5 Übungsblatt von Informatik 3 zum Mittwoch, den 25.5.2011

Aufgabe 1

a) $A_q(n,2) \leq qA_q(n,1) = \frac{1}{q}q^n = q^{n-1}$
$A_qn, 1 \geq q^{n+1-2} = q^{n-1}$

b) $A_q(n,n) \geq q^{n+1-n} = q$
Jedes Wort in $A_q(n,n)$ muss sich von jedem anderen Wort an allen Stellen unterscheiden. da nur q verschiedene Zeichen, gibt es maximal q Wörter.
$\Rightarrow A_q(n,n) \leq q$

Aufgabe 2

a) Kugelpackungsschranke: $A_q(n,d_0) \leq \frac{q^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i} = \frac{2^{18}}{\sum\limits_{i=0}^{3} \binom{18}{i}} = 265 \geq 2^8 = 256$
In der Kugelpackungsschranke mit Kugeln erfassbare Worte: $M \sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i$
Alle Wörter: $q^n \quad \Rightarrow \quad q^n - M \sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i$: alle Wörter außerhalb von Kugeln.
$q^n - M \sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i = 2^18 - 2^8 \sum\limits_{i=0}^{3} \binom{18}{i} = 9216 = \frac{3.51563\%}{q^18}$

b) 1) $A_q(n,d_0) \leq \frac{q^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i} = \frac{2^{18}}{\sum\limits_{i=0}^{4} \binom{18}{i}} = 64.76 \not\geq 256$
$\Rightarrow$ Code existiert nicht!

2) $A_q(n,d_0) \leq \frac{q^n}{\sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i} (q-1)^i} = \frac{3^{27}}{\sum\limits_{i=0}^{3} \binom{27}{i} 2^i} = 3.06754 * 10^8 \geq 2^{12} = 4096$
$\Rightarrow$ Code kann existieren!

Aufgabe 3

a) Kapazität $C = 1 + p_0 \log_2(p_0) + (1-p_0)\log_2(1-p_0)$
Für $p_0 = 0$ ist $C = 1 + 0 \cdot \log(0) + 1 \cdot \log(1) = 1$ und maximal.
Für $p_0 = 0.5$ ist $C = 1 + 0.5 \cdot \frac{1}{2} + 0.5 \cdot \frac{1}{2} = 0$ und minimal.
Für $p_0 = 1$ ist $C = 1 + 1 \cdot \log(1) + 0 \cdot \log(0) = 1$ und maximal.
Werte außerhalb $[0,1]$ stellen keine gültigen Wahrscheinlichkeiten zur Übertragung eines Wortes dar.
Somit $C \in [0,1]$

b) Nach Skript für $n = 2N+1, k = 1$:
$P_{rest} = \sum\limits_{i=0}^{N} \binom{2N+1}{i} (1-p_0)^i p_0^{2N+1-i}$
$= \sum\limits_{i=0}^{N} \binom{2N+1}{i} (\frac{2}{3})^i (\frac{1}{3})^{2N+1-i}$
$= \sum\limits_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{i} (\frac{2}{3})^i (\frac{1}{3})^{n-i} = \sum\limits_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{i} \cdot \frac{2^i}{3^n} = \frac{n!}{3^n} \sum\limits_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{2^i}{(n-i)!i!}$
$\approx \frac{n!}{3^n} \cdot \frac{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}{(n-\lfloor n/2 \rfloor)!\lfloor n/2 \rfloor!} = \frac{n!}{3^n} \cdot \frac{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}{\lceil n/2 \rceil!\lfloor n/2 \rfloor!} = \frac{n!}{3^n} \cdot \frac{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}{(\lfloor n/2 \rfloor!)^2 \cdot \lceil n/2 \rceil}$

Julian Bergmann
Florian Greiner
Kathleen Klinkmüller