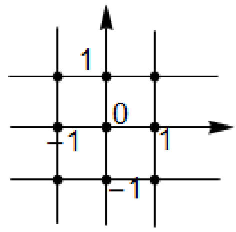
Besprechung zu Blatt 2 zu Analysis 4



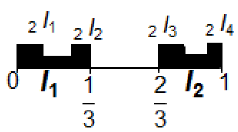
2.1 Aufgabe

$G_0 := \mathbb{Z}^n, O_0 := \{p + [0,1]^n | p \in G_0\}$
$j \in \mathbb{N} : G_j := \{p \in \mathbb{R}^n \big| 2^j p \in G_0\}$
$O_j := \{p + [0 + \frac{1}{2^j}]^n \big| p \in G_j\}$
$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
rekursive Definition:
$O_n^U := \phi_0$
$O_j^U := \{Q \in O_j \big| Q \subseteq U \setminus \underbrace{\bigcup_{\tilde{Q} \in Q_{j-1}^U} \tilde{Q}}_{\phi_0}\}$
$O^U := \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} O_j^U$
Beh.: $U = \bigcup_{Q \in Q^U} Q$
„$\subseteq$“: klar
„$\supseteq$“: Sei $x \in U$. Da U offen, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\underbrace{x + [-\varepsilon, \varepsilon]^n}_{B_{||\cdot||_\infty}} \subseteq U$
Für $j \in \mathbb{N}$ groß genug ist $2^{j-1} > \frac{1}{\varepsilon}$.
Dann $x + [0, \frac{1}{2j}]^n \subseteq x + [-\varepsilon, \varepsilon]^n \subseteq U$
Es gibt $p \in G_j$ mit $x \in p + [0, \frac{1}{2^j}]^n =: Q$
Dann ist für $y \in Q$:
$||x - y||_\infty \leq \underbrace{||x - p||_\infty}_{\leq \frac{1}{j}} + \underbrace{||p - y||_\infty}_{\leq \frac{1}{2}j} \leq \frac{1}{2^{j-1}} \leq \varepsilon$
d.h. $Q \subseteq B_{||\cdot||_\infty}(x, \varepsilon) \subseteq U$

1. Fall: $\exists \tilde{Q} \in O_{j-1}^U$ mit $Q \cap \tilde{Q} \neq \phi$
$Q \cap \tilde{Q} \subseteq \partial Q$ für alle $\tilde{Q} \in O_{j-1}^U$
$\Rightarrow Q \subseteq U \setminus \bigcup_{\tilde{Q} \in O_{j-1}^U \tilde{Q}} \Rightarrow Q \in O_j^U$
$\Rightarrow x \in Q \subseteq \bigcup_{\tilde{Q} \in O^U} \tilde{Q}$
$Q \cap \tilde{Q} \neq \emptyset \Rightarrow Q \subseteq \tilde{Q}$
$\Rightarrow x \in Q \subseteq \bigcup_{\tilde{Q} \in O_j^U} \tilde{Q}$

2. Fall: $Q \cap \bigcup_{\tilde{Q} \in O_j^U} \tilde{Q} \Rightarrow Q \subseteq U \setminus \bigcup_{\tilde{Q} \in O_{j-1}^U} \tilde{Q}$
$\Rightarrow Q \in O_j^U$
$\Rightarrow x \in Q \subseteq \bigcup_{\tilde{Q} \in O^U} \Rightarrow U \subseteq \bigcup_{\tilde{Q} \in O^U} \tilde{Q}$

2.2 Aufgabe



Idee:
Schritt n: 2^n Intervalle der Länge $\frac{1}{3^n}$
${}_nI_i, i \in \{1, ..., 2^n\}$
$N_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} {}_nI_i$
$N = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n \subseteq [0, 1]$

$\Rightarrow N beschr., N abg. \Rightarrow N kp.$

$N \leq N_n, \quad \mu(N) = \sum_{i=1}^{2^n} \mu({}_nI_i) = (\frac{2}{3})^n \to 0$

$N \overset{bijektiv}{\longrightarrow} \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_n) \subseteq \mathbb{R} | x_n \in \{0,1\}, \ n \in \mathbb{N}\}$

$\overset{bijektiv}{\longrightarrow} \{0, ..., 9\}^{\mathbb{N}} \overset{bijektiv}{\longrightarrow} [0,1]$ überabz.

