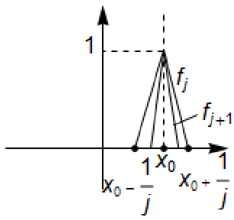
Besprechung zu Blatt 1 zu Analysis 4

1.1 Aufgabe

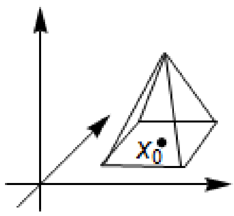
1.2 Aufgabe



Sei $\mu = \{x_0\}, x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Z.z. $\exists (f_j) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$ FF mit $f_j(x_0) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
Also $(f_j) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$ ist FF $\Leftrightarrow f_j \leq f_{j+1}$
und $(\int\limits_{\mathbb{R}} f_j dx)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschr.
Für $n = 1$ und $j \in \mathbb{N}$, f$_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq x_0 + \frac{1}{j} \\ -jx + 1 + jx_0 & , x \in [x_0, x_0 + \frac{1}{j}] \\ f_j(x_0 - x) & , x \in (-\infty, x_0] \end{cases}$$

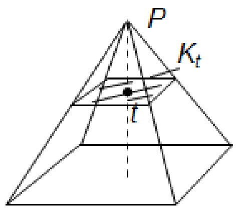
für $x \in [x_0, x_0 + \frac{1}{j}]$:
$mx_0 + b = 1 \Rightarrow b = 1 - mx_0$
$m(x_0 + \frac{1}{j}) + b = 0$
$\frac{m}{j} + 1 = m(x_0 + \frac{1}{j})1 - mx_0 = 0$
$\Rightarrow m = -j, \quad b = 1 + jx_0$



Für $n \in \mathbb{N}$ allgemein, $j \in \mathbb{N}$ sei

$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{R}^n \setminus W_j \\ -j||x - x_0||_\infty + 1 & , x \in W_j \end{cases}$$

Wobei $W_j := \{x \in \mathbb{R}^n \big| ||x - x_0||_\infty < \frac{1}{j}\}$
f_j stetig: f_j stetig in $\mathbb{R}^n \setminus W_j$ (offen) und
in $\mathring{W}_j = \{x \in \mathbb{R}^n \big| ||x - x_0||_\infty\}$ (offen, da
$||.||_\infty$ stetig als Metrik. Für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||x - x_0||_\infty = \frac{1}{j}$
und $(x_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x_k \to x$ gilt.
$x_k \in W_j : f_j(x_k) = -j||x_k - x_0||_\infty + 1 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -j \underbrace{||x - x_0||_\infty}_{\frac{1}{j}} + 1 = 0$



$x_k \notin W_j$: $f(x_k) = 0 = -j||x - x_0||_\infty + 1 = f_j(x)$
f_j hat kompakten Träger: $suppf_i = \overline{f_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \overline{\mathring{w}_j} = W_j$ (kp)
(f_j) hat außedem weitere folgenden Eig.:

- $f_j(x_0) = -j||x_0 - x||_\infty + 1 = 1$
- $\int\limits_{\mathbb{R}_j} f_j dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (-j||x_0 - x||_\infty + 1)dx$

$$= \int\limits_{x_0 - \frac{1}{j}}^{x_0 + \frac{1}{j}} \dots \int\limits_{x_0 - \frac{1}{j}}^{x_0 + \frac{1}{j}} (-j||x - x_0||_\infty + 1) dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int\limits_0^1 K_t dt, \quad K_t := mt + bmitK_0 = vol(W_j), \quad K_1 = vol\{x_0, 1\} = 0$$

$$= \int\limits_0^1 (-(vol(W_j)t + (vol(W_j))dt = vol(W_j) \int\limits_0^1 (-t + 1)dt = \frac{1}{2} vol(W_j)$$

$$= \frac{1}{2}(x_0 + \frac{1}{j} - (x_0 - \frac{1}{j}))^n = \frac{1}{2}\frac{2^n}{j^n} = \frac{2^{n-1}}{j^n} \leq \frac{2^{n-1}}{1^n} = 2^{n-1}$$

Sei für $j \in \mathbb{N}, \quad g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. durch $g_j := \sum\limits_{k=1}^{j} f_k(2^k(x + x_0) + x_0)$
Beh. (g_j) ist FF mit $g_j(x_0) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$

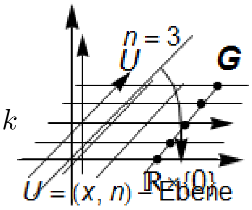
$g_j = \sum\limits_{k=1}^{j} f_k(2^k(x_0 - x_0) + x_0) = \sum\limits_{k=1}^{j} f_k(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{j} 1 = j \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow g_j$ stetig.
$supp = g_j = \overline{g_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}$
$g_j(x) \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{||2^k(x - x_0) + x_0 - x_0||_\infty}_{=2^k||x-x_0||_\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \forall 1 \leq k \leq j$
$\Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq j gilt ||x - x_0||_\infty \leq \frac{2^-k}{k} \leq 1$
$supp(g_j) \leq \{x \in \mathbb{R}^n \big| ||x - x_0||_\infty \leq 1\}$ (kp.)
Da $f_k \geq 0 \forall \mu$ gilt: $g_j \leq g_{j+1}$
Da $\int\limits_{\mathbb{R}} f_k dx \leq 2^{n-1}$ ist $\int\limits_{\mathbb{R}^n} g_j dx = \sum\limits_{k=1}^{j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_j(2^k(x - x_0) + x_0)dx$
$= \sum\limits_{k=1}^{j} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_j(x)(2^k)^n dx$ (Transformationssatz)
$= \sum\limits_{k=1}^{j} \frac{1}{2^{nk}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_j(x)dx \leq \sum\limits_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} 2^{n-1} \leq 2n - 1$

