19/20

1 Übungsblatt von Informatik 3 zum Mittwoch, den 27.4.2011

1.1 Aufgabe

a) Sei $A = \sum_{i=1}^{10} ia_i$ und $B = \sum_{i=1}^{10} ib_i$ mit $b_i = a_i$ außer bei b_j, $j \in \{2, ..., 10\}$ 8/9

Es gilt: A und B sind gültige ISBN-Nummern, $a_j \neq b_j$

Sei nun $a_1 = b_1$ (Prüfziffer, also Veränderung nicht erkennbar).

Dann muss $A = \sum_{i=1}^{10} ia_i \mod 11 = 0$ und $B = \sum_{i=1}^{10} ib_i \mod 11 = 0$,

also auch $(A - B) \mod 11 = 0$

$A - B = (a_1 - b_1) \cdot 1 + ... + (a_j - b_j) \cdot j + ... + (a_{10} - b_{10}) \cdot 10$

$= (a_1 - a_1) \cdot 1 + ... + (a_j - b_j) \cdot j + ... + (a_{10} - a_{10}) \cdot 10 = (a_j - b_j) \cdot j$

Also muss gelten $(a_j - b_j) \cdot j \mod 11 = 0$.

Da 11 Primzahl muss also $(a_j - b_j) \mod 11 = 0$ oder $j \mod 11 = 0$.

Da $j \in \{2, ..., 10\} \not\supset \{0, 11\}$ und $(a_j - b_j) \in \{-10, ..., -1, 1, ..., 10\} \not\supset \{0, 11\}$ ist

also $(a_j - b_j) \cdot j \mod 11 \neq 0$

Damit also $a_1 \neq b_1$, also Änderung einer Ziffer erkennbar.

b) Sei $A = \sum_{i=1}^{10} ia_i$ und $B = \sum_{i=1}^{10} ib_i$, mit $b_i = a_i$

außer bei b_m und b_n, $m, n \in \{2, ..., 10\}$

Es gilt: A und B sind gültige ISBN-Nummern, $a_n \neq a_m$, $m \neq n$, $b_m = a_n$ und $b_n = a_m$

Sei nun $a_1 = b_1$ (Prüfziffer, also Veränderung nicht erkennbar).

Also muss auch $(A - B) \mod 11 = 0$ sein.

$(a_1 - b_1) \cdot 1 + ... + (a_m - b_m)m + ... + (a_n - b_n)n + ... + (a_{10} - b_{10}) \cdot 10$

$= (a_1 - a_1) \cdot 1 + ... + (a_m - a_n)m + ... + (a_n - a_m)n + ... + (a_{10} - a_{10}) \cdot 10 =$

$(a_m - a_n)m + (a_n - a_m)n = (a_m - a_n)(m - n)$

Also muss $(a_m - a_n)(m - n) \mod 11 = 0$

Da $m - n \in \{-8, ..., -1, 1, ..., 8\} \not\supset \{0, 11\}$

und $(a_m - a_n) \in \{-10, ..., -1, 1, ..., 10\} \not\supset \{0, 11\}$

ist also $(a_m - a_n)(m - n) \mod 11 \neq 0$

Damit also $a_1 \neq b_1$, also Änderung einer Ziffer erkennbar.

1.2 Aufgabe

Sei C_i jeweils $\{a_1, ..., a_n\}$

a) C_1 nicht decodierbar, da $a_6a_2a_7 = 10|01|211 = 100|12|11 = a_3a_5a_4$

b) $\clubsuit\spadesuit\heartsuit\diamondsuit$ Satz von Sardina Patterson:

$S_1 = C_2, \quad \hat{S}_2 = S_2 = \{\diamondsuit, \heartsuit\}$

$\hat{S}_3 = \{\}, \ \tilde{S}_3 = \{\diamondsuit\} \ \Rightarrow S_3 = \{\diamondsuit\}$

$\hat{S}_4 = \{\}, \ \tilde{S}_4 = \{\diamondsuit\} \ \Rightarrow S_4 = \{\diamondsuit\} = S_3$

$\Rightarrow \bigcup S_i = \{\diamondsuit, \heartsuit\}$

$(\bigcup S_i) \cap C_2 = \{\} \Rightarrow$ decodierbar!

c) Satz von Sardina Patterson:

$S_1 = C_3, \quad \hat{S}_2 = S_2 = \{\alpha\}$

$\hat{S}_3 = \{\}, \ \tilde{S}_3 = \{\alpha\} = S_2$

$\Rightarrow \bigcup S_i = \{\alpha\}$

$(\bigcup S_i) \cap C_3 = \{\} \Rightarrow$ decodierbar!

d) Satz von Sardina Patterson:

$S_1 = C_4, \quad \hat{S}_2 = S_2 = \{\} \Rightarrow \bigcup S_i = \{\}$

$(\bigcup S_i) \cap C_3 = \{\} \Rightarrow$ decodierbar!

1.3 Aufgabe

Zu zeigen/widerlegen: $Z = \sum_{i=1}^{m} q^{n_i} \leq 1 \Rightarrow$ C eind. decodierbar.

Oder umgeformt: C nicht eind. decodierbar $\Rightarrow Z = \sum_{i=1}^{m} q^{n_i} > 1$

Gegenbeispiel:

Sei B Alphabet $\{0,1\}$, also $q = |B| = 2, C : Q \to B^*$ und $C = \{1, 10, 110\}$.

Code nicht decodierbar, da $a_1 a_2 = 1|10 = 110 = a_3$

Nach These nun also $Z > 1$. $Z = \sum_{i=1}^{3} 2^{-n_1} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} = \frac{7}{8}$

Also Umkehrung der Implikation widerlegt.