

Blatt 1

Aufgabe 1

Beh.: Ist α stetig differenzierbar, dann existiert $\int_a^b f(x) dx / \alpha(x)$ für alle $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Bew.: Da α stetig differenzierbar ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta_0 > 0$ mit

$$|\alpha'(x) - \alpha'(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in [a, b], |x-y| < \delta_0.$$

Da f auch stetig, gibt $\exists \delta > \delta_0$, so dass für alle ϵ -Zerlegungen (t_j) von $[a, b]$ mit Feinheit kleiner als δ , $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \alpha'(x) dx - \sum_j (f(\xi_j) \alpha'(\xi_j)) \cdot (t_j - t_{j-1}) \right| < \varepsilon$$

(z. B. Riemannsummen). Dann gilt es gibt $\eta_j \in [t_{j-1}, t_j]$ mit $\alpha'(\eta_j) = \frac{\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}$. Somit ist

$$|\alpha'(\eta_j) - \alpha'(\xi_j)| < \varepsilon$$

da

$$|\eta_j - \xi_j| \leq t_j - t_{j-1} < \delta_0.$$

Es folgt für eine Zerlegung (t_j) von $[a, b]$ mit Feinheit kleiner als δ , $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \alpha'(x) dx - \int_a^b \sum_j f(\xi_j) (\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) \right|$$

$$\leq \left| \sum_j f(\xi_j) (\alpha'(\xi_j) (t_j - t_{j-1}) - (\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}))) \right| + \varepsilon$$

$$= \sum_j (t_j - t_{j-1}) \cdot |f(\xi_j)| + \underbrace{\left| \alpha'(\xi_j) - \frac{\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right|}_{= \alpha'(\zeta_j)}$$

$$\leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \sum_j (t_j - t_{j-1}) \cdot \underbrace{|\alpha'(\xi_j) - \alpha'(\zeta_j)|}_{< \varepsilon}$$

$$\leq \varepsilon \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \underbrace{\sum_j (t_j - t_{j-1})}_{= b-a}$$

$$= \varepsilon \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot (b-a)$$

Auf 1

Aufgabe 2:

$$h_j = \max \{ f_j, g_j \} = \frac{1}{2} (f_j + g_j) + \frac{1}{2} |f_j - g_j| \text{ stetig}$$

$$\text{supp } h_j \subseteq \text{supp } f_j \cup \text{supp } g_j \Rightarrow \text{supp } h_j \text{ kompakt.}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f_j(x) \geq g_j(x) : h_j(x) = \max \{ f_j(x), g_j(x) \} = f_j(x) = f_{j+1}(x) \\ = \max \{ f_{j+1}(x), g_{j+1}(x) \} = h_{j+1}(x).$$

Beh. \otimes : Ist (f_j) eine FF, so ist $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_j| dx \right)$ beschränkt.

Beweis von Beh. \otimes später unten.

Weiter mit Aufgabe 2:

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_j dx \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} (f_j + g_j) dx}_{\text{beschränkt in } j, \text{ da } (f_j), (g_j) \text{ FF.}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|f_j| + |g_j|) dx}_{\text{beschränkt in } j, \text{ nach Beh. } \otimes \text{ und } (f_j), (g_j) \text{ FF.}}$$

$\Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_j dx \right)_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt

$\Rightarrow (h_j)$ FF.

Beweis von Beh. \otimes : Sei (f_j) eine FF. Seien

$$f_j^\pm := \max \{ \pm f_j, 0 \}.$$

$$\Rightarrow f_j = f_j^+ - f_j^- \quad , \quad |f_j| = f_j^+ + f_j^-.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j^+ dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f_j dx}_{\text{beschränkt}} + \int_{\mathbb{R}^n} f_j^- dx$$

in j, da
 (f_j) FF

Sei $m := \min f_j$. Dann ist

$$m \leq -f_j^- \leq -f_{j+1}^- \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Wie oben sieht man, dass $f_j^- = \max \{ -f_j, 0 \}$
wieder stetig ist mit kompaktem Träger. Damit ist für
ein $R \gg \mathbb{R}$ ~~mit~~ $\text{supp } f_j^- \subseteq B(0; R)$ und somit
~~mit~~ $\text{supp } f_j^- \subseteq B(0; R)$. Also ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j^- dx = \int_{B(0; R)} f_j^- dx \leq |B| \cdot B(0; R) \cdot m \leq m \cdot |B|$$

$$\Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_j^+ dx \right)_{j \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt}$$

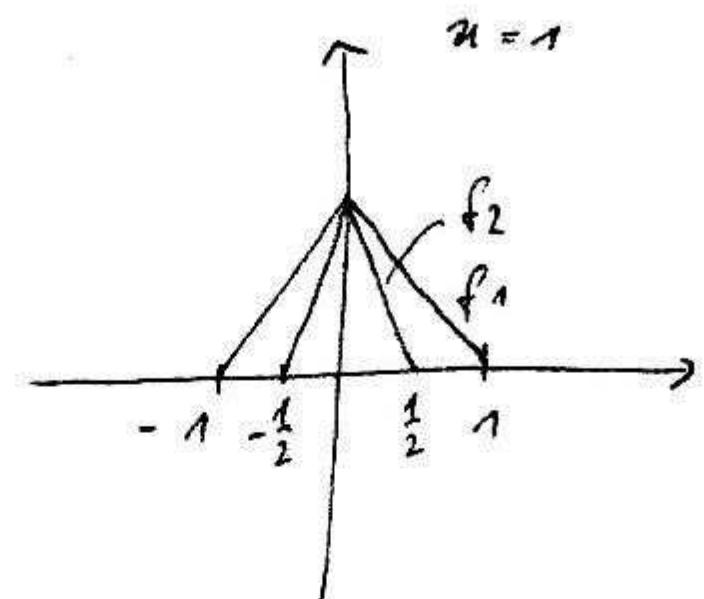
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f_j^+ dx}_{\text{beschränkt in j}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f_j^- dx}_{\text{beschränkt in j}}$$

Aufgabe 2:

O.E. $x_0 = 0$. Zuerst Konstruktion einer besonderen Teilfolge (f_j) :

Für $n=1$: $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_j(x) := \begin{cases} -2^j |x| + 1 & , \quad |x| \leq \frac{1}{2^j} \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$



Dann ist f_j stetig, hat kompakten Träger

$$\text{supp } f_j = \left[-\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right] \subseteq [-1, 1] \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

und es gilt $f_j(0) = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2^j}} (2^j x + 1) dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^j}.$$

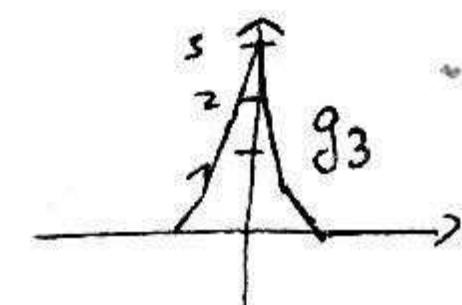
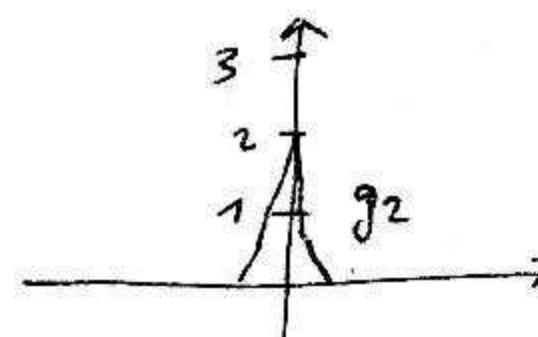
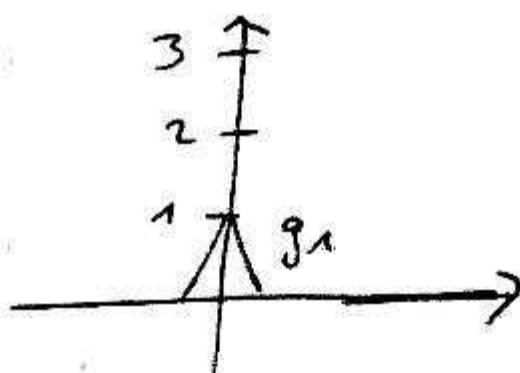
~~Für~~ \exists $g_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, $g_j := \sum_{k=1}^j f_k$.

