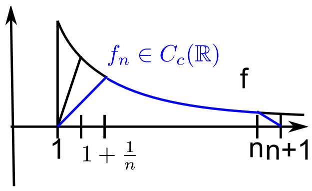
# 6. Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 25.5.2011

## Aufabe 1

Zuerst sei $\lambda(\Omega) < \infty$.
Z.z: $\forall q \geq p \geq 1, \quad \mathcal{L}^q(\Omega) \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$
Hölder-Ungleichung: $f \in \mathcal{L}^p(\Omega), \ g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega) \quad \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$\Rightarrow \int\limits_\Omega |\underbrace{f \cdot g}_{\in \mathcal{L}^1}| dx \leq ||f||_p \cdot ||g||_{p'}$
$|f|^q \mathbb{1}_\Omega = (|f|^p)^{(\frac{q}{p})} \mathbb{1}_\Omega$ mbar.
$\lambda(\Omega) \Rightarrow \mathbb{1}_\Omega \in \mathcal{L}^s(\Omega), \quad 0 \leq s \leq \infty$
$\frac{q}{p} \geq 1, \quad r := (1 - \frac{p}{q})^{-1}$
$(|f|^p)^{\frac{q}{p}} = |f|^q \in \mathcal{L}^1(\Omega) \Rightarrow |f|^p \in \mathcal{L}^{\frac{q}{p}}(\Omega)$ Weiter: $\mathbb{1}_\Omega \in \mathcal{L}^r(\Omega)$
$\overset{Hölder}{\Rightarrow} \mathbb{1}_\Omega |f|^p \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ mit $\underbrace{\int\limits_\Omega \mathbb{1}_\Omega |f|^p dx}_{<\int\limits_\Omega |f|^p dx} \leq ||\mathbb{1}_\Omega||_r \cdot \underbrace{|| \ |f|^p||_{\frac{q}{p}}}_{=||f||_q} = ||\mathbb{1}_\Omega||_r \cdot ||f||_q$
$\mathbb{1}_\Omega |f|^p = |f|^p \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$
Im Fall $\Omega = \mathbb{R}$ ist weder $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ noch $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, denn
Im: Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) := \mathbb{1}_{(1,\infty} \frac{1}{x}$
Beh.: $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) und f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad (\Rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}))$




$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n := \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \in [1 + \frac{1}{n}, n] \\ \frac{n}{1+\frac{1}{n}} x - \frac{n}{1+\frac{1}{n}} & , x \in [1, 1 - \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} x + 1 + \frac{1}{n} & , x \in [n, n+1] \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

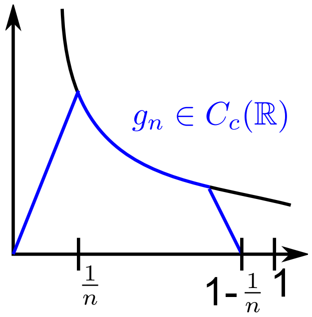
$$\Rightarrow f_n \in C_c(\mathbb{R}), \ \ f_n \leq f_{n+1}, \ \ f_n \to f \text{ pw} \int\limits_\mathbb{R} f_n^2 dx = \int\limits_{1+\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{x^2} dx + \int\limits_1^{1+\frac{1}{n}} \underbrace{(\frac{n}{1+\frac{1}{n}} x - \frac{n}{n+\frac{1}{n}})}_{`1} dx +$$

$$\int\limits_n^{n+1} \underbrace{(-\frac{1}{n} x + 1 + \frac{1}{n})}_{\leq 1} dx$$

$$= [\tfrac{1}{x}]_{1+\frac{1}{n}}^n + 1 \cdot (1 + \tfrac{1}{n} - 1) + \tfrac{1}{n}(n + 1 - n) = -\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1} + \underbrace{2\frac{1}{n}}_{\to 0} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