1.3 Aufgabe

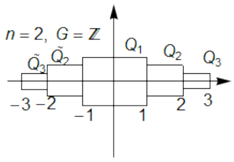
$(f_j), (g_j)$ FF., $(h_j) := \max\{f_i, g_i\}$
Z.z. (h_j) FF.
$h_j = \max\{f_j, g_j\} = \frac{1}{2}(f_j + g_j) + \frac{1}{2}|f_j - g_j|$ stetig als Komposition von st. Fu.
$\overline{h_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} \leq \overline{f_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\} \cup g_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}$
$\leq \overline{f_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} \cup \overline{g_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} = supp(f_j) \cup supp(g_j)$ kp.
$\int\limits_{\mathbb{R}} h_j dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \max\{f_j, g_j\}dx$
Sei $m_1 := \min(f_1), \quad m_2 := \min(g_j), \quad m_0 := \min\{m_1, m_2\}$
Dann ist $m_0 \leq f_j, m_0 \leq g_j \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow f_j - m_0, g_j - m_0 \geq 0$
$|f_j - g_j| = |(f_j - m_0) - (g_j - m_0)| \leq |f_j - m_0| + |g_j - m_0| = f_j - m_0 + g_j - m_0$
$\int\limits_{\mathbb{R}} h_j dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \max\{f_j, g_j\}dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}}(|f_j| + |g_j|)dx \leq \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} |f_j|dx}_{<c} + \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} |g_j|dx}_{c}$
Beh. $\int < c$: $\exists c > 0$.
Dafür ist z.z.: für FF is auch $(\int\limits_{\mathbb{R}} |f_j|dx)_{j \in \mathbb{N}}$ beschr.
$D := f_1^{-1}((-\infty, 0))$. Wegen $f_j \leq f_{j+1} : f_j^{-1}((-\infty, 0)) \leq D$.
Weiter ist $D \leq supp(f_1)$ und $supp(f_1)$ kp $\Rightarrow D$ beschr., $vol(D)$ beschr.
$(f_j)FF \Rightarrow \exists c > 0$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_j dx \leq c \forall j \in \mathbb{N}$
Sei $m := \min\{f_1\} \leq f_j \forall j \in \mathbb{R}^n$
Dann ist $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_j|dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus D} \underbrace{|f_j|}_{=f_j} dx + \int\limits_{D} \underbrace{|f_j|}_{=-f_j \leq -f_1 \leq |m|} dx$
$\leq \int\limits_{\}R^n \setminus D} f_j dx + vol(D)|m|$
usw...(Beweis im StudIp nachgereicht)
Z.z. $h_j \leq h_{j+1}$
$f_j(x) \leq g_j(x) : h_j(x) = \max\{f_j(x), g_j(x)\} = g_j(x) \leq g_{j+1}(x) \leq \max\{g_{j+1}(x), fj + 1(x)\} = h_{j+1}(x)$
$g_j(x) \leq f_g(x)$ genauso.

1.4 Aufgabe

1.5 Aufgabe



U Unterraum der Dimension k, o.E. $U = \mathbb{R}^k \times \{0\} \in n-k$
Wir erhalten ein k-Gitter G.
$G = \{(l_1, ..., l_k, 0) \in \mathbb{R}^n \big| l_1, ..., l_2 \in \mathbb{Z}\}$
$O := \{[p_1 - 1, p_1 + 1] \times ... \times [p_k - 1, p_k + 1] \times ...\}$
$volQ_1 = 2, vol(Q_2) = vol(\tilde{Q}_2) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{N} \ni k \geq 2, \quad vol(Q_k) = vol(\tilde{Q}_l) = \frac{1}{2^{k-1}}$
$O = \{Q_1\} \cup \{Q_k, \tilde{Q}_k \big| k \in \ k \geq 2\}$
O abz., $\quad U \subseteq \bigcup\limits_{Q \in O} Q$



$vol(O) = \sum\limits_{Q \in O} vol(Q) = 2 + 2 \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 4$
$Q_\varepsilon := \{(x, \varepsilon y \big| (x, y) \in Q\}, Q \in O$
$O_\varepsilon := \bigcup\limits_{Q \in O} \{Q_\varepsilon\} \Rightarrow vol(Q_\varepsilon) = \varepsilon \cdot vol(O) \leq 4\varepsilon$
Rest Studip.