8 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 8.6.2011

Aufabe 1

a) $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-it}{1+t^1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+it}$

b) $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \frac{\sin(t)}{2} + \frac{2\cos(t)}{t^2} - \frac{2\sin(t)}{t^3} + i(\frac{\cos(t)}{t} + \frac{2\sin(t)}{t^2} + \frac{2\cos(t)}{t^3} + \frac{2}{t^3}) & t \neq 0 \\ \frac{1}{3} & t = 0 \end{cases}$

c) $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+t^2}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 2\frac{\sin(t)}{t} & t \neq 0 \\ 2 & t = 0 \end{cases}$

Aufabe 2

$\hat{f}, g \in \mathcal{L}^1$
$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f} g dxt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{R} \int\limits_{\mathbb{R}} g(t) f(x) e^{-ixt} dxdt$
$h(t,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(t) f(x).$
$h \overset{!}{\in} \mathcal{L}^1 \Rightarrow \hat{f}, g \in \mathcal{L}^1 (\hat{f}g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(t,x) dx \text{ (Fubini)})$
$\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f} g dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} g(t) f(x) e^{-ixt} dxdt \underset{Fubini}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-itx} h(t,x) d(t,x)$
Auch nach Fubini: $\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f} g dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(t) f(x) e^{-itx} dtdx = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{g} f dx$ Z.z.: $h \in \mathcal{L}^1$:
1. Schritt: $g, f \in \mathcal{L}^+ \Rightarrow h \in \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^1$
2. Schritt: $g, f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow h \in \mathcal{L}^1$
1. Schritt:
$(g_n), (f_n)$ FF, $g_n \to g, \ f_n \to f$
$h_n(t,x) := g_n(t) f_n(x)$
$\Rightarrow h_n$ FF, $\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f} g dt$ pw.
$\Rightarrow h \in \mathcal{L}^1$
2. Schritt:
$g = g_1 - g_2, \quad f = f_1 - f_2, \quad mit g_1, g_2, f_1, f_2 \in \mathcal{L}^+$
$h(t,x) = g(t) f(x) = \underbrace{g_1(t) f_1(x)}_{h_1(t,x)} - \underbrace{g_2(t) f_1(x)}_{h_2(t,x)} - \underbrace{g_1(t) f_2(x)}_{h_3(t,x)} + \underbrace{g_2(t) f_2(x)}_{h_4(t,x)}$
Schritt 1 $\Rightarrow h_1 - h_4 \in \mathcal{L}^1 \quad \Rightarrow h = h_1 - h_2 - h_3 + h_4 \in \mathcal{L}^1$

Aufabe 3

a) $l^2 := \{(a_n) \subset \mathbb{C} \big| \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty\}$

Haben Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$: $< x, y >= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

$\sqrt{< x, x >} = ||x|| = \big(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 \big)^{\frac{1}{2}}$

Z.z.: $< *, * >: l^2 \times l^2 \to \mathbb{C}, \; < (x_n), (y_n) >= \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$ ist sklprod.

1. $< *, * >$ wohldefiniert?
   $(x_n), (y_n) \in l^2$, Also für $N \in \mathbb{N} \sum\limits_{n=1}^{N} |x_n \overline{y_n}| \leq \big(\sum\limits_{n=1}^{N} |x_n|^2 \big)^{\frac{1}{2}} \cdot \big(\sum\limits_{n=1}^{N} |y_n|^2 \big)^{\frac{1}{2}}$
   (Cauchy-Schwarz Ungl., siehe Ana2)
   $\leq \big(\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 \big)^{\frac{1}{2}} \cdot \big(\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |y_n|^2 \big)^{\frac{1}{2}} < \infty$
   $\Rightarrow \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$ ist absolut konvergent, insbes. ex die Reihe.
2. $\forall (x_n), (y_n), (z_n), \; \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt:
   $< \lambda(x_n) + \mu(y_n), (z_n) >= \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{N} (\lambda x_n + \mu y_n) \overline{z_n}$
   $\lim\limits_{N \to \infty} \lambda \sum\limits_{n=1}^{N} x_n \overline{z_n} + \lim\limits_{N \to \infty} \mu \sum\limits_{n=1}^{N} y_n \cdot \overline{z_n}$
   $= \lambda < (x_n), (z_n) > + \mu < (y_n), (z_n) >$
   Genauso sieht man:
   $< (z_n), \lambda(x_n) + \mu(y_n) >= \overline{\lambda} < (z_n), (x_n) > + \overline{\mu} < (z_n), (y_n) >$

1.,2. $\Rightarrow < *, * >$ ist sklprod.
$\Rightarrow ||.|| := \sqrt{< *, * >}$ ist Norm.

b) In $\mathbb{R}^n$ gilt: $(x_n) \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt $\Rightarrow \exists (x_{n_k})$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$, d.h. $|x_{n_k} - x| \to 0$
Im unendlich dimnsionalen Raum l^2 geht das schief:
z.B. $l^2 \ni e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (1 an nter Stelle) $||e_n||_2 = ||e_n|| = 1 (||.|| ausa)$
$(e_n) \subset l^2$ist beschr., liegt sogar im Einheitsball, aber:
Angenommen, es gibt Teilfolge (e_{n_k}) und $(x_i) \subset l^2$ mit $||e_{n_k} - x_i||_2^2 \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$
$||...||_2 = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} |(e_{n_k})_i - x_i|^2 \underset{j \in \mathbb{N}}{\geq} |(e_{n_k})_j - x_j|$
$\Rightarrow |(e_{n_k})_j - x_j| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$ Aber $(e_{n_k})_j \overset{n_k \geq j}{=} 0 \quad (n_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \infty)$
$\Rightarrow x_j = 0$
$\Rightarrow 1 = ||e_{n_k}||_2 = ||e_{n_k} - 0||_2 \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow$ Widerspruch!

Aufabe 4

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{i0x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = 1$

b) $(\hat{f})'(t) \overset{!}{=} -t \hat{f}(t)$
$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-itx}}_{g(x,t)} dx$

(i) $\partial_2 g(x, t) = (-ix) g(x, t) \quad \forall x, t \in \mathbb{R}$

(ii) $g(*, t) \in \mathcal{L}^1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
(siehe Beweis für die Existenz der Fouriertransformierte für Fkt.n aus $\mathcal{L}$

(iii) $\forall x,t \in \mathbb{R}: \quