$.

Nach 1.16: $\exists \tilde{f} \in \mathcal{C}_c^0, \|\tilde{f} - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2(1 + \|\Psi\|_1)}$

Nach Teil 1 ex. $r_\varepsilon > 0$ mit $\forall r \in (0, r_\varepsilon] : \|\tilde{f} - \tilde{f} * \Psi_r\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Für solche $r : \|f - f * \Psi_r\|_1 = \|f - \tilde{f} + \tilde{f} - \tilde{f} * \Psi_r + (\tilde{f} - f) * \Psi_r\|_1$
 $\leq \|f - \tilde{f}\|_1 + \underbrace{\|\tilde{f} - \tilde{f} * \Psi_r\|_1}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|(\tilde{f} - f) * \Psi_r\|_1}_{\leq \|\tilde{f} - f\|_1 \|\Psi_r\|_1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

zu b):

Sei $f \in BC^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

$(\Psi_r * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_r(x-y) f(y) dy$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, da $|f(y)| \leq \|f\|_\infty$

Integr. Majorante: $|\Psi_r(x - *)| \cdot \|f\|_\infty$

$$\dots = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_r(z) f(x-z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{r^n} \Psi\left(\frac{z}{r}\right) f(x-z) dz \stackrel{z=r u}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Psi(u) f(x - ru)}_{\xrightarrow{r \rightarrow 0} \Psi(u)(x) \text{ pw, da } f \text{ st.}} du$$

Integr. Majorante: $|\Psi| \cdot \|f\|_\infty$

Nach Lebesgue:

$$(\Psi_r * f)(x) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \int \Psi(u) f(x) du = f(x) \underbrace{\int \Psi(u) du}_{=1} = f(x)$$

46 Beweis (Unterabschnitt 7.4):

a) folgt aus 7.1b),d)

c) folgt aus 7.2a)

b) $(J_r f)(x) = \int j_r(x-y) f(y) dy$ f.a. $x \in \mathbb{R}^n$. $\frac{\partial}{\partial x_k} Fex.$, $k = 1, \dots, n$ und hat integr. Majorante.

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} j(z) \right| \cdot |f|$$

Also nach Satz 4.10: $\frac{\partial}{\partial x_k} J_r f ex.$, $k = 1, \dots, n$. Induktiv: $J_r f \in \mathcal{C}^\infty$

47 Beweis (Unterabschnitt 7.5):

Wähle eine Glättungsschar $\{j_r\}_{r>0}$ mit $j \in C_c^\infty$, $\text{supp}(j) \subset \overline{B(0,1)}$

(z.B. Friedrichsche Glättung)

Dann für $g \in C_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $r > 0$: $J_r g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, denn:

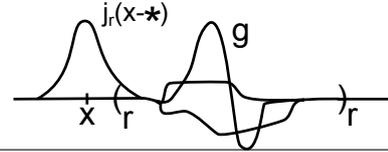
$$\forall x \notin \text{supp}(g) + B(0, r) : (J_r g)(x) = \int \underbrace{j_r(x-y)}_{0, \text{falls } y \notin B(x,y)} \underbrace{g(y)}_{0, \text{falls } y \in B(x,r)} dy = 0$$

Sei jetzt $f \in \mathcal{L}^1$ und $\varepsilon > 0$

Nach 1.1b ex. $\tilde{f} \in C_c^0$, $\|\tilde{f} - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nach 7.4c) ex. $r > 0$, sodass $\|J_r \tilde{f} - \tilde{f}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dann $\|J_r \tilde{f} - f\|_1 < \varepsilon$ und $J_r \tilde{f} \in C_c^\infty$



48 Beweis (Unterabschnitt 8.1):

$$x \mapsto \underbrace{e^{-i\langle \omega, x \rangle}}_{\text{st., also mbar}} \underbrace{f(x)}_{\text{mbar}}$$

$|\dots| = |f| \in \mathcal{L}^1$, also $x \mapsto e^{-i\langle \omega, x \rangle} f(x) \in \mathcal{L}^1$

\hat{f} st.; $e^{-i\langle \omega, x \rangle} f(x)$ st. also u. von ω bei festem x ; integrable Majorante $|f|$

St'keit \hat{f} folgt damit aus 4.9

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt^n} \underbrace{\int |e^{-i\langle \omega, x \rangle} f(x)| dx}_{= \|f\|_1} = \frac{1}{\sqrt^n} \|f\|_1 \Rightarrow a \text{ gezeigt.}$$

zu b: z.B. $n = 1$, $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$. $\hat{f}(\omega) \sim \frac{\sin(\omega)}{\omega}$, $\hat{f} \notin \mathcal{L}^1$, da $|f| \in \mathcal{L}^1$

49 Beweis (Unterabschnitt 8.3):

a) leicht: $f(\widehat{* - a})(\omega) = \frac{1}{\sqrt^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \omega, x \rangle} \underbrace{f(x-a)}_{=:y} dx = \frac{1}{\sqrt^n} \int e^{-i\langle \omega, y+a \rangle} f(y) dy = e^{-i\langle \omega, a \rangle} \hat{f}(\omega)$

b) $\widehat{f * g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \omega, x \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right) dx = \frac{1}{\sqrt^n} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \omega, x \rangle} f(x-y)g(y) dy \right)}_{=: \phi(x,y)} dx$

$$|\phi(x, y)| = |f(x-y)| |g(y)|$$

$$\int (\int |\phi(x, y)| dx) dy \text{ ex., } = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Nach Tonelli: $\phi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$.

Nach Fubini: $\widehat{f * g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \omega, x \rangle} f(x-y) dx \right) g(y) dy$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \omega, y \rangle} \hat{f}(\omega) \cdot g(y) dy = \sqrt^n \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$$

c) $\widehat{\partial_h f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt^n} \int e^{-i\langle \omega, x \rangle} (\partial_j f)(x) dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\sqrt^n} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \omega, x \rangle} (\partial_j f)(x) dx_j \right)}_{=: I(\omega, x)} dx_1 \dots \cancel{dx_j} \dots dx_n$

$$I(\omega, x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{-i\langle \omega, x \rangle} (\partial_j f)(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) dx_j$$

$e^{-i\langle \omega, x \rangle} \partial_j f(x) \cdot \mathbb{1}_{[-N, N]}(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-i\langle \omega, x \rangle} \partial_j f(x)$, integr. Majorante $|\partial_j f| \in \mathcal{L}^1$, also

Lebesguescher Konvergenzsatz

$$\dots = \lim_{\text{part. Int. } N \rightarrow \infty} \left\{ \underbrace{[e^{-i\langle \omega, x \rangle} f(x)]_{(x_1, \dots, \overset{\downarrow j}{N}, \dots, x_n)}_{(x_1, \dots, -N, \dots, x_n)}}_{\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{0}} + \int_{-N}^N e^{-i\langle \omega, x \rangle} f(x) dx_j \right\}$$

$$= i\omega_j \int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle \omega, x \rangle} f(x) dx_j$$

$$\text{Also } \widehat{\partial_j f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{R}^{n-1}}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} i\omega_j \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle \omega, x \rangle} f(x) dx_j \right) dx_1 \dots dx_{j-1} \dots dx_n \stackrel{\text{Fubini}}{=} i\omega_j \hat{f}(\omega)$$

d) Sei $x \mapsto x_j \cdot (x)$ in \mathcal{L}^1 . Mit $g(x, \omega) := e^{-i\langle \omega, x \rangle} f(x)$ ist $\frac{\partial}{\partial \omega_j} g(x, \omega) = -ix_j g(x, \omega)$, also $|\dots| \leq |x_j| \cdot |f| \in \mathcal{L}^1$