Dann ist $\text{supp } g_j = \bigcup_{k=1}^j \text{supp } f_k \subseteq [-1, 1]$, g_j stetig,

wegen $f_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ ist $g_j \leq g_{j+1}$ und es gilt

$$g_j(0) = \sum_{k=1}^j \underbrace{f_k(0)}_{=1} = j \rightarrow \infty \quad (j \rightarrow \infty),$$

$$\int_{\mathbb{R}} g_j(x) dx = \sum_{k=1}^j \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$



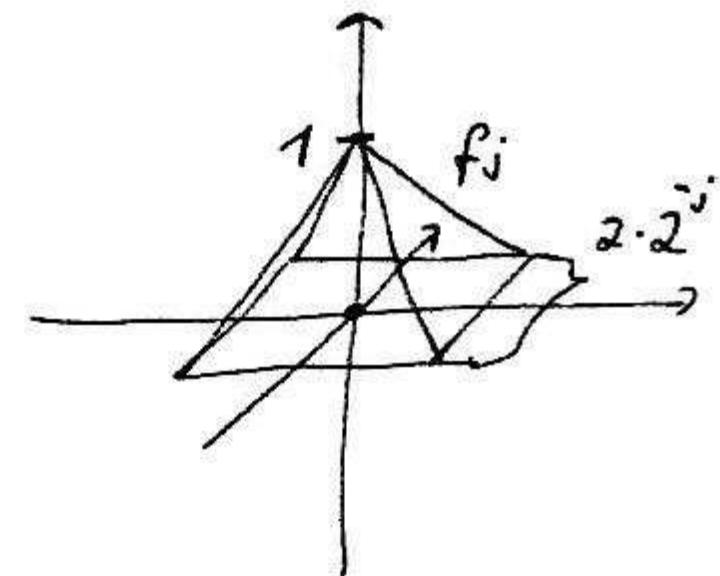
für $n \in \mathbb{N}$ beliebig geht der Beweis ähnlich:

$$f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_j(x) := \begin{cases} -2^j \|x\|_\infty + 1 & , \quad \|x\|_\infty \leq \frac{1}{2^j} \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann f_j stetig mit kompakten Träger

$$\begin{aligned} \text{supp } f_j &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq \frac{1}{2^j}\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 1\}, \end{aligned}$$



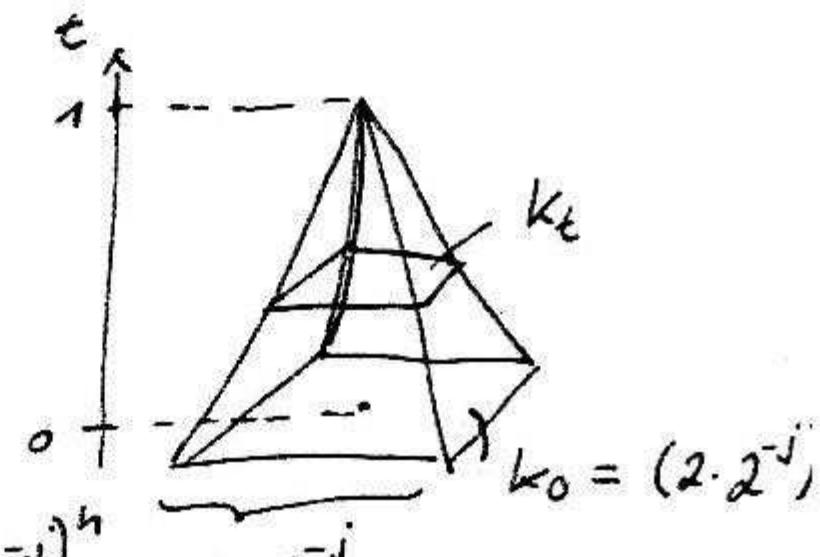
$$f_j(0) = 1,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx = 2 \int_0^1 \text{vol } K_t dt$$

