4 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 11.5.2011

4.1 Aufgabe

Ist $f : U \to \mathbb{R}$, so gilt für die triviale Fortsetzung $\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & , x \in U \\ 0 & , x \notin U \end{cases}$, dass $supp(\tilde{f}) = U$ für $f(x) \neq 0$, also $supp(\tilde{f}) \subset U$ auch sonst.
Wählen wir nun f_j jeweils so, dass $\tilde{f}(x) = 0 \Leftrightarrow f_j(x) = 0$, gilt weiterhin $f_j \to \tilde{f}$ f.ü. und (f_j) FF. Damit gilt aber auch $supp(f_j) \subset supp(\tilde{f}) \subset U$.

4.2 Aufgabe

$$\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}dx \;\leq\; 2\int\limits_{0}^{n} e^{-x^2}dx \;\leq\; 2\left(\underbrace{\int_{0}^{1} e^{-x^2}dx}_{\leq 1} + \int\limits_{1}^{n} e^{-x^2}\right) \;\leq\; 2\left(1 + \int\limits_{1}^{n} e^{-x}dx\right) \;\leq$$
$2\,(1 + e^{-1} - e^{-n}) \leq e(1 + e^{-1})$
Also beschränkt, damit $e^{-x^2} \in \mathcal{L}^1$, also Integrierbar.
$\left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}dx \cdot \int\limits_{-n}^{n} e^{-y^2}dy = \int\limits_{-n}^{n}\int\limits_{-n}^{n} e^{-(x^2+y^2)} = \int\limits_{\pi}^{0}\int\limits_{-n}^{n} re^{-r^2}drd\varphi =$
$\int\limits_{\pi}^{0}(\int\limits_{-n}^{0} re^{-r^2}drd\varphi + \int\limits_{0}^{n} re^{-r^2}drd\varphi) \;=\; \pi \cdot 2\int\limits_{0}^{n^2} \frac{r}{2r}e^{-z}dz \;=\; \pi(-e^{-n^2} + e^{-0}) \;\Rightarrow$
$\int\limits_{-n}^{n} e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}(1 - e^{-n^2})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}$

4.3 Aufgabe

Es gilt: K und $\tilde{K}$ kompakt, $\int\limits_{K_y} dx = \int\limits_{\tilde{K}_y} dx$

Das n-dim. Volumen oder Lebesgue-maß ist def. mit $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K$.

$$\mathbb{1}_K = \begin{cases} 1 & , x \in K \\ 0 & , x \notin K \end{cases} \qquad \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K = \int\limits_{K} 1 \overset{Vor.}{=} \int\limits_{\tilde{K}} 1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\tilde{K}}$$

4.4 Aufgabe

Das Volumen des Körpers lässt sich über das Integral über die Querschnittsfläche berechnen:

$$V = \int_{a}^{b} Q(z)dz$$

Dabei ist die Querschnittsfläche des Rotationskörpers immer eine Scheibe, also

$$V = \int_a^b \pi R^2(z) dz$$

Der Radius entspricht dabei f(z), da jeweils $0 \leq x \leq f(z)$., also

$$V = \int_a^b \pi f^2(z) dz$$

Der Körper rotiert um z, also z-Komponente des Schwerpunktes (Weg ist Kreis um z-Achse) betrachten:

$$S_z = \frac{1}{2F} \int_a^b f^2(z) dz$$

Wir eliminieren nun die Integrale beider Gleichungen:

$$\frac{V}{\pi} = \int_a^b f^2(z) dz = \int_a^b f^2(z) dz = 2FS_z \qquad \Rightarrow \underbrace{2\pi S_z}_{Weg\ d.\ SP.} \cdot F = V$$

4.5 Aufgabe

Wie in 4 kann die Fläche dargestellt werden als Integral der Querschnitts-"Flächen", hier durch das Rotieren von Kreise.

$$F = 2\pi \int_a^b f(z) \sqrt{1 + f'^2(z)} dz$$

Benötigt ist wieder die z-Komponente d. SP:

$$S_x = \frac{1}{L} \int_\gamma x ds = \frac{1}{L} \int_a^b f(z) \sqrt{1 + f'^2(z)} dz$$

Folgt nach Gleichsetzen der Integrale:

$$S_x L = \frac{F}{2}\pi \qquad \Rightarrow F = \underbrace{2\pi S_x}_{Weg\ d.\ SP.} \cdot L$$