Somit nach Satz 4.10 (Diff. v. Parameter-Integralen): $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{R}^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \omega, x \rangle} f(x) dx =$

$\frac{1}{\sqrt{\mathbb{R}^n}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x, \omega) dx$ diffbar nach ω_j ,

$$\text{und } (\partial_j f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{R}^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \omega_j} g(x, \omega) dx = \frac{1}{\sqrt{\mathbb{R}^n}} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix_j) e^{-i\langle \omega, x \rangle} f(x) dx$$

$$= (x \mapsto -ix_j f(x))(\omega)$$

$$\text{Also } x \mapsto x_j \cdot f(x)(\omega) = (i\partial_j)(\hat{f})(\omega)$$

50 Beweis (Unterabschnitt 8.5):

a) leicht.

b) Für $f \in \mathcal{S}$ ist auf $x \mapsto \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 + 1\right)^n \cdot f(x) \in \mathcal{S}$, also ex. $C > 0$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : |f(x)|^p \leq \frac{C}{\underbrace{(\|x\|^2 + 1)^{np}}_{\in \mathcal{L}^1 \text{ als Fu v. } x, \text{ rot. sym}}}$$

$$((0, \infty) \ni r \mapsto r^{n-1} \cdot \frac{C}{(r^2+1)^{np}} \in \mathcal{L}^1 \leq Cr^{n-1-2n}$$

$$\text{Für } r \geq 1, = Cr^{-n-1} \leq \frac{C}{r^2}$$

f mbar. $|f|^p$ hat integr. Majorante $\Rightarrow |f|^p \in \mathcal{L}^1, f \in \mathcal{L}^p$

Unterraum klar.

c) Nach a), b): ALle Fu'n der Form $\underbrace{x^\alpha \cdot f(*)}_{\text{gemeint: } x \mapsto x^\alpha \cdot f(x)} \in \mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1$

Formel folgt induktiv aus 8.3d).

d) Alle $\partial^\alpha f$ und $\partial_j \partial^\alpha f$ sind in \mathcal{S} , also in $\mathcal{C}^0 \cap \mathcal{L}^1$ und erfüllen $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} (\partial^\alpha f)(x) = 0$

Beh. folgt induktiv aus 8.3c)

51 Beweis (Unterabschnitt 8.6):

Für $f \in \mathcal{S}, \omega \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ ist $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty$ nach 8.5c),

$$\text{und } |\omega^\beta \cdot (\partial^\alpha \hat{f})(\omega)| \stackrel{8.5c)}{=} |\omega^\beta (-i)^{|\alpha|} \underbrace{x^\alpha f(*)}_{=: g(x) \in \mathcal{S}}(\omega)| = |\omega^\beta \hat{g}(\omega)|$$

$$= \underbrace{|\partial^\beta g(\omega)|}_{\uparrow \in \mathcal{S}} \leq \|\partial^\beta g\|_1 = \|\partial^\beta (x \mapsto x^\alpha f(x))\|_1$$

Da β, α beliebig folgt: $\hat{f} \in \mathcal{S}$

52 Beweis (Unterabschnitt 8.7):

Klar für $f \in \mathcal{S}$, da dann $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

Sei jetzt $f \in \mathcal{L}^1$. Da $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1$ dicht bzgl. $\|\cdot\|_1$ (sogar $\mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{L}^1$ dicht)

ex. zu $\varepsilon > 0$: $g \in \mathcal{S}$, $\|g - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Es ex. $R > 0$ mit $\forall \omega \in \mathbb{R}^n$, $\|\omega\| \geq R$: $|\hat{g}(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Für diese ω folgt: $|\hat{f}(\omega)| = \underbrace{|\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega) + \hat{g}(\omega)|}_{\leq \|f-g\|_1 < \varepsilon/2} \leq \underbrace{|\widehat{(f-g)}(\omega)|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|\hat{g}(\omega)|}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon$

53 Beweis (Unterabschnitt 8.8):

Sei $\gamma(\omega) := \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} e^{-\|\omega\|^2/2}$ für $\omega \in \mathbb{R}^n$.

Dann $\hat{\gamma} = \gamma$. (vgl. Übung)

Für $r > 0, x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\int e^{i\langle \omega, x \rangle} \hat{f}(\omega) \gamma(r\omega) d\omega \xrightarrow{r \rightarrow 0} (\hat{f})^\vee(x) \quad (\text{int. Majorante } |\hat{f}| \in \mathcal{L}^1)$$

Andererseits: li. Seite = $\int e^{i\langle \omega, x \rangle} \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \left(\int e^{-i\langle \omega, y \rangle} f(y) dy \right) \cdot \gamma(r\omega) d\omega$

(Tonelli, Fubini) $\wedge \int (\inf |f(\omega)|) d\omega d\omega x. \Rightarrow$ li. Seite = $\int \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int e^{i\langle \omega, x-y \rangle} \cdot \gamma(r\omega) d\omega \right) f(y) dy$

$$\stackrel{r\omega=\eta}{=} \int \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \frac{1}{r^n} \int_{e^{-i\langle \frac{\eta-x}{r}, \eta \rangle}} e^{i\langle \eta, \frac{x-y}{r} \rangle} \gamma(\eta) d\eta \right) f(y) dy = \frac{1}{r^n} \int \underbrace{\hat{\gamma}\left(\frac{y-x}{r}\right)}_{\gamma\left(\frac{x-y}{r}\right)} f(y) dy = \int \underbrace{\frac{1}{r^n} \gamma\left(\frac{x-y}{r}\right)}_{=\gamma_r(x-y)} f(y) dy$$

$$= \underbrace{(\gamma_r * f)}_{\delta\text{-Schar}}(x)$$

Nach 7.2: $\|\gamma_r * f - f\|_1 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$. Nach 6.4 ex. Folge (r_k) , $r_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $\gamma_{r_k} * f \rightarrow f$ pw. f.ü.

Es folgt: $f = (\hat{f})^\vee$ f.ü. Falls f stetig, so weil auch $(\hat{f})^\vee$ stetig.

Beweis wie der, dass \hat{f} stetig, $f = (\hat{f})^\vee$

Vergleich mit physikalischer Rechentechnik:

$$\begin{aligned} (\hat{f})^\vee &= \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int e^{i\langle \omega, x \rangle} \hat{f}(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int e^{i\langle \omega, x \rangle} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int e^{-i\langle \omega, y \rangle} f(y) dy \right) d\omega \\ &= \int \underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle \omega, x-y \rangle} d\omega \right)}_{=\delta(x-y)} f(y) dy = \int \delta(x-y) f(y) dy = f(x) \end{aligned}$$

54 Beweis (Unterabschnitt 8.9):

\mathcal{F}_S ist wohldef. nach 8.5 und für $f \in \mathcal{S}$ ist $\hat{f} \in \mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1$, also, da f stetig, $f = (\hat{f})^\vee$. Somit

$f \mapsto \hat{f}$ inj., $f \mapsto \hat{f}$ surjektiv

$$\text{Wegen } \hat{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int e^{i\langle \omega, x \rangle} \hat{f}(\omega) d\omega = \overline{\frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int e^{-i\langle \omega, x \rangle} \overline{\hat{f}(\omega)} d\omega} = \overline{\hat{\hat{f}}(x)}$$

ist $f \mapsto \hat{f}$ auch injektiv.