$\Rightarrow (f_n^2) FF mit f_n^2 \to f pw.$
$\Rightarrow f^2 \in \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
Beh.: $f \notin \mathcal{L}^(\mathbb{R})$: Angenommen, $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}^1$
Nun ist $f_n \in \mathcal{L}^1 \quad \forall n \in \mathbb{N} mit f_n \leq f$
$\Rightarrow \int\limits_\mathbb{R} f_n \leq \int\limits_\mathbb{R} f < \infty$
$\infty > \int\limits_\mathbb{R} f_n dx \geq \int\limits_{1+\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_{1+\frac{1}{n}}^n = \ln(n) - \ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow}$
$\geq \ln(n) \to \infty \qquad \Rightarrow$ Widerspruch.
Jetzt zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathbb{1}_{(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x}}$
Beweis analog zu Beweis von $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \quad f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

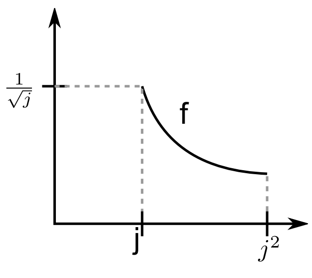



## Aufabe 2

$(f_j) \in \mathcal{L}^1, \quad f_j \to$ f pw. f.ü. $\exists g \in \mathcal{L}^1$
$|f_j| \leq g$ f.ü. $\forall j \in \mathbb{N}$
Beh.: $\int\limits_{\mathbb{R}} |f_j - f| dx \to 0$
$f_j \to f$ pw f.ü.: $\quad \exists N \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge mit
$f_j(x) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$
$|f_i| \leq g$ f.ü. $\forall j \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \forall j \in \mathbb{N} \exists N_j \in \mathbb{R}^n$ Nullmenge mit
$|f_j(x)| \leq g(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N_j$
Sei $N := \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} N_j$.
Dann ist $N_j$ wieder eine Nullmenge mit $|f_j(x)| \leq g(x) \forall j \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$
$|f_j(x)| \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} |f(x)| \Rightarrow |f(x)|‘g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$
$\Rightarrow |f_j - f| \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0$ pw. f.ü.
$|f_j - f| \leq |f_j| + |f| \leq g + g = 2g$ f.ü. $\in \mathcal{L}^1$
$\overset{Lebesgue}{\Rightarrow} \int\limits_{\mathbb{R}} |f_j - f| dx \to \int\limits_{\mathbb{R}} 0 dx = 0$

## Aufabe 3

Gesucht $(f_j), (g_j) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ mit
$||f_j||_\infty \to 0, \quad ||f_j||_2 \to \infty$
$||g_j||_\infty \to \infty, \quad ||g_j||_2 \to 0$
Setze $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_j(x) = j \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{j^3}]}$
Dann ist für $j \in \mathbb{N}, \quad g_j \in \mathcal{L}^1$:
$||g_j||_\infty = ess \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |g_j(x)| = ess \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} j = j \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} \infty$
$||g_j||_2 = \int\limits_{\mathbb{R}} g_j^2 dx = \int\limits_0^{\frac{1}{j^3}} j^2 dx = \frac{j^2}{j^3} = \frac{1}{j} \to 0$
Setze $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_j(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[j, j^2]}$
Wie in Aufgabe 1 sieht man $f_j \in \mathcal{L}^1 \forall j \in \mathbb{N}$
Es gilt für $j \in \mathbb{N}$




$||f_j||_2 = \int\limits_{\mathbb{R}} f_j^2 dx = \int\limits_j^{j^2} (\frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx$
$= \int\limits_j^{j^2} \frac{1}{x} = [\ln(j)]_j^{j^2} = \ln(j^2) + \ln(j) = \ln(j) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} \infty$
$||f_j||_\infty = ess \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_j(x)| = ess \sup\limits_{x \in [j, j^2]} \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{j}} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0$

