3 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 4.5.2011

Lebesgue-Integrierbarkeit

$\mathcal{L}^+ = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \big| \exists (f_n), (g_n)\ FF.\ mit\ f_n \to f\ pw.,\ g_n \to f\ pw.\}$
$\Rightarrow \int f := \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \overset{!}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \int g_n$
$\int : C_c^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
$\int : \mathcal{L}^+ \to \mathbb{R}$
$\mathcal{L}^1 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \big| \exists g, h, \tilde{g}, \tilde{h} \in \mathcal{L}^+\ mit\ f = g - h,\ f = \tilde{g} - \tilde{h}\}$
$\Rightarrow \int f := \int \tilde{g} - \tilde{h} \overset{!}{=} \tilde{g} - \tilde{h}$
$\int\ :\ \underbrace{\mathcal{L}^1}_{Lebesgue-Raum} \to \mathbb{R}$: Lebesgue-Integral f Riemann-integrierbar $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f Lebesgue-integrierbar
$\mathbb{Q}$ Nullmenge $\Rightarrow \mathbb{Q} \cap [0,1]$ Nullmenge.
$\Rightarrow \nVdash \cap [0,1]$ ist Lebesgue-integrierbar mit $\int\limits_{\mathbb{R}} \nVdash_{Q\cap[0,1]} dx = 0$

1a: $\int f_n \to 0$ und $f_n \not\to 0$ p.w.

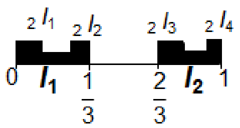
2a: $f_n \to 0$ p.w und $\int f_n \not\to 0$.

$$\Rightarrow \left[\int f_n \to 0 \underset{\not\Leftarrow}{\overset{(a)}{\not\Rightarrow}}_{(b)} f_n \to 0\ p.w. \right]$$

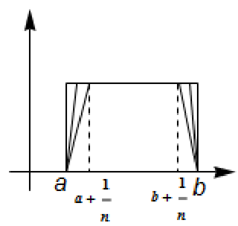
Setzt man an die Funktionenfolge zusätzliche Eigenschaften voraus, so erält man
$f_N \to 0$ p.w. und weitere Eigenschaften $\Rightarrow \int f_N \to 0$
Oder ähnliches (siehe dazu Konvergenzsätze: Faton, Lebesgue)

3.1 Aufgabe

a) n: Durchgänge. $\Rightarrow$ 2^n Funktionen: ${}_nf_k, k \in \{1, ..., 2^n\}$

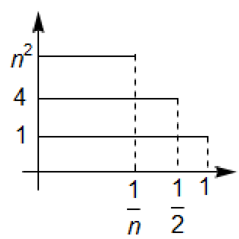


${}_nf_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ {}_nf_k := \begin{cases} 1 & , x \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \\ 0 & sonst] \end{cases}$
${}_nf_k \in \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^1 \forall n \in \mathbb{N},\ k \in \{1, ..., 2^n\}$
$\int\limits_{\mathbb{R}} {}_nf_k dx = \frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Zu $x \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k_n \in \{1, ..., 2^n\}$ mit $x \in [\frac{k_n-1}{2^n}, \frac{k_n}{2^n}]$.



Dann ist für $n \in \mathbb{N}$: ${}_nf_k(x) = \begin{cases} 1 & , k = k_n \\ 0 & , sonst \end{cases}$
$\Rightarrow {}_nf_{k_n}(x) = 1 \not\to 0 (n \to \infty)$

b) $n \in \mathbb{N},\quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f_n(x) := n^2 \nVdash_{(0,\frac{1}{n})} = \begin{cases} n^2 & , x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & , sonst \end{cases}$



$||f_n||_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} f_n dx = n^2 \frac{1}{n} = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$
$f_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},\quad x \in (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$
Sei $x \in [0,1]$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{x}$

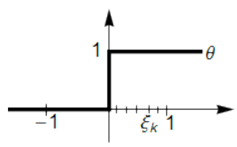
Dann ist $x \notin (0, \frac{1}{n} \forall n \geq n_0$ und somit
$f_n(x) = 0 \forall n \geq n_0 \;\Rightarrow\; f_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

c) $N \subset \mathbb{R}^2$ Nullmenge mit $\{x \in \mathbb{R} \big| N_x = \mathbb{R}\}$ dicht in $\mathbb{R}$
Ein solches N ist gesucht.
Dicht in $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$
Eine Menge ist $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R}^2 \big| N_x = \mathbb{R}\}$ (dicht in $\mathbb{R}$)
ist z.B. $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$
Frage: ist $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ eie Nullmenge in $\mathbb{R}^2$?
Blatt 1.5) $\Rightarrow \{0\} \times \mathbb{R}$ echter Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist Nullmenge von $\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow \forall q \in \mathbb{Q}$ ist $\{q\} \times \mathbb{R}$ eine Nullmenge von $\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ als abzählbare Vereinigung von Nullmengen $\{q\} \times \mathbb{R},\ q \in \mathbb{Q}$,
ist wieder Nullmenge in $\mathbb{R}^2$

3.2 Aufgabe

$$\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \theta(x) := \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}, \quad \varphi \in C^0([-1,1])$$

$Z.z. \varphi(0) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x) d\theta(x)$