Folgt $f \mapsto \hat{f}$, $f \mapsto \hat{\hat{f}}$ bijektiv invers zueinander auf \mathcal{S} .

55 Beweis (Unterabschnitt 8.10):

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_S f\|_2^2 &= \int \overline{\hat{f}} \hat{f} = \int \overline{\hat{f}}^\vee \hat{f} \stackrel{\vee}{=} \int \overline{\hat{f}} \hat{f} \\ &\stackrel{8.2e}{=} \int (\overline{\hat{f}}^\vee)^\wedge \stackrel{8.9}{=} \int \overline{\hat{f}} \hat{f} = \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

56 Beweis (Unterabschnitt 8.11):

zu a) Nach 8.4 für $p = 2$ ist $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^2$, $\|\cdot\|_2$ dicht.

Für $f \in \mathcal{L}^2$ ex. $(f_k) \subset \mathcal{S}$, $\|f_k - f\|_2 \rightarrow 0$.

Dann $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in L^2

Wegen $\|\hat{f}_k - \hat{f}_l\|_2 = \|f_k - f_l\|_2$ ist auch (\hat{f}_k) auch Cauchy-Folge in L^2 .

Nach Fischer-Riesz für $p = 2$: $\exists_1 g \in L^2 : \|\hat{f}_k - f\|_2 \rightarrow 0$

Definieren $\mathcal{F}f := g$ bzw. $\mathcal{F}f := \underline{g}$.

Dann \mathcal{F} wohldef., linear, Forts. von \mathcal{F}_S .

$$\left| \|\mathcal{F}f\|_2 - \underbrace{\|\hat{f}_k\|_2}_{=\|f_k\|_2 \rightarrow \|f\|_2} \right| \leq \|mFf - \hat{f}_k\|_2 = \|g - \hat{f}_k\|_2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

Also $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$

$(f_k \rightarrow f$ bzgl. $\|\cdot\|_2 \Rightarrow \|f_k\|_2 \rightarrow \|f\|_2$. Folgt aus $|\|f_k\| - \|f\|| \leq \|f_k - f\|$)

(Eindeutigkeit klar)

Surjektivität:

$Bild(\mathcal{F}) \subset Bild(\mathcal{F}_S) = \mathcal{S}$, und $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^2$ ist dicht.

(bzw. $\{f | f \in \mathcal{S}\} \subset L^2$ dicht)

Weiter: $Bild(\mathcal{F})$ ist abg. in \mathcal{L}^2 , also $Bild(\mathcal{F}) = \mathcal{L}^2$

Bgründung: Sei $(f_k) \subset Bild(\mathcal{F})$, $f_k \rightarrow f \in \mathcal{L}^2$

Dann (f_k) Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_2$ und $(\mathcal{F}^{-1}f_k)$ ist auch Cauchy-Folge in \mathcal{L}^2 , konv. gegen $g \in \mathcal{L}^2$

Es ist $\mathcal{F}g = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ (bzgl. $\|\cdot\|_2$)

Also $f \in Bild(\mathcal{F})$, Also $Bild(\mathcal{F})$ abg.

$$\mathcal{L}^2 \supset \mathcal{S} \xrightarrow[\mathcal{F}_m \mathcal{S}]{} \mathcal{S} \subset \mathcal{L}^2, \quad \mathcal{L}^2 \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \mathcal{L}^2 \text{ indiziert } \mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$$

zu b) Sei $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$

$f \cdot \mathbb{1}_{B(0,k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$ pw., auch bzgl. $\|\cdot\|_1$ un bzgl. $\|\cdot\|_2$, denn

$$\int_{\mathbb{R}} |f - f \cdot \mathbb{1}_{B(0,k)}|^p = \int_{\{x | |x| \geq k\}} |f|^p \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

Sei $\{J_r\}_{r>0}$ die Schar der Friedrichschen Glättungsoperatoren.

zu $k \in \mathbb{N}$ wähle $r_k > 0$ mit $\| \underbrace{J_{r_k}(f \cdot \mathbb{1}_{B(0,k)})}_{=: f_k} - f \cdot \mathbb{1}_{B(0,k)} \|_p < \frac{1}{k}$, $p = 1, 2$.

(vgl. Satz 7.3 und Bemerkung danach)

Dann $f_k \in \mathcal{C}_c^\infty \subset \mathcal{S}$

$$\|f_k - f\|_p \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad p = 1, 2.$$

Folgt: $\mathcal{F}f \stackrel{\text{bzgl. } \|\cdot\|_2}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k$ in \mathcal{L}^2

Andererseits $\|\hat{f}_k - \hat{f}\|_\infty \leq \|f_k - f\|_1 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$

Also $\hat{f}_k \rightarrow \hat{f}$ glm.

Damit: $\forall R > 0 : \|(\hat{f}_k - \mathcal{F}f) \cdot \mathbb{1}_{B(0,R)}\|_2 \rightarrow 0$, $\|(\hat{f}_k - \hat{f}) \cdot \mathbb{1}_{B(0,R)}\|_2 \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega} |f - g|^2 \leq \|f - g\|_\infty^2 \cdot Vol(\Omega)$$

Daraus folgt: $\mathcal{F}f = \hat{f}$ f.ü. auf $B(0, R)$.

Dies für alle $R > 0$, damit $\mathcal{F}f = \hat{f}$ f.ü.

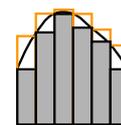
$\mathcal{F}^{-1}f = \hat{f}$ f.ü.: Analog.

57 Beweis (Unterabschnitt 9.1):

z.B.: Es ex. Treppenf'-Folgen (t_n^-) , (t_n^+) , sodass $t_n^- \leq t_{n+1}^- \leq f \leq t_{n+1}^+ \leq t_n^+$

(Beispiel hängt ab von der Def. des Riemann-Integral)

$R - \int_a^b (t_n^+ - t_n^-)(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ Dann $\tilde{t}_n^\pm \in \mathcal{L}^1$, $\mathcal{L} - \int \tilde{t}_n^\pm = R - \int_a^b \tilde{t}_n^\pm(x) dx$ (klar für Treppenf')



$(\tilde{t}_n^-) \subset \mathcal{L}^1$ wachsend, $\mathcal{L} - \int \tilde{t}_n^- = R - \int t_n^- \leq R - \int t_n^+ \leq R - \int t_1^+$

Nach Beppo-Levi: $\exists f^- \in \mathcal{L}^1$, $\tilde{t}_n^- \rightarrow f^-$ f.ü., $\mathcal{L} - \int \tilde{t}_n^- \rightarrow \mathcal{L} - \int f^-$

Analog: $\exists f^+ \in \mathcal{L}^1$, $\tilde{t}_n^+ \rightarrow f^+$ f.ü., $\mathcal{L} + \int \tilde{t}_n^+ \rightarrow \mathcal{L} - \int f^+$

$\mathcal{L} - \int |f^+ - f^-| = \mathcal{L} - \int (f^+ - f^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L} - \int \tilde{t}_n^+ - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L} - \int \tilde{t}_n^- = 0$

Also $f^+ = f^-$ f.ü.