$\Rightarrow N$ überabz.

Rest: siehe Zusatzblatt:

Blatt 2

Aufgabe 2:

Konstruktion: Anfang $n = 0$: ${}_0a_1 := 0$, ${}_0b_1 := 1$, ${}_0I_1 := [{}_0a_1, {}_0b_1]$,

$N_0 := {}_0I_1$.

$n \mapsto n+1$: Haben Zahlen ${}_na_1$ bis ${}_na_{2^n}$ und ${}_nb_1$ bis ${}_nb_{2^n}$

Intervalle ${}_nI_1$ bis ${}_nI_{2^n}$ mit ${}_nI_i = [{}_na_i, {}_nb_i]$,

~~und~~ $\cancel{{}_nb_i - {}_na_i}$ $i \in \{1, \dots, 2^n\}$.

Sei für $i \in \{1, \dots, 2^n\}$

$${}_{n+1}a_{2i-1} := {}_na_i, \quad {}_{n+1}b_{2i-1} := {}_na_i + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$${}_{n+1}a_{2i} := {}_nb_i - \frac{1}{3^{n+1}}, \quad {}_{n+1}b_{2i} := {}_nb_i$$

$${}_{n+1}I_i := [{}_{n+1}a_i, {}_{n+1}b_i], \quad i \in \{1, \dots 2^{n+1}\}$$

$$N_{n+1} := \bigcup_{i=1}^{2^{n+1}} {}_{n+1}I_i.$$

Sei $N := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n$.

z.z.: N ist Nullmenge, kompakt und überabzählbar.

Es ist für $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ ${}_n I_i$ kompakt, da ${}_n I_i = [{}_n a_i, {}_n b_i]$ kompakt. Damit ist für $n \in \mathbb{N}$

$N_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} {}_n I_i$ kompakt als endliche Vereinigung kompakter Mengen. Somit ist N kompakt als abzählbare Schnitte kompakter Mengen.

Weiter ist ${}_0 b_1 - {}_0 a_1 = 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$ und ist somit für ein $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ ${}_n b_i - {}_n a_i = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Es folgt für alle $i \in \{1, \dots, 2^n\}$

i gerade $\Rightarrow {}_{1+n} b_i - {}_{1+n} a_i = {}_n b_{\frac{i}{2}} - \left({}_n b_{\frac{i}{2}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \frac{1}{3^{n+1}}$

i ungerade $\Rightarrow {}_{n+1} b_i - {}_{n+1} a_i = {}_{1+n} a_{\frac{i+1}{2}} + \frac{1}{3^{n+1}} - {}_{1+n} a_{\frac{i+1}{2}} = \frac{1}{3^{n+1}}$

$\Rightarrow ({}_{n+1} I_i)_{i \in \{1, \dots, 2^{n+1}\}}$ disjunkt.
Es folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{vol}(N_n) = \sum_{i=1}^{2^n} \mathrm{vol}({}_n I_i) = \sum_{i=1}^{2^n} ({}_n b_i - {}_n a_i) = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{3^n}$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

$\Rightarrow$ (mit ε-Charakterisierung) $N_n \supseteq N$ ist Nullmenge.

ii φ: ~~$\mathbb{N}$~~ $N \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_n) \subseteq \mathbb{R} \mid x_n \in \{0,1\} \forall n \in \mathbb{N}\}$ definiert durch

$x \in N \Rightarrow x \in N_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

zu $n \in \mathbb{N}$ $\exists\, i_n \in \{1, \dots, 2^n\}$ mit $x \in {}_n I_{i_n}$

$$(\varphi(x))_n := \begin{cases} 0 & \text{, falls } i \text{ ungerade} \\ 1 & \text{, falls } i \text{ gerade.} \end{cases}$$

φ ist bijektiv, denn: surjektiv klar, und für $x_1, x_2 \in N$ mit $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ ist $x_1, x_2 \in {}_n I_{i_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und somit

$$|x_1 - x_2| \leq {}_n b_{i_n} - {}_n a_{i_n} = \frac{1}{3^n} \longrightarrow 0, \ n \to \infty.$$

$\Rightarrow x_1 = x_2$.