$\leftarrow \text{vol } K_t$ ist linear mit

$$\text{vol } K_0 = 0 \quad \text{und} \quad \text{vol } K_t = (2 \cdot 2^{-j})^n$$

$$\Rightarrow t \mapsto \text{vol } K_t = -(2 \cdot 2^{-j})^n \cdot t + (2 \cdot 2^{-j})^n$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx &= \int_0^1 \left(-((2 \cdot 2^{-j})^n \cdot t + (2 \cdot 2^{-j})^n) \right) dt = \left(\frac{2 \cdot 2^{-j}}{2} \right)^n \\ &= 2^{n-1} \cdot 2^{-jn} = 2^{n-1} \frac{1}{2^j}. \end{aligned}$$

Für $g_j := \sum_{k=1}^j f_k$ verfalle wie im Fall $n=1$.

Insgesamt ist (g_j) eine FF mit $g_j(0) \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow \infty$).

Also ist $\{0\}$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^n .

Aufgabe 4:

Sei (g_j) die FF aus Aufgabe 2 zu $n=1$. Dann ist

$$\text{supp } g_j \subseteq [-1, 1] \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \text{und } 0 \leq g_j \leq j.$$

Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} g_j(x) dx < c \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Sei $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ bijektiv. Sei $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}$, def. durch

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \cdot g_j(x - \varphi(k)).$$

Das ist wohldefiniert, ~~weil~~ da

$$\begin{aligned} 0 \leq f_j(x) &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k=1}}^j \frac{1}{2^k} \cdot g_j(x - \varphi(k)) \leq \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k=1}}^j \frac{1}{2^k} \cdot j \\ &= j \cdot \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^k} \leq j. \end{aligned}$$

f_j ist stetig und hat kompakten Träger

$$\text{supp } f_j \subseteq \bigcup_{k=1}^j \underbrace{\text{supp } g_j(\cdot - \varphi(k))}_{\text{kompat.}} \text{ beachte}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^k} \underbrace{g_j(x - \varphi(k))}_{\leq g_{j+1}(x - \varphi(k))} \leq \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^k} g_{j+1}(x - \varphi(k)) \\ &\leq \sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{2^k} g_{j+1}(x - \varphi(k)) = f_{j+1}(x), \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(x) dx = \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^k} \int_{\mathbb{R}} g_j(x - \varphi(k)) dx = c \cdot \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^k} \stackrel{\curvearrowleft}{=} c.$$