Es ist $\tilde{t}_n^- \leq \tilde{f} \leq t_n^+ \forall n \in \mathbb{N}$, also

$f^- \leq \tilde{f} \leq f^+$ f.ü. Somit

$\tilde{t}_n^- \leq f^- \leq \tilde{f} \leq f^+ \leq \tilde{t}_n^+$ f.ü., also $\tilde{f} = f^+ = f^-$, deshalb $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ und

$\mathcal{L} - \int \tilde{f} = \mathcal{L} - \int f^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L} - \int \tilde{t}_n^- = \lim_{n \rightarrow \infty} R - \int t_n^- = R - \int f$

58 Beweis (Unterabschnitt 9.2):

„ \Rightarrow “: $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b : |f| \cdot \mathbb{1}_{[a,b]} \in \mathcal{L}^1$ (messbar, $|f|$ integr. Majorante)

und (1) $R - \int_a^b |f(x)| dx = \mathcal{L} - \int_{\mathbb{R}} |f| \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}$ nach 9.1

Nach Lebesgue gilt: (2) $\underbrace{\mathcal{L} - \int_{\mathbb{R}} |f| \mathbb{1}_{[a,b]}}_{= R - \int_a^b |f(x)| dx} \xrightarrow[a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty]{} \mathcal{L} - \int_{\mathbb{R}} |f|$

Also $|f| \in UR$, $UR - \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \mathcal{L} - \int_{\mathbb{R}} |f|$

„ \Leftarrow “: Es ist auch $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b : \|f\|_{[a,b]} \in R[a, b]$

(bekannt für Riemann-Int. vgl. Forster, Analysis 1)

Weiter nach 9.1: $f \cdot \mathbb{1}_{[a,b]} = f|_{[a,b]}$ mbar (sogar in $\mathcal{L}^1([a, b], \mathbb{R})$) und

$\mathcal{L} - \int \|f\|_{[a,b]} = R - \int_a^b |f(x)| dx \leq UR - \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$

Nach Beppo-Levi: $|f| \in \mathcal{L}^1$

Falls beide Seiten der Äqu. erfüllt, so f mbar, $|f|$ ist integr. Major., also $f \in \mathcal{L}^1$

(1) und (2) gelten somit auch mit f statt $|f|$. Daraus folgt: $f \in UR$, $UR - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \mathcal{L} - \int f$

59 Beweis (Unterabschnitt 10.1):

a) Satz:

$f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q$

$\Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{L}^1, \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ (Hölder-Ungl.)

\Rightarrow Beweis klar.

b) $\|\varphi_k\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = 1, \quad \langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)x} dx = 0, \text{ falls } k \neq l$

c) Falls f reellwertig, so $\hat{f}_{-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \overline{f(x)} dx = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx} = \overline{\hat{f}_k}$

60 Beweis (Unterabschnitt 10.2):

a) Beweis klar.

b) Lineare Algebra.

$$c) f = \underbrace{\sum_{|j| \leq k} \hat{f}_j \varphi_j}_{=: \pi_k f \in F_k} + f - \pi_k f;$$

$$\forall j \in \{-k, \dots, k\} : \langle \varphi_j, f - \pi_k f \rangle = 0$$

Also $f - \pi_k f \perp F_k$ Folgt: $\pi_k f = pr_k f$

Gleichung folgt aus Pythagoras

$$d) \forall k \in \mathbb{N}_0 : \sum_{j=-k}^k |\hat{f}_j|^2 \stackrel{Pythagoras}{=} \|pr_k f\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$$

Konvergenz von $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_j|^2$ und Bessel-Ungl. folgen**61 Beweis** (Unterabschnitt 10.6):O.E. $J = \mathbb{Z}$ (ii) \Leftrightarrow (iv) nach 10.4

$$(i) \Rightarrow (ii) \quad (i) \Leftrightarrow \|pr_k f - f\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Sei $f \in \mathcal{L}^2$, $pr_k f$ wie oben (orthog. Pr. von f auf $\overline{\text{span}\{\psi_j \mid |j| \leq k\}}$)

$$\| \underbrace{pr_k f}_{\in \text{span}\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}} - f \|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \text{ also } f \in \overline{\text{span}(\dots)}$$

(ii) \Rightarrow (iii) Sei $f \in \mathcal{L}^2$, $\forall j \in \mathbb{Z} : \langle \psi_j, f \rangle = 0$. Dann wegen

$$pr_k f = \sum_{|j| \leq k} \underbrace{\langle \psi_j, f \rangle}_{=0} \cdot \psi_j = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Es ex. Folge $(f_k) \subset \text{span}\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $\|f_k - f\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\text{Also } \|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \underbrace{\langle f, f_k \rangle}_{=0} + \langle f, f - f_k \rangle \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|f\|_2 \cdot \|f - f_k\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Also $\|f\|_2^2 = 0$, $f = 0$ f.ü. ($\underline{f} = \underline{0}$)(iii) \Rightarrow (i) Sei $f \in \mathcal{L}^2$. Nach der Bessel-Ungl. $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_j|^2$ konv.

$$\text{Daraus folgt wegen } \|pr_k f - pr_l f\|_2^2 = \left\| \sum_{|j|=k+1, \dots, l} \hat{f}_j \psi_j \right\|_2^2 = \sum_{|j|=k+1, \dots, l} |\hat{f}_j|^2 \leq \sum_{|j| \geq k+1} |\hat{f}_j|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

,dass $(pr_k f)$ Cauchy-Folge in \mathcal{L}^2 bilden. Nach Fischer-Riesz hat diese einen Limes $\tilde{f} \in \mathcal{L}^2$.Setze $g := f - \tilde{f}$.

$$\text{Dann } \forall j \in \mathbb{Z} : \langle \psi_j, g \rangle = \langle \psi_j, f \rangle - \langle \psi_j, \tilde{f} \rangle = \langle \psi_j, f \rangle - \langle \psi_j, \lim_{k \rightarrow \infty} pr_k f \rangle$$

$$\stackrel{\text{skpr. st bzgl } \|\cdot\|_2}{=} \langle \psi_j, f \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \underbrace{\langle \psi_j, pr_k f \rangle}_{\hat{f}_j = \langle \psi_j, f \rangle, \text{ falls } |j| \leq k} = 0$$

Somit $g=0$ f.ü. nach Vor. von (iii).

$$\text{Folgt } f = \tilde{f} \text{ f.ü. } \|pr_k f - f\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

62 Beweis (Unterabschnitt 10.7):

$$\hat{f}'_k = \frac{1}{\sqrt{v}} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{v}} \underbrace{\left(f(x)e^{-ikx} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx \right)}_{=0} = ikx \hat{f}_k$$

63 Beweis (Unterabschnitt 10.8):

Sei $\delta := b - a$. Dann $\hat{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{v}} \int_a^b 1 dx = \frac{\delta}{\sqrt{v}}$
 und für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist $|\hat{f}_k|^2 = \frac{1}{k^2 2\pi} (2 - 2 \cos(k\delta))$. Folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 &= \frac{\delta^2}{2\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2 - 2 \cos(k\delta))}{2\pi k^2} = \frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\frac{\pi^2}{6}} - \frac{2}{\pi} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\delta)}{k^2}}_{\left(\frac{\delta-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}} \\ &= \frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\delta^2 - 2\pi\delta + \pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right) = \delta + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \delta = \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

64 Beweis (Unterabschnitt 10.9):

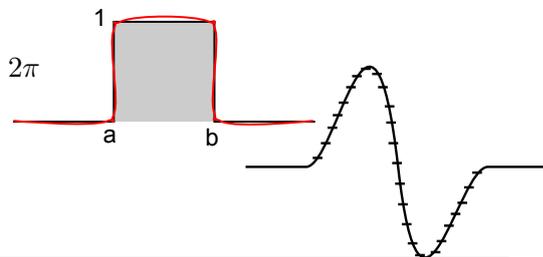
Sei $U := \overline{\text{span}\{\varphi_k | k \in \mathbb{Z}\}}$. Z.z.: $U = \mathcal{L}^2$

Nach 10.8 und 10.4: $\mathbb{1}_{[a,b]} \in U$ für alle a, b mit $0 \leq a < b \leq 2\pi$

Folgt: Treppenf'umn der Form $\sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{[a_j, b_j]}$ liegen in U .