Nun ist mit dem binären Zahlensystem $\varphi_2: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,9\}^{\mathbb{N}}$ mit φ bijektiv möglich. Sei $\varphi_3: \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$ definiert durch $\varphi_3(x_n) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{10^n}$ bijektiv. Damit ist

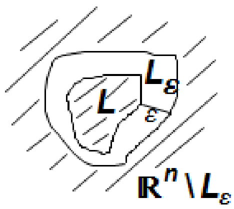
$$\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 : N \to [0,1] \text{ bijektiv.}$$

Da $[0,1]$ überabzählbar ist, ist auch N überabzählbar.

2.3 Aufgabe

Seien K kp. $(n_j) \subseteq C^\circ(K)$, $\quad u^* \in C^0(K)$
$u_j \leq u_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{N}, u_j \to u^*$ pktweise.
Beh.: $u_j \to u^*$ glm. auf K, d.h. $\sup\limits_{x\in K} u^*(x) - u_j(x) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0$
Bew.: Seien $v_j := u^* - u_j, \quad j \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(v_j) \subseteq C^\circ(K)$
$v_j \geq v_{j+1}, \quad 0 \leq v_j \to 0$ pktweise in K.
z.z.: $\sup\limits_{x\in K} v_j(x) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0$
Angenommen, es gibt $\varepsilon > 0$ und $(j_k) \subseteq \mathbb{N}$, (j_k) streng monoton wachsend mit $\sup\limits_{x\in K} v_{j_k}(x) > \varepsilon$
Sei $(x_{j_k}) \subseteq K$ mit $v_{j_k}(x_{j_k}) = \sup\limits_{x\in K} v_{j_k}(x)$
O.E.$x_{j_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} x$ für ein $x \in K$
Da $v_{j_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$ pktweise in K gibt es ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit
$|v_{j_k}(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall \geq k_1$
Da v_{k_1} stetig, gibt es ein $k_2 \in \mathbb{N}$ mit $k_2 \geq k_1$ und
$|v_{j_{k_1}}(x_{j_k}) - v_{j_{k_2}}(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \ \ \forall k \geq k_2$
Damit gilt für $k \geq k_2 \geq k_1$
$\varepsilon < \sup\limits_{y\in K} v_{j_k}(y) = v_{j_k}(x_{j_k}) \leq v_{j_{k_1}}(x_{j_k}) \leq v_{j_{k_1}}(x) + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ Widerspruch!

2.4 Aufgabe



Sei L kp.
Gesucht ist $g \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq g \leq 1, \quad g|_L = 1$
$supp(g) \subseteq L_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \big| dist(x, L \leq \varepsilon\}$
Für eine beliebige Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Funktion
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto dist(x, A)$ stetig.
Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \frac{dist(x,\mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon)}{dist(x,\mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) + dist(x,L)}$
g ist stetig, wenn g wohldefinitiert ist. Das ist hier der Fall, denn für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$dist(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) = 0 \Rightarrow x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon}$
$\Rightarrow dist(x, L) \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \underbrace{dist(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon)}_{=\varepsilon} + \underbrace{dist(x, L)}_{\geq\varepsilon} > \varepsilon \neq 0$
$dist(x, L) = 0 \Rightarrow dist(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) \geq \varepsilon$
$\Rightarrow dist(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) + dist(x, L) \geq \varepsilon \neq 0$
$supp(g) \subseteq L_\varepsilon$

$$x \in \mathbb{R}^n : \quad g(x) := \frac{\overbrace{dist(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon}^{\geq 0}}{\underbrace{dist(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) + dist(x, L)}_{\geq 0}} \geq 0$$

$g(x) \leq \frac{dist(x,\mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) + dist(x,L)}{dist(x,\mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) + dist(x,L)} = 1$
$x \in L : \quad g(x) = \frac{dist(x,\mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon)}{dist(x,\mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) + \underbrace{dist(x, L)}_{=0}} = \frac{dist(x,\mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon)}{dist(x,\mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon)} = 1$