## Aufabe 4

a) Immer: $\bigcap U_\varepsilon(M) = \overline{M} \underset{M\ offen}{\neq} M$

$M(0,1) \subset \mathbb{R}$

b) $M_j = \mathbb{R} \times [0, \frac{1}{j}] \Rightarrow \lambda(M_j) = \infty \quad \Rightarrow \inf\limits_{j\in\mathbb{N}} \lambda(M_j) = \infty$

$\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} M_j = \mathbb{R} \times \{0\}$ (echter Unter-Vraum von $\mathbb{R}^2$)

$\underset{Blatt\ 1.5}{\Rightarrow} \lambda(\mathbb{R} \times \{0\}) = 0$

Geht auch schief: $M_j = [j, \infty)$

## Aufabe 5

(i)⇒(ii) $\exists (f_k)$ FF. mit $f_k(x) \to \infty \forall x \in N$

$k, l \in \mathbb{N}, \quad M_{k,l} := f_k^{-1}((l,\infty)) \subset \mathbb{R}^n$ offen

($f_k$ stetig ($\in C_c(\mathbb{R})$) und $(l,\infty)$ offen in $\mathbb{R}$)

$M_l := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} M_{k,l}$ offen in $\mathbb{R}^n$

Sei $f := \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad f(x) := f_k(x) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} & \text{, falls } \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) \text{ ex.} \\ \infty & , sonst \end{cases}$

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^+$ mit $\infty \mathbb{R} f dx = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_k dx$ und speziell $f(x) = \infty \forall x \in N$

$N \leq M_l \leq f^{n-1}([l,\infty))$

Sei $\int\limits_{\mathbb{R}} f dx =: x \in \mathbb{R}$. Es gilt $N \leq M_l$.

$M_l$ ist die Vereinigung der offenen $M_{k,l}, \ k \in \mathbb{N}$ und es gilt

$\lambda(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} M_{k,l}) = \lambda(M_l) = \int\limits_{M_l} 1 dx \leq \int\limits_{M_l} \underbrace{\frac{f(x)}{l}}_{\leq 1 \forall x \in M_l} dx \leq \frac{1}{l} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) dx = \frac{c}{l}$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle nun $l \in \mathbb{N}$ mit $\frac{c}{l} < \varepsilon \Rightarrow (ii)$

(ii)⇒(iii) Zu $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon$ wie in (ii) gibt nach Blatt 2.1

$(Q_k)_{k\in\mathbb{N}} mit U_\varepsilon = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ und

$\lambda(Q_{k_1} \cap Q_{k_2}) = 0, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N} \quad k_1 \neq k_2$

$(Q_{k_1} \cap Q_{k_2} \subset \partial Q_{k_1}, \ \lambda(\partial Q_{k_1}) = 0)$

$\Rightarrow N \subset U_\varepsilon = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} Q_k$

$\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \lambda(Q_k) = \lambda(\bigcup k \in \mathbb{N} Q_k) = \lambda(U_\varepsilon) < \varepsilon$

(iii)⇒(i) Notation wie im Hinweis auf Aufgabenblatt

$(f_N)_{N\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_N \leq f_{N+1}$

$x \in M \subset \mathbb{R}^n$ mit (iii):

$$f_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} f_l^{(k)} \geq \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\sum_{l=1}^{N} \mathbb{1}_{Q_l(k)}(x)}_{\geq 1} \geq \sum_{k=1}^{N} 1 = N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

$(M \subset \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} Q_l^{(k)})$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_N dx = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} f_l^{(k)} dx}_{\leq 2\lambda(Q_l^{(k)})} \leq 2 \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\sum_{l=1}^{N} \lambda(Q_l^{(k)})}_{\leq \frac{1}{2^k}} \leq 2 \sum_{k=1}^{N} \tfrac{1}{2^k} \leq 2 \cdot 1 = 2$$

$\Rightarrow (f_N)_{N \to \mathbb{N}}$ FF mit $F_N(x) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \infty \forall x \in M$