Treppenf'u'n sind dicht in \mathcal{L}^2 , enthalten in $U \Rightarrow U = \mathcal{L}^2$

(\mathcal{C}_c^∞ dicht in \mathcal{L}^2 , Treppenf'u' dicht in \mathcal{C}_c^∞)



65 Beweis (Unterabschnitt 10.10):

Nach 10.7: $\hat{f}_k = \frac{1}{ik} \hat{f}'_k$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

Also $|\hat{f}_k| \leq \frac{1}{|k|} |\hat{f}'_k| \leq \frac{1}{k^2} + |\hat{f}'_k|^2$
 $|\alpha||\beta| \leq \alpha^2 + \beta^2$
 für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Wegen $\sum \frac{1}{k^2}$ konv. und $\sum |\hat{f}'_k|^2$ konv. (Bessel-Ungl.)

ist $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|$ konv.

Wegen $\|pr_k f\|_\infty = \left\| \sum_{j=-k}^k (x \mapsto \hat{f}_j e^{ijx}) \right\|_\infty \leq \sum_{j=-k}^k |\hat{f}_j|$

folgt aus de Majorantenkriterium von Weierstraß (Übg.):

($pr_k f$) konv. glm. gegen eine Grenzf'u. \tilde{f} .

Nach einem Satz Weierstraß (glm. limes stetiger Fu'n st.) ist \tilde{f} st.

Nach 10.9 gilt: $\|pr_k f - f\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ und wegen $\|pr_k f - \tilde{f}\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

auch $\|pr_k f - \tilde{f}\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Es folgt: $\|f - \tilde{f}\|_2 = 0$, $f = \tilde{f}$ f.ü., also

da f, \tilde{f} beide stetig, $f = \tilde{f}$.

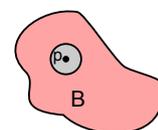
Also $\|pr_k f - f\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

66 Beweis (Unterabschnitt 11.1):

a) Sei $b \in M$. Es ex. Umg. B von $p \in M$ mit $u_j|_B \rightarrow u^*|_B$ glm. auf B .

Somit $u^*|_B$ stetig als glm. limes stetiger Fu'n

Da B Umg. von p folgt: u^* st. bei p



b) Induktion über k : für $k = 0$ schon gezeigt.

$k \rightarrow k + 1$: Sei $p \in M$, b Umg. von p , so dass $\forall \alpha, |\alpha| < k : (\partial^\alpha u_j)$ glm. konv. auf B

Nach Ind.-Annahme ist $u^* \in \mathcal{C}^k$ und $\partial^{\tilde{\alpha}} \rightarrow \partial^{\tilde{\alpha}} u^*$ für $|\tilde{\alpha}| < k$

Sei jetzt α Multiindex, $|\alpha| = k + 1$.

Es ex. $l \in \mathbb{N}$, so dass $\partial^\alpha = \partial_l \partial^{\tilde{\alpha}}$ mit einem Multiindex $\tilde{\alpha}$, $|\tilde{\alpha}| = k$

Setze $v_j := \partial^{\tilde{\alpha}} u_j$ ($j \in \mathbb{N}$), also $v_j \rightarrow \partial^{\tilde{\alpha}} u^*$.

Wegen $u_j \in \mathcal{C}^{k+1}$ ist $v_j \in \mathcal{C}^1$ und

$\partial_l v_j = \partial_k \partial^{\tilde{\alpha}} u_j = \partial^\alpha u_j$ konvergieren glm. auf B gegen eine st. Grenzf. w .

Für $x \in B$, $\varepsilon > 0$ klein genug ist $\partial^{\tilde{\alpha}} u^*(x + \varepsilon e_l) - \partial^{\tilde{\alpha}} u^*(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} (\partial^{\tilde{\alpha}} u_j(x + \varepsilon e_l) - \partial^{\tilde{\alpha}} u_j(x))$

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^\varepsilon \partial_l v_j(\underbrace{x + s e_l}_{\in B}) ds \stackrel{\text{glm. konv. auf } B}{=} \int_0^\varepsilon w(x + s e_l) ds$$

Folgt: $\underbrace{\partial_l \partial^{\tilde{\alpha}} u^*(x)}_{=\partial^\alpha u^*}$ ex., $= w(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \partial^\alpha u_j(x)$ (Beh. für $k+1$)

67 Beweis (Unterabschnitt 11.2):

$$\text{Nach 10.7 ist } c_k = \hat{f}_k \stackrel{f(0)=f(2\pi)}{=} \frac{1}{ik} \hat{f}'_k \stackrel{f'(0)=f'(2\pi)}{=} \frac{1}{(ik)^2} \hat{f}''_k = \dots = \frac{1}{(ik)^r} \hat{f}^{(r)}_k = \frac{1}{(ik)^r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{-ikx} f^{(r)}(x)}_{|\cdot| \leq \|f^{(r)}\|_\infty} dx$$

$$\text{Somit } |c_k| \leq \frac{1}{|k|^r} \sqrt{2\pi} \|f^{(r)}\|$$

68 Beweis (Unterabschnitt 12.1):

Sei $Ly = -\lambda \rho y$, $Lz = \mu \rho z$. Dann

$$\langle Ly, z \rangle_{\mathcal{L}^2(I)} = \int_I ((py)') - qy)z = \underbrace{[py'z]_{Rand}}_{=0} - \int_I py'z' - \int_I qyz$$

$$= \underbrace{[pyz']_{Rand}}_{=0} + \int_I ((pyz')' - qyz) = \langle y, Lz \rangle_{\mathcal{L}^2(I)}$$

$$\text{Somit } \langle Ly, z \rangle = \langle -\lambda \rho y, z \rangle_{\mathcal{L}^2} - \lambda \langle \rho y, z \rangle = \langle y, Lz \rangle_{\mathcal{L}^2}$$

$$= -\mu \langle y, \rho z \rangle_{\mathcal{L}^2} = -\mu \langle y, z \rangle_{\mathcal{L}^2(\cdot, \rho)} = -\lambda \langle y, z \rangle_{\mathcal{L}^2(i, \rho)}$$

Folgt, falls $\lambda \neq \mu : \langle y, z \rangle_{\mathcal{L}^2(I, \rho)} = 0$

69 Beweis (Unterabschnitt 14.2):

a) Sei $f, g \in \overline{A}$, $\Rightarrow \exists$ Folgen $f_n, g_n \in A \mid f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$

$$\Rightarrow \|f_n g_n - f g\| \leq \|f_n(g_n - g)\| + \|(f_n - f)g\|$$

$$\leq \|f_n\| \cdot \|g_n - g\| + \|f_n - f\| \cdot \|g\| \rightarrow 0, \text{ d.h. } f \cdot g \in \overline{A}$$

b) Wir zeigen zunächst: $\forall \varepsilon > 0 \exists$ Polynom $Q^\varepsilon \in \mathbb{R}[x] \mid \|Q^\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [-1, 1]$

$$\text{Beweis: } \sqrt{t^2 + r} \xrightarrow{\text{glm. } r \rightarrow 0} \sqrt{t^2} = |t| \text{ auf } [-1, 1]$$

$$\text{D.h. } \forall \varepsilon > 0 \exists r_\varepsilon > 0 \mid \sqrt{t^2 + r_\varepsilon} - |t| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Sei } \varphi_\varepsilon(u) = \sqrt{u + r_\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \varphi_\varepsilon \text{ hat Taylorentwicklung um } u_0 = \frac{1}{2}$$

$$\varphi_\varepsilon(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\varphi_\varepsilon^{(n)}}{n!} (u - \frac{1}{2})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} Q^\varepsilon(u)$$

