1 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 20.4.2011

1.1 Aufgabe

1.2 Aufgabe

Definition:

$N \subset \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge $\Leftrightarrow \exists (u_j) \subset \mathcal{L}\ FF.$,
sodass $\forall x \in N : u_j(x) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} \infty$

Sei nun $(u_j)(x) = j$.

Dann ist (u_j) FF. in $\{x_0\}$, da $(u_j) = j \leq j + 1 = (u_{j+1})$ und $\int\limits_{x_0}^{x_0} j = 0$

Da nun auch (u_j) unabh. v. x, ist $\forall x \in \{x_0\} \lim\limits_{j\to\infty} j = \infty$. Damit ist $\{x_0\}$, also alle einpunktigen Mengen, Nullmenge.

1.3 Aufgabe

Damit (h_j) FF., muss $(h_j) \subset \mathcal{L}$ und $h_j \leq h_{j+1}$ und $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \int h_j < \infty$.

$h_j := \max(f_j, g_j) = \frac{f_j+g_j}{2} + \frac{|f_j-g_j|}{2}$ mit f, g FF.
Durch die Linearität des Lebeque-Integrals folgt: $h_j \in \mathcal{L}$. (faktor reell, Summand $\in \mathcal{L} \Rightarrow h_j \in \mathcal{L}$)
Da f_j, g_j FF. gilt $f_j \leq f_{j+1}$ und $g_j \leq g_{j+1}$.
Damit $h_j \leq h_{j+1}$ muss gelten $\max(f_j, g_j) \leq \max(f_{j+1}, g_{j+1})$

Fall 1: $f_j \geq g_j \Rightarrow f_j \overset{!}{\leq} \max(f_{j+1}, g_{j+1})$:
Falls $f_{j+1} \geq g_{j+1}$, dann richtig, da $f_j \leq f_{j+1}$
Sonst falsch wenn $f_j > g_{j+1} \geq f_{j+1} \Rightarrow$ Widerspruch zu $f_j \leq f_{j+1}$
$\Rightarrow$ für Fall 1 richtig.

Fall 2: $f_j < g_j \Rightarrow g_j \overset{!}{\leq} \max(f_{j+1}, g_{j+1})$:
Falls $g_{j+1} \geq f_{j+1}$, dann richtig, da $g_j \leq g_{j+1}$
Sonst falsch wenn $g_j > f_{j+1} \geq g_{j+1} \Rightarrow$ Widerspruch zu $g_j \leq g_{j+1}$
$\Rightarrow$ für Fall 2 richtig.

Also $h_j \leq h_{j+1}$.
Es gilt für $(f_j) : \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \int f_j < \infty$ bzw. entspr. für (g_j)
Also auch $\forall f_j \in (f_j) : \int f_j < \infty \quad \wedge \quad \forall g_j \in (g_j) : \int g_j < \infty$
Also gilt es für eine beliebige Kombination von Elementen aus (f_j) und (g_j) ebenfalls.
$\Rightarrow \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \int h_j < \infty$
Also (h) FF.

1.4 Aufgabe

Man benutze eine rekursiv gebildete Summe aus Gauß-Kurven (u_j), um sich der δ-Distribution anzunähern:
$u_1(x) := 0$
$u_j(x) := \frac{1}{j^2} \cdot \sqrt{\frac{j}{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2 j}{2}} + u_{j-1}(x)$
Da wir $u_{j-1}(x)$ addieren, ist $u_j \leq u_{j+1}$
Der 1. Summand entspricht dabei stehts der einer Bildungsvariante der Delta-Funktion$\cdot \frac{1}{j^2}$.
Somit addieren wir immer kleiner (wegen Vorfaktor) werdende Teilstücke auf.
Da diese Summe konvergiert $(\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{j^2} \cdot 1 \underset{h \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6})$ ist $\sup_{j \in \mathbb{N}} \int u_j < \infty$.
Im letzten Schritt addieren wir die delta-Funktion mit Faktor, also divergiert die Funktion. Da Sie für alle Werte aus $\mathbb{R}$ definiert ist, auch auf $\mathbb{Q}$

1.5 Aufgabe

Sei N die Menge der Elemente in U bzw. $N = \int_U sgn(x)dx$
Dann sei Quadrat Q(„Mittelpunkt“,Seite)
Damit $\forall x \in U \exists Q_j(x, \sqrt{\frac{\varepsilon}{N+1}})$ $(j \in \mathbb{N})$. Dieses Quadrat beinhalet jeweils u.a. x
Da um alle x ein Quadrat existiert ist $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q \supset U$
$vol(Q_j) := Q_j.Seite^2$. Also ist $\sum_j vol_n(Q_j) = \sum_j Q_j.Seite^2 = \sum_j \sqrt{\frac{\varepsilon}{N+1}}^2 = \sum_j \frac{\varepsilon}{N+1}$
Wobei Summe über j alle Quadrate anspricht und N die Anzahl der Mittelpunkte der Quadrate angibt.
Also $\sum_j \frac{\varepsilon}{N+1} = \varepsilon \frac{N}{N+1} \leq \varepsilon$ (wie per Definition gefordert).
Damit ist U Nullmenge.