Blatt 2

Aufgabe 2:

Konstruktion: Anfang $n = 0$: ${}_0a_1 := 0$, ${}_0b_1 := 1$, ${}_0I_1 := [{}_0a_1, {}_0b_1]$.

$N_0 := {}_0I_1$.

$n \mapsto n+1$: Haben Zahlen ${}_na_1$ bis ${}_na_{2^n}$ und ${}_nb_1$ bis ${}_nb_{2^n}$

Intervalle ${}_nI_1$ bis ${}_nI_{2^n}$ mit ${}_nI_i = [{}_na_i, {}_nb_i]$,

~~und~~ $\cancel{{}_nb_i - {}_na_i}$ $i \in \{1, \dots, 2^n\}$.

Sei für $i \in \{1, \dots, 2^n\}$

$${}_{n+1}a_{2i-1} := {}_na_i \quad , \quad {}_{n+1}b_{2i-1} := {}_na_i + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$${}_{n+1}a_{2i} := {}_nb_i - \frac{1}{3^{n+1}} \quad , \quad {}_{n+1}b_{2i} := {}_nb_i$$

$${}_{n+1}I_i := [{}_{n+1}a_i, {}_{n+1}b_i] \quad , \quad i \in \{1, \dots 2^{n+1}\}$$

$$N_{n+1} := \bigcup_{i=1}^{2^{n+1}} {}_{n+1}I_i .$$

Sei $N := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n$.

z.z.: $N$ ist Nullmenge, kompakt und überabzählbar.

Es ist für $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ ${}_nI_i$ kompakt, da ${}_nI_i = [{}_na_i, {}_nb_i]$ kompakt. Damit ist für $n \in \mathbb{N}$

$$N_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} {}_nI_i$$

kompakt als endliche Vereinigung kompakter Mengen. Somit ist $N$ kompakt als abzählbarer Schnitt kompakter Mengen.

Weiter ist ${}_0b_1 - {}_0a_1 = 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$ und ist somit für ein $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ ${}_nb_i - {}_na_i = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Es folgt für alle $i \in \{1, \dots, 2^n\}$

$$i \text{ gerade} \Rightarrow {}_{1+n}b_i - {}_{1+n}a_i = {}_nb_{\frac{i}{2}} - \left({}_nb_{\frac{i}{2}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$i \text{ ungerade} \Rightarrow {}_{n+1}b_i - {}_{n+1}a_i = {}_{1+n}a_{\frac{i+1}{2}} + \frac{1}{3^{n+1}} - {}_{1+n}a_{\frac{i+1}{2}} = \frac{1}{3^{n+1}}$$

$\Rightarrow ({}_{n+1}I_i)_{i \in \{1, \dots, 2^{n+1}\}}$ disjunkt.
Es folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{vol}(N_n) = \sum_{i=1}^{2^n} \mathrm{vol}({}_nI_i) = \sum_{i=1}^{2^n} ({}_nb_i - {}_na_i) = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{3^n}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

$\Rightarrow$ (mit $\varepsilon$-Charakterisierung) $N_n \supseteq N$ ist Nullmenge.

Sei $\varphi: \cancel{\mathcal{N}} \mathcal{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{ (x_n) \subseteq \mathbb{R} \mid x_n \in \{0,1\} \forall n \in \mathbb{N} \}$ definiert durch

$$x \in \mathcal{N} \Rightarrow x \in \mathcal{N}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

zu $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $i_n \in \{1, \dots, 2^n\}$ mit $x \in {}_n I_{i_n}$

$$(\varphi(x))_n := \begin{cases} 0 & \text{, falls } i \text{ ungerade} \\ 1 & \text{, falls } i \text{ gerade.} \end{cases}$$

$\varphi$ ist bijektiv, denn: surjektiv klar, und für $x_1, x_2 \in \mathcal{N}$ mit $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ ist $x_1, x_2 \in {}_n I_{i_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und somit

$$|x_1 - x_2| \leq {}_n b_{i_n} - {}_n a_{i_n} = \frac{1}{3^n} \to 0, \; n \to \infty.$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

Nun ist mit dem binären Zahlensystem $\varphi_2: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,9\}^{\mathbb{N}}$ mit $\varphi$ bijektiv möglich. Sei $\varphi_3 : \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ definiert durch $\varphi_3(x_n) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{10^n}$ bijektiv. Damit ist

$$\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 : \mathcal{N} \to [0,1] \text{ bijektiv.}$$

Da $[0,1]$ überabzählbar ist, ist auch $\mathcal{N}$ überabzählbar.