Die Taylor-Reihe konv. glm. auf $[0, 1]$ gegen φ_ε und $Q_n^\varepsilon \in \mathbb{R}[x]$

$$\Rightarrow Q_n^\varepsilon(t^2) \xrightarrow{\text{glm.}} \sqrt{t^2 + r_\varepsilon} \quad \forall t \in [-1, 1]$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists N_\varepsilon > 0 \mid \|Q_{N_\varepsilon}^\varepsilon(t^2) - \sqrt{t^2 + r_\varepsilon}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow \|Q_{N_\varepsilon}^\varepsilon(t^2) - |t|\|_\infty < \varepsilon \\ &\text{A abg., } f \in A \Rightarrow Q_{N_\varepsilon}^\varepsilon(f) \in A \wedge Q_{N_\varepsilon}^\varepsilon(f) - |f| \xrightarrow{\text{glm. } \|\cdot\|_\infty} 0 \\ &\text{d.h. } |f| \in \bar{A} = A. \quad \forall f, g \in A, \quad f \vee g = \frac{1}{2}\{f + g + |f - g|\} \in \bar{A} \end{aligned}$$

70 Beweis (Unterabschnitt 14.3):

Es ist $\bar{A} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ abg. Subalgebra nach Lemma 14.2

Behauptung: $\forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \forall (p, q) \in X^2 \exists f_{pq} \mid f_{pq}|_{\{p,q\}} \equiv f|_{\{p,q\}}$

Beweis:

$$\forall p = q : \int pq := \underbrace{f(p)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{1}}_{\in A} \in A$$

$\forall p \neq q : \exists \tilde{f}_{pq} \in A \mid \tilde{f}_{pq}(p) \neq \tilde{f}_{pq}(q)$, da A punktetrennend

$$\text{Sei } f_{pq}(x) = \frac{f(q) - f(p)}{\tilde{f}_{pq}(q) - \tilde{f}_{pq}(p)} \left(\underbrace{\tilde{f}_{pq}(x)}_{\in A} - \underbrace{\tilde{f}_{pq}(p)}_{\in A} \right) \mathbb{1} + \underbrace{f(p)}_{\in A} \mathbb{1} \in A$$

$$\text{Da } f_{pq}(p) = f(p), \quad f_{pq}(q) = f(q)$$

Sei ε , dann def.:

$$U_{pq} := \{x \in X \mid r_{pq} < f(x) + \varepsilon\} \subset X \text{ offen, da } f_{pq} - f \text{ stetig}$$

$$V_{pq} := \{x \in X \mid r_{pq} > f(x) + \varepsilon\} \subset X \text{ offen, da } f_{pq} - f \text{ stetig}$$

$$\{p, q\} \subset U_{p,q} \cap V_{p,q}, \quad \forall (p, q) \in X^2$$

$$\Rightarrow \bigcup_{q \in X} U_{pq} \supset \bigcup_{q \in X} \{q\} = X$$

d.h. $\{U_{pq} \mid q \in X\}$ ist offene Überdeckung von X

$$\implies \exists \text{ endliche Teilüberdeckung } \{U_{pq_k} \mid k = 1, \dots, n\}$$

$$\overset{\text{A Nach Lemma 14.2b}}{\implies} \exists f_p := \bigwedge_{k=1}^n f_{pq_k} = \min_{k=1, \dots, n} f_k < f + \varepsilon \text{ auf } g \text{ aus } X = \bigcup_{k=1}^n U_{pq_k}$$

$$\text{Und } f_p > f - \varepsilon \text{ auf } V_p = \bigcap_{k=1}^n V_{pq_k} \text{ ist offen } \mid p \in V_p, \text{ da}$$

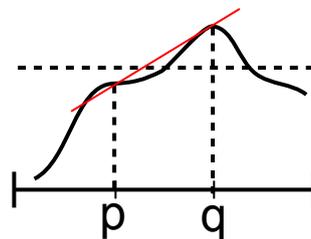
$$f_p(p) = \bigwedge_{k=1}^n f_{pq_k}(p) = f(p)$$

d.h. $\{V_p \mid p \in X\}$ ist offene Überdeckung von X

$$\Rightarrow \exists \text{ endl. Teilüberdeckung } \{V_{p_j} \mid j = 1, \dots, m\}$$

$$\Rightarrow \bar{A} \ni \tilde{f} := \bigvee_{j=1}^m f_{p_j} < f + \varepsilon \quad \text{d.h. } \|\tilde{f} - f\|_\infty < \varepsilon$$

$$\text{d.h. } \bar{A} \text{ liegt dicht in } \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \text{ d.h. } A \text{ dicht.}$$



71 Beweis (Unterabschnitt 14.4):

$\mathbb{R}[x] \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ist Subalgebra, da $\mathbb{R}[x]$ mult. abgeschl., $\mathbb{1} : x \mapsto 1 \in \mathbb{R}[x]$

$$\forall p, q \in [a, b] \mid p \neq q : \text{Id}[A, B] \Rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$$

$$\Rightarrow \text{Id}(p) = p \neq q = \text{Id}(q)$$

72 Beweis (Unterabschnitt 14.4):

Sei $\mathbb{P} := \text{span}\{P_l \mid l \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}^2 := \mathcal{L}^2([-1, 1], \mathbb{R})$.

Behauptung: $\bar{\mathbb{P}} = \mathcal{L}^2$ (bzgl. $\|\cdot\|_2$, d.h., \mathbb{P} dicht in $(\mathcal{L}^2, \|\cdot\|_2)$,

Legendre Polynome vollständig ONS in \mathcal{L}^2)

Beweisskizze: $\mathbb{P} = \text{span}(1, x, x^2, \dots)$ (klar)

Sei $f \in \mathcal{L}^2$, $\varepsilon > 0$. E ex. $\tilde{f} \in \mathcal{C}_c^0$, $\text{supp}(f) \subset (-1, 1)$, $\|\tilde{f} - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$

Zu \tilde{f} ex. Polynomfu' $\tilde{\tilde{f}}$ (nach Weierstraß) mit $\|\tilde{\tilde{f}} - \tilde{f}\|_{\infty, [-1,1]} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$

$$\text{Also } \|\tilde{\tilde{f}} - f\|_2^2 = \int_{-1}^1 \underbrace{|\tilde{\tilde{f}}(x) - \tilde{f}(x)|^2}_{\leq \|\tilde{\tilde{f}} - \tilde{f}\|_{\infty}^2} dx \leq \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad \|\tilde{\tilde{f}} - f\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Also $\|\tilde{\tilde{f}} - f\|_2 < \varepsilon$. Also $\mathbb{P} = \mathcal{L}^2$

$$\langle u', \varphi \rangle_{\mathcal{L}^2} = - \langle u, \varphi' \rangle_{\mathcal{L}^2}$$

