13/20

4 Übungsblatt von Informatik 3 zum Mittwoch, den 18.5.2011

Aufgabe 1

2/5

Nach Skript gilt bereits $A_q(n, d_0) \leq A_q(n-1, d_0-1)$
Also $A_2(n, d_0) \geq A_2(n+1, d_0+1)$

Mit d_0 ungerade gilt die Kugelpackungsschranke: $d(n, d_0) \leq$

Sinnvoll: $n \geq d_0 \Rightarrow d(n, d_0) \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}} \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{d_0}{i}}$

Nach Skript: $q^n \leq \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \Rightarrow \sum_{i=0}^{t} \binom{d_0}{i} \geq q^{d_0} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sum_{i=0}^{t} \binom{d_0}{i}} \leq$

$\Rightarrow d(n, d_0) \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{d_0}{i}} \leq q^{1-d_0+n}$

Also $d(n, d_0) \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{d_0}{i}} \leq q^{1-d_0-1+n+1} \leq A_q(n+1, d_0+1)$

Damit $A_2(n, d_0) \leq\geq A_2(n-1, d_0-1)$
$\Rightarrow A_2(n, d_0) = A_2(n-1, d_0-1)$
für d_0 ungerade und $n \geq d_0$

Sei C: [n,A2(n,d0),d0,2]-Code
Mit C' :[n+1,A2(n,d0),d0+1,2]
C' ex. => A2(n,d0)=<A2(n+1,d0+1)

Sei c1c2c3c4...cn in C
=> c1c2c3c4...cnc(n+1) ind C'
Dabei c(n+1) so, dass
Summe(i=1->n+1)ci =2mod0

Es gilt: |C|=|C'|
1. Ist Abstand zweier Wörter aus C min d0+1, so auch in C'
2. Is Abstand =d0, so ist hat ein Wort gerades, eines ungerades Gewicht.
Damit ist das Prüfbit unterschiedlich und so in C' Abstand d0+1

Also A2(n,d0)==A2(n+1,d0+1)

Aufgabe 2

a) $M = q^{n+1-d_0} = 3^{4+1-3} = 9$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	2	0	1	1	2	0

$rn = \frac{q-1}{q} n = \frac{3-1}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3} < 3 = d_0 \Rightarrow \frac{d_0}{d_0 - rn} = \frac{3}{1/3} = 9 = M \Rightarrow$ Optimal.

d_0 ungerade $\Rightarrow \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i} = \frac{3^4}{\binom{4}{0} + \binom{4}{1}(3-1)} = 9 = M \quad \Rightarrow$ Perfekt.

b) $M = q^{n+1-d_0} = 4^{4+1-3} = 16$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
0	1	2	3	1	0	3	2	2	3	0	1	3	2	1	0
0	1	2	3	2	3	0	1	3	2	1	0	1	0	3	2

$rn = \frac{q-1}{q} n = \frac{4-1}{4} \cdot 4 = 3 \not< 3 = d_0 \quad \Rightarrow$ Nicht optimal

d_0 ungerade $\Rightarrow \frac{q^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i} = \frac{4^4}{\binom{4}{0} + \binom{4}{1}(4-1)} = 19.6923 \neq 9$

$\Rightarrow$ Nicht perfekt.

c) Nein:

$M = 2^{5+1-3} = 8$

Nach Konstruktion gemäß Singelton-Schranke, erstellen wir Codeworte der Länge 3 mit q Zeichen und M Worten:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_18
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1

Man betrachte jetzt die 4 Wörter mit keiner oder einer 1: a_1, a_2, a_3, a_5
Diese unterscheiden sich nun alle um genau ein Zeichen,
also $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 5\} : d(x_i, x_j) = d_0|_{\{a_1,a_2,a_3,a_5\}} = 1$
Damit für den ganzen Code $d_0 = 3$ gilt, muss für die Worte bestehend aus a und 2 angefügten Zeichen $d_0 = 3$, also für die angefügten Zeichen $d_0 = 2$ gelten.
Allerdings ist für 4 Wörter aus 2 Zeichen über ein Alphabet mit q=2 das maximale $d_0 = 1$ (verändert man 1 Wort, erhält man eines der anderen, dann also $d_0 = 0$):

0	0	1	1
0	1	0	1

Also scheitert das Erstellen eines solchen Codes bereits hier.

Auch möglich: Plotkin-Schranke:
$rn = \frac{q-1}{q} n = \frac{5}{2} = 2.5 \not\geq q^{n+1-d_0} = 2^{5+1-3} = 8$
Da Plotkin trotz Erfüllung d. Bedingung nicht obere Schranke, kann der Code nicht erstellt werden.

Aufgabe 3

1 / 5

$\boxed{n_{m+1} = 2n_m}$:

Pro Iteration wird an jedes Wort aus R_m jeweils ein Wort aus R_m angehangen, um R_{m+1} zu generieren. Kein Wort wird anders Erstellt.
Da alle Wörter aus R_1 die gleiche Länge haben (2), ergibt sich für alle Wörter der nachfolgenden R_m intern auch die gleiche Wortlänge: $2n_{m-1}$
$n(R_2) = 4$, $n(R_3) = 8$, etc.

$\boxed{M_{m+1} = M_m^2}$:

Wir betrachten ein Wort aus R_m: um
dieses Wort jeweils jedes Wort in R_m
Per Definition von K muss dies mit
werden, allerdings ist jeweils die eine
der anderen: $R_1 \ni \overline{aa} = bb \in \mathbb{R}_1$, $R_2 \ni$
Somit entstehen pro Wort M_m neue W

$\boxed{d_0 = 1}$

Es gilt $aa, ab \in K_1 \Rightarrow d_0(K_1) = 1$
$\Rightarrow aaaa, aaab \in K_2 \Rightarrow d_0(K_2) = 1$
$\Rightarrow \underbrace{aa..aa}_{2^m}, \underbrace{aa...a}_{2^m-1} b \in K_m \Rightarrow d_0(K_m) =$

n=2^m:
mit xx und x!x wird Wortlänge pro Schrit verdoppelt
(von 2 an)

M=2^(m+1):
Anzahl der Wörter wird von 4 an verdoppelt.

d0=2^(m-1):
Induktiv: m=1: d0=1
m->m+1:
d(x!x,yy)=d(x,y)+d(!x,y)>=2^m*2^(m-1)=2^m
d(xx,yy)=2d(x,y)>=2^m*2^(m-1)=2^m
d(xx,y!y)=d(x,y)+d(x,!y)>=2^m*2^(m-1)=2^m
d(x!x,y!y)=2d(!x,!y)=2d(x,y)>=2^m*2^(m-1)=2^m
=> d0(m>m+1)=2^m