Sei $t_0, ..., t_n,\ n \in \mathbb{N}$, eine Zerlegung von $[-1,1]$
$\xi_k \in [t_{k-1}, t_k],\ k \in \{1, ..., n\}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)(\theta(t_k) - \theta(t_{k-e}))$
$\exists! k_0 \in \{1, ..., n\} mit 0 \in [t_{k_0-1}, t_{k_0}], t_{k_0} > 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)(\theta(t_k) - \theta(t_{k-1})) \quad (*)$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0-2} \varphi(\xi_k)(\underbrace{\theta(\underbrace{t_k}_{<0})}_{=0} - \underbrace{\theta(\underbrace{t_{k-1}}_{<0})}_{=0} = 0$$

$$+ \sum_{k=k0+1}^{n} \varphi(\xi_k)\underbrace{(\theta(\underbrace{t_k}_{>0}) - \theta(\underbrace{t_{k-1}}_{>0}))}_{=0} = 0$$

$$+ \varphi(\xi_{k_0})(\underbrace{\theta(\underbrace{t_{k_0}}_{>0})}_{=1} - \theta(t_{k_0-1})) + \varphi(\xi_{k_0-1})(\theta(t_{k_0-1}) - \theta(t_{k_0.2}))$$

1. Fall $t_{k_0-1} < 0$:
   $* = \varphi(\xi_{k_0}(1 - \theta(t_{k_0-1})) + 0 = \varphi(\xi_k) \to 0$
   (Feinheit der Zerlegung gegen 0) $\xi_k \in [t_{k_0-1}, t_{k_0}]$
2. Fall $t_{k_0-1} > 0$:
   $* = 0 + \varphi(\xi_{k_0-1}(\theta(t_{k_0-1}) - \theta(t_{k_0-2})) = \varphi(\xi_{k_0-1}) \to \varphi(0)$

$\Rightarrow$ Es ex. Grenzwert von * wenn die Feinheit der Zerlegung gegen 0 setzt
und $\int\limits_{-1}^{1} \varphi(x) d\theta(x) = \varphi(0)$

3.3 Aufgabe

a) $\alpha(x) = \begin{cases} \sin(x) & , x \in [0,1) \\ \cos(x) & , x \in [-1,0] \end{cases}$

$(*) \quad \int\limits_{-1}^{1} \cos(x) d\alpha(x) = ?$ Sei $t_0, ..., t_n$ eine Zerlegung von $[-1,1]$, $\xi_k \in [t_{k-1}, ..., t_k]$, $k \in \{1, ..., n\}$

Dann gibt es ein $k_0 \in \{1, ..., n\}$ mit $t_{k_0 - 1} < 0$ und $0 \in [t_{k_0-1}, tk_0]$

Dann ist

$$* = \sum_{k=k_0+1}^{n} \cos(\xi_k)(\sin(t_k) - \sin(t_{k-1})) \to \int\limits_0^1 \cos(x)\sin'(x)dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{k_0-1} \cos(\xi_k)(\cos(t_k) - \cos(t_{k-1})) \to \int\limits_{-1}^{0} \cos(x)\cos'(x)dx$$

$$+ \cos(\xi_{k_0})(\underbrace{\alpha(\underbrace{t_{k_0}}_{\geq 0})}_{\sin(t_{k_0})} - \underbrace{\alpha(t_{k_0-1})}_{\cos(t_{k_0})}) \to \cos(0)(\sin(0) - \cos(0))$$

(Mit Feinheit d. Zerlegung gegen 0)

$\Rightarrow$ Grenzwert von (*) falls Feinheit der Zerl. gegen 0 existiert und ist gegeben durch

$$\int\limits_{-1}^{1} = \int\limits_0^1 \cos(x)\sin'(x)dx + \int\limits_{-1}^{0} \cos(x)\cos'(x)dx + \cos(0)(\sin(0) - \cos(0))$$

b) $V := [-1,0] \to \mathbb{R}$, $\quad V(t) := \int\limits_0^t \omega(s)ds$

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\alpha(t) := \begin{cases} V(-1) - 1 & , t \leq 1 \\ V(T) & , t \in (-1,0) \\ V(0) + 1 & , 0 \leq 0 \end{cases}$$

Leicht nachzurechnen!

3.4 Aufgabe

a) $\mathbb{R} > 0$ mit $supp(\varphi) \subset [-R, R]$

$\Rightarrow supp(\varphi') \subset [-R, R]$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\tau' dx = \int\limits_{-R}^{R} \varphi\tau' dx = \underbrace{[\varphi\tau]_{-R}^{R}}_{\underbrace{\varphi(R)}_{=0}\tau(R) - \underbrace{\varphi(-R)}_{=0}\tau(-R) = 0} - \underbrace{\int\limits_{-R}^{R} \varphi'\tau dx}_{\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi'\tau dx}$$

b) $\delta_0(\varphi) = \varphi(0) \stackrel{!}{=} -\int \varphi'\theta = -\int\limits_{-R}^{0} \varphi' \underbrace{\theta}_{=0} dx - \int\limits_0^R \varphi' \underbrace{\theta}_{=0} dx$

$$= -\int\limits_0^R \varphi' dx = [-\varphi]_0^R = \underbrace{\varphi(R)}_{=0} + \varphi(0)$$