Falls $\varphi \in \mathcal{C}_c^0$, $u \in \mathcal{C}^1$

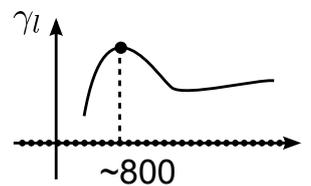
$$\langle \mathcal{D}u, \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$$

$$H^1 := \{u \in \mathcal{L}^2 \mid \mathcal{D}u \text{ ex.}, \mathcal{D}u \in \mathcal{L}^2\}$$

$$W^{p,k} := \{u \in \mathcal{L}^2 \mid \mathcal{D}u, \mathcal{D}^2u, \dots, \mathcal{D}^k u \text{ ex.}, \text{ sind in } \mathcal{L}^p\}$$

$$W^{2,k} := H^k, \quad H_0^1 := \overline{\mathcal{C}_c^\infty}^{\|\cdot\|_{H^1}} \subset H^1$$

$$\|u\|_{H^1} := \|u\|_{\mathcal{L}^2} + \|\mathcal{D}u\|_{\mathcal{L}^2}$$



$$\sum(x) = \sum \gamma_l P_l(x)$$

$$x \in (-1, 1]$$

$$0 \leq l \leq 2000$$

73 Beweis (Unterabschnitt 15.3):

„ \Rightarrow “: bekannt.

„ \Leftarrow “: Polarisierung:

Im Rellen Fall: $\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$

Im kplexen Fall: $\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$

Beweis im reellen Fall:

1. \langle, \rangle additiv im 1. Argument.

Z.z.: $\|x + x' + y\|^2 - \|x + x' - y\|^2 = (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + (\|x' + y\|^2 - \|x' - y\|^2)$

Ab jetzt $|\cdot|$ statt $\|\cdot\|$ aus wirtschaftlichen Gründen

Es ist $|x + x' + y|^2 \stackrel{\text{Parallelogr.gl.}}{=} \begin{cases} 2|x + y|^2 + 2|x'|^2 - |x - x' + y|^2 & (a) \\ 2|x + y|^2 + 2|x|^2 - |x' - x + y|^2 & (b) \end{cases}$

$|x + x' - y|^2 = \begin{cases} 2|x - y|^2 + 2|x'|^2 - |x - x' - y|^2 & (a') \\ 2|x' - y|^2 + 2|x|^2 - |x' - x - y|^2 & (b') \end{cases}$

li.S. = $\frac{a+b}{2} - \frac{a'+b'}{2} = \text{re.S.}$

2. Folgt $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ für $\alpha \in \mathbb{N}^2$ (*)

Mit $\langle -x, y \rangle = - \langle x, y \rangle \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$

Für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$: $q \langle \frac{p}{q} x, y \rangle \stackrel{(*)}{=} \langle q \frac{p}{q} x, y \rangle = \langle px, y \rangle = p \langle x, y \rangle$

Also $\langle \frac{p}{q} x, y \rangle = \frac{p}{q} \langle x, y \rangle$

\langle, \rangle ist stetig (bzgl. der von $\|\cdot\|$ induzierten Metrik auf $E \times E$)

$\Rightarrow \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ auch für $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht)

3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

Rest klar.

4. Im komplexen Fall: ähnliche Rechnung

74 Beweis (Unterabschnitt 15.6):

zu a): 1. Mit Bilinearität von \langle, \rangle : $\text{span}(M) \perp \text{span}(N)$

2. Seien $(x_n) \subset \text{span}(M)$ und $(y_n) \subset \text{span}(N)$ Folgen, $x_n \rightarrow x^*$, $y_n \rightarrow y^*$

$$\begin{aligned} \langle x^*, y^* \rangle &= \langle \lim x_n, \lim y_n \rangle & &= \lim \langle x_n, y_n \rangle = 0 \\ & & & \text{<, > stetig} \\ & & & |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x^*, y^* \rangle| \\ & & & = |\langle x_n - x^*, y_n \rangle + \langle x^*, y_n - y^* \rangle| \\ & & & \leq \underbrace{\|x_n - x^*\|}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\|y_n\|}_{\rightarrow \|y^*\|} \end{aligned}$$

zu b): Uraum klar.

$$M \perp M^\perp, \text{ also } M \perp \overline{M^\perp}, \text{ also } M^\perp \subset \overline{M^\perp}, M^\perp \text{ abg.}$$

75 Beweis (Unterabschnitt 15.8):

Mit U gemäß Riesz'sches Lemma setze $u^\perp := x - u$. Dann $x = u + u^\perp$

Beh.: $u^\perp \perp U$

Sei $y \in U$. Betrachte $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \|\underbrace{u + ty - x}_{\in U}\|^2$

φ hat min bei $t = 0$.

Es ist $\varphi(t) = \langle u - x + ty, u - x + ty \rangle = \langle u^\perp + ty, u^\perp + ty \rangle = \|u^\perp\|^2 + 2t\Re(\langle u^\perp, y \rangle) + t^2\|y\|^2$

Also $\Re(\langle u^\perp, y \rangle) = 0$

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Analoge Rechnung mit $\langle u^\perp - ity, u^\perp - ity \rangle$ zeigt: $\Im(\langle u^\perp, y \rangle) = 0$

Also $\forall y \in U : u^\perp \perp y$, also $u^\perp \in U^\perp$

Zur Eindeutigkeit: Falls $x = \underbrace{u}_{\in U} + \underbrace{u^\perp}_{\in U^\perp} = \underbrace{v}_{\in U} + \underbrace{v^\perp}_{\in U^\perp}$, so $\underbrace{u - v}_{=v^\perp - u^\perp \in U^\perp} \in U \cap U^\perp \stackrel{<, > \text{ pos def}}{=} \{0\}$, also $u = v$, $u^\perp = v^\perp$

76 Beweis (Unterabschnitt 15.9):

Zu a): Für abg. Uraum U: U vollst., da H vollst.

$H = U + U^\perp$ nach Projektionssatz, $U \subset (U^\perp)^\perp$ und U^\perp ist abg. Uraum, auch vollst.

$\Rightarrow H = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp = (U^\perp)^\perp \oplus U^\perp$.

Folgt: $U = (U^\perp)^\perp$

Zu b): Nach 15a): $M^\perp = \overline{\text{span}(M)}^\perp$.

Also $(M^\perp)^\perp = \overline{(\text{span}(M)^\perp)}^\perp \stackrel{a)}{=} \overline{\text{span}(M)}$, Rest klar.

77 Beweis (Unterabschnitt 15.10):

zu b): Falls T st. bei 0 und $x \in E$, $x_n \rightarrow x$ ($|x_n - x|_E \rightarrow 0$), so st

$$|Tx_n - Tx|_F = |T(\underbrace{x_n - x}_{\rightarrow 0})|_F \xrightarrow{\substack{T \text{ st b 0} \\ T(0)=0, \text{ da} \\ T \text{ linear}}} 0$$

Also T st. (Erste Äquivalenz gezeigt)

zweite Äquivalenz:

„ \Leftarrow “: Absch. $\Rightarrow T$ bei 0 st. $\Rightarrow T$ st.