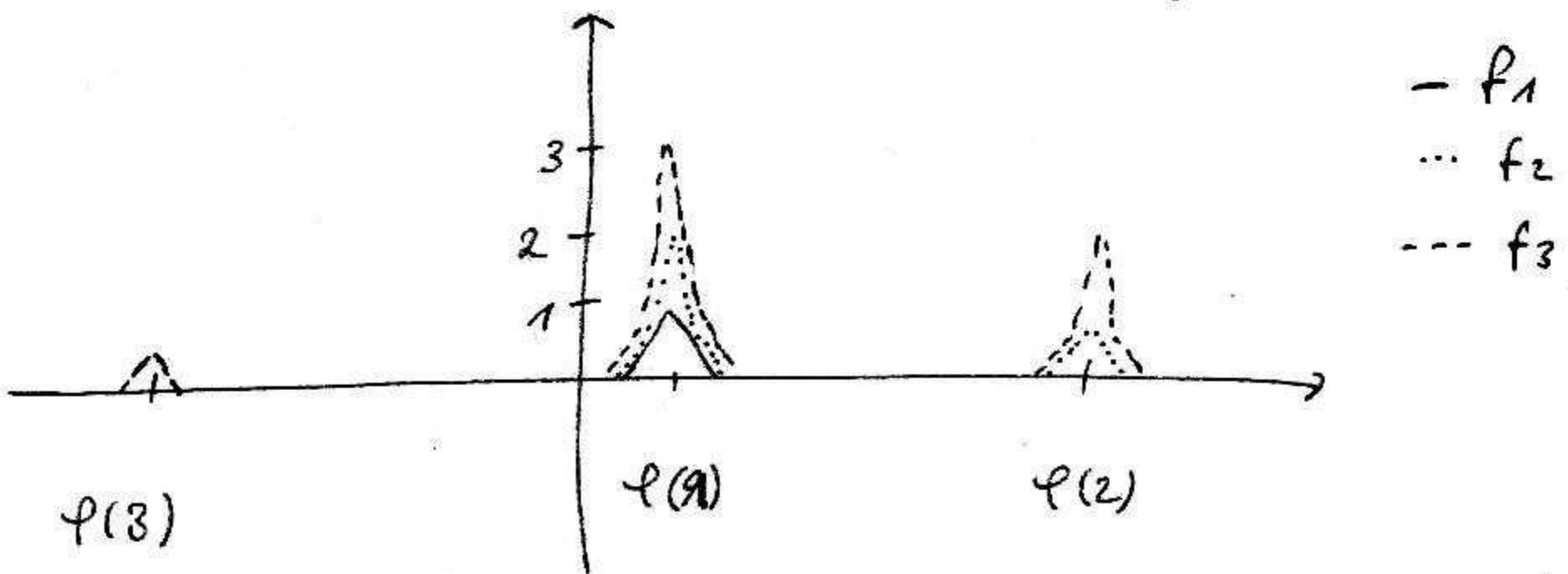
$$= \int_{\mathbb{R}} g_j(x) dx \leq c$$

$\Rightarrow (f_j)$ ist eine FF.

Weiter gibt es für $q \in Q$ ein $l \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(l) = q$. Sei $j \geq l$
Für $j \geq l$ gilt

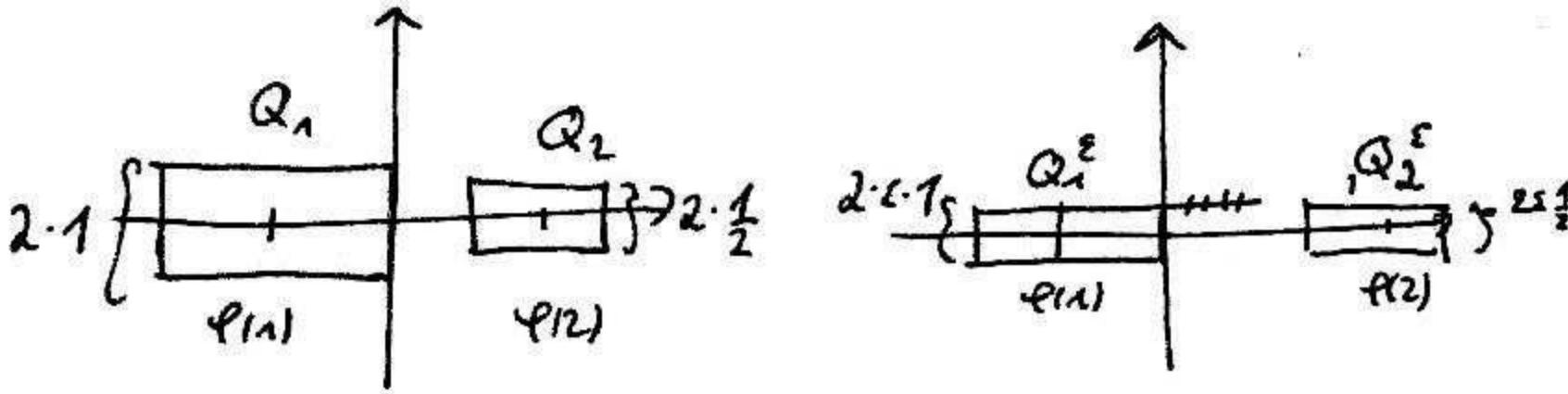
$$f_j(q) = \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^k} g_j(q - \varphi(k)) \geq \underbrace{\frac{1}{2^k} \cdot g_j(q - \varphi(l))}_{\xrightarrow{j \rightarrow \infty} f} = \frac{1}{2^k} \cdot j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty.$$

