

# 5 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 18.5.2011

## 5.1 Aufgabe

Sei  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  Folge in  $\Lambda$  die gegen  $\lambda^*$  konvergiert.

Nach Voraussetzung 1 ( $\forall x \in \mathbb{R} : f(x, *)$  stetig bei  $\lambda^*$ ) konvergiert die Folge  $(f_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $f_j(x) = f(u_j, x)$  und damit auch  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  pkt.weise gegen  $f(*, \lambda^*)$

Mit Bedingung 3 gilt mit Satz von der majorisierten Konvergenz:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, u_j) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, \lambda^*) dx$$

Also nach Folgenkriterium für die Stetigkeit  $\Rightarrow$  stetig bei  $\lambda^*$

## 5.2 Aufgabe

Sei  $p(\gamma) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x, \gamma) dx$

der Differenzenquotient von p ist

$$\frac{p(s) - p(\lambda)}{s - \lambda} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(x, s) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x, \lambda) dx}{s - \lambda}$$

Sei nun  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , mit  $u_j \neq \lambda$  eine Folge, die gegen  $\lambda$  konvergiert.

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein  $a$  mit  $|\frac{f(x, u_j) - f(x, \lambda)}{u_j - \lambda}| = |\partial_2 f(x, a)| \leq g(x)$   
da  $g$  integrierbar, ist auch der der Diffquot. integrierbar.

Wieder nach Satz der maj. konvergenz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} p(\lambda) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{p(u_j) - p(\lambda)}{u_j - \lambda} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(x, u_j) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x, \lambda) dx}{u_j - \lambda} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x, u_j) - f(x, \lambda)}{u_j - \lambda} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{f(x, u_j) - f(x, \lambda)}{u_j - \lambda} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_2 f(x, \lambda) dx \end{aligned}$$

Mit stetiger Abh. des Integrals v. Parameter folgt stetige differenzierbarkeit.

## 5.3 Aufgabe

a)  $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})$   
 $\frac{x-y}{\sqrt{4t}} \rightarrow z \Rightarrow dz = \frac{\sqrt{4t}}{-1}$   
 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4t}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} (-\sqrt{4t}) \exp(-z^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1$

b)

## 5.4 Aufgabe

Sei  $g(x) = \begin{cases} 1 & , |x| < a \\ 0 & , |x| \geq a \end{cases}$  Funktion auf kp. Träger  $[-a, a]$ .

Es gilt:  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)dx \stackrel{!}{=} g(0) = 1$

Regulär dann:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)dx \right| = \left| \int_{-a}^a g(x)\delta(x)dx \right| \leq \|g(x)\|_{\infty} \int_{-a}^a |\delta(x)|dx < g(0)$$

$\int_{-a}^a |\delta(x)|dx$  wird kleiner 1, da  $\delta(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Also Widerspruch.

## 5.5 Aufgabe

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^y -\frac{1}{y^2} dx + \int_y^1 \frac{1}{x^2} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( \left[ -\frac{1}{y^2} x \right]_0^y + \left[ -\frac{1}{x} \right]_y^1 \right) dy = \int_0^1 \left( \left( -\frac{1}{y} - 0 \right) + \left( -1 - \frac{1}{y} \right) \right) dy = \int_0^1 -\frac{2}{y} - 1 dy \\ &= \left[ -y - 2 \operatorname{Log}[y] \right]_0^1 \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{1}{x^2} dy + \int_x^1 -\frac{1}{y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \left( \frac{1}{x} - 0 \right) + \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \right) dx = \int_0^1 1 dx = 1 \end{aligned}$$