„ \Rightarrow “: Da T st. bei 0 ex, $r > 0 : \forall x \in |x|_E \leq r : |x|_F \leq 1$

Falls $y \in E$ beliebig, $y \neq 0$, so $|Ty|_F = |T(\frac{ry}{|y|_E})|_F \cdot \frac{|y|_E}{r} \leq \frac{1}{r}|y|_E$

($|Tx - Ty|_F = |T(x - y)|_F \leq c|x - y|_E$)

78 Beweis (Unterabschnitt 15.12):

1. Falls $\varphi = 0$, so klar. ($x := 0$)

Sei $\varphi \neq 0$. Dann $\text{Ker}(\varphi)$ abg. (Also st. Urbild von $\{0\} \in \mathbb{K}$) und $\text{Ker}(\varphi) + H$ hat Kodim 1.

Nach Proj.Satz: $H = \text{Ker}(\varphi) \oplus (\text{Ker}(\varphi))^\perp$.

Sei $e \in (\text{Ker}(\varphi))^\perp$, $\varphi(e) = 1$.

Man kann zeigen, dass $\forall y \in H : \varphi(y) = \langle \frac{e}{\|e\|_H^2}, y \rangle$

Dann $\forall y \in H :$

$$y = \underbrace{\varphi(y)e}_{\in \text{Ker}(\varphi)^\perp} + \underbrace{(y - \varphi(y)e)}_{\in \text{Ker}(\varphi)}, \text{ also}$$

$$0 = \langle e, y - \varphi(y)e \rangle = \langle e, y \rangle - \varphi(y) \underbrace{\langle e, e \rangle}_{=\|e\|_2^2}$$

$$\varphi(y) = \langle \frac{e}{\|e\|_H^2}, y \rangle, \quad x := \frac{e}{\|e\|_H^2}$$

Weiter $\|\varphi\|_{H^*} = \sup_{\|y\|_H \leq 1} |\varphi(y)| = \sup_{\|y\|_H \leq 1} |\langle x, y \rangle| \stackrel{\text{Cauchy-Schw}}{\leq} \|x\|_H \cdot 1 = \|x\|_H$

$$\|\varphi\|_{H^*} \geq |\langle x, \frac{x}{\|x\|_H} \rangle| = \|x\|_H, \text{ also } \|\varphi\|_{H^*} = \|x\|_H$$

Zur Eindeutigkeit:

Falls $\varphi = \langle x, * \rangle = \langle \tilde{x}, * \rangle$, so $\forall y \in H : \langle x, y \rangle = \langle \tilde{x}, y \rangle$, also $\langle x - \tilde{x}, y \rangle = 0$, also $\langle x - \tilde{x}, x - \tilde{x} \rangle = \|x - \tilde{x}\|_H^2 = 0 \Rightarrow x = \tilde{x}$

79 Beweis (Unterabschnitt 15.14):

$$\begin{aligned} \langle x, ty \rangle &= \iota(x)(Ty) = (\iota(x) \circ T)(y) = (T^* \iota(x))(y) \\ &= (\iota \circ T^\dagger)(x)(y) = \iota(T^\dagger(x))(y) = \langle T^\dagger(x), y \rangle \end{aligned}$$

80 Beweis (Unterabschnitt 15.17):

1. Seien y, \tilde{y} zu x aus H wie in der Def. von $D(T^\dagger)$.

Dann $\forall z \in D(T) : \langle y, z \rangle = \langle \tilde{y}, z \rangle$

also $\forall z \in D(T) : \langle y - \tilde{y}, z \rangle = 0$. Also $y - \tilde{y} \perp D(T)$, somit auch (15.6)

$y - \tilde{y} \perp D(T)$

$D(T) = H$, da $D(T)$ dicht ist, also $y = \tilde{y}$

2. Falls $x_1, x_2 \in D(T^\dagger)$, $y_i := T^\dagger x_i$, $i = 1, 2$

so $\langle x_1 + x_2, Tz \rangle = \langle y_1 + y_2, z \rangle \quad \forall z \in D(T)$

$\langle 2x_1, Tz \rangle = \langle \lambda y_1, z \rangle \quad \forall z \in D(T)$, somit $x_1 + x_2, \lambda \cdot x_1 \in D(T^\dagger)$, T^\dagger linear

81 Beweis (Unterabschnitt 15.18):

„ \Rightarrow “: Sei T symmetrisch. Dann $\forall \varphi, \psi \in D(T) : \langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T\varphi, \psi \rangle$, also

$\varphi \in D(T^\dagger)$, $T^\dagger \varphi = T\varphi$. Also $D(T) \subset D(T^\dagger)$, $T^\dagger = T$ auf $D(T)$

$T \subset T^\dagger$

„ \Leftarrow “: Falls $T \subset T^\dagger$, so $D(T) \subset D(T^\dagger)$, $\forall \varphi \in D(T) : T^\dagger \varphi = T\varphi$, also:

$\forall \varphi \in D(T) \forall \psi \in D(T) : \langle \varphi, T\psi \rangle = \langle T^\dagger \varphi, \psi \rangle = \langle T\varphi, \psi \rangle$

Also T symmetr.

Stichwortverzeichnis

Symbols

δ -Schar	13
\mathbb{K} -Algebra	27
σ -Algebra	8
(Lebesgue-)mbar	9

A

adjungierter Operator	31
Anfangs-Randwert-Problem	20

B

Besselsche Ungleichung	18
Bodensee-Eigenschwingung	24
Bolzano Weierstraß	35

C

Cauchy-Schwarz	29
----------------------	----

D

dicht definiert	32
Differentialoperator	19
Dirichlet-Laplace-Operator	19
duales Spektrum	33

E

Eigenfunktionen	24
Eigenwerte	24
Eigenwerte von T	32
Einspannbedingung	22
Entkoppeltes System	19
Entkopplung	24

F

fast überall	2
Fourtransformierte	14
Fundamentalfolge	1
Funktionenfamilie	13

G

Gewichtsfunktion	24
Glättungsschar	13
Glattheitseigenschaften	21

H

Hermit-Polynome	25
-----------------------	----

hermitisch	31, 32
Hilbert-Basis	18, 19

I

Integrable Majorante	7
----------------------------	---

K

Komplexifizierung	33
kontinuierliches Spektrum	32
Konvergenzeigenschaften	20

L

Laguerre Polynome	25
Laplace-Operator	19
Lebesgue-Maß	4, 8–10
Lebesgue-messbar	8
Lebesgue-Nullmengen	8
Lebesguesche Nullmenge	1
Legendre Polynome	25
Linearität	1

M

Maß	4
messbar	8
Monotonie	1

N

negativer Anteil	1
nicht vollständig	8
Nullmenge	1

O

ODE: gewöhnliche DGL	19
ONB	12, 18
ONS	17
orthogonale Projektion	17
Orthogonalität	29
Orthonormalbasis	18

P

Parsevalsche Gleichung	18
positiver Anteil	1
Prä-Hilbertraum	29
punktetrennend	27
Punktspektrum	32

R

Randbedingungen	19
Resolvente	32
Resolventenmenge	32
Riemann-Stieltjes-Integral	3

S

schwache Ableitung	25
Schwingende Membran	23
schwingende Saite	21
selbstadjungiert	31, 32
Seminorm	3
separabler Hilbertraum	12
Sinus-Entwicklung	21
Sobolev-Raum	26
Sololev'scher Einbettungssatz	26
Sololev-Raum	26
Spektrum	32
Sturm-Liouville-Eigenwertproblem	24
Subalgebra	27
symmetrisch	31, 32

T

triviale Fortsetzung	4
Tschebyscheff Polynome	25

U

unitär	16
unitäres Produkt	28
UR	16

V

verall. Fourier-Reihe	12
Vervollständigung	8
vollständiges ONS	18
Volumen	4

W

Wärmeleitungsgleichung	20, 24
------------------------------	--------