$$= g_j(0) = j$$



Blatt 1

Aufgabe 5:

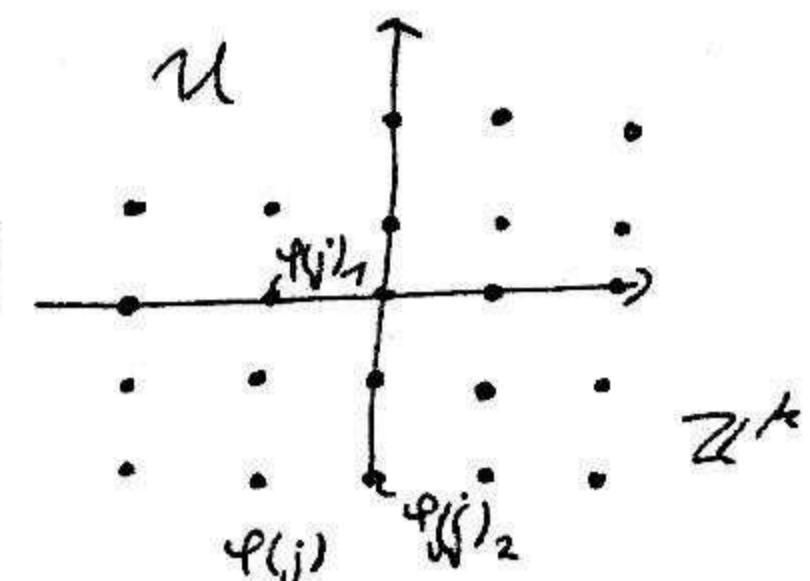


O.E. $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^k \times \{0\}$, $k := \dim U < n$.

Sei $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^k$ bijektiv, für $j \in \mathbb{N}$

$$Q_j := [\varphi(j)_1 - 1, \varphi(j)_1 + 1] \times \dots \times [\varphi(j)_k - 1, \varphi(j)_k + 1]$$

$$\times [-\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^j}] \subseteq \mathbb{R}^n$$



Dann ist $U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$ und es ist

$$\begin{aligned} \text{vol}(Q_j) &= \left(\varphi(j)_1 + 1 - (\varphi(j)_1 - 1) \right) \cdots \cdot \left(\varphi(j)_k + 1 - (\varphi(j)_k - 1) \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{2^j} - (-\frac{1}{2^j}) \right)^{n-k} \\ &= 2^k \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2^j} \right)^{n-k} \leq 2^k \cdot \frac{1}{2^{j-1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}_0} 2^k \cdot \frac{1}{2^{j-1}} = 2^k \cdot \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{2^j}}_{= 2} = 2^{k+1}$$

Sei $\varepsilon > 0$. O.E. $\varepsilon < 1$.

Sei m für $j \in \mathbb{N}$

$$Q_j^\varepsilon := [\varphi(j)_1 - 1, \varphi(j)_1 + 1] \times \dots \times [\varphi(j)_k - 1, \varphi(j)_k + 1] \times [-\frac{\varepsilon}{2^j}, \frac{\varepsilon}{2^j}]$$

$$\Rightarrow U \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^\varepsilon, \quad \text{vol}(Q_j^\varepsilon) \leq \varepsilon \cdot 2^k \cdot \frac{1}{2^{j-1}}$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{vol}(Q_j^\varepsilon) \leq \varepsilon \cdot 2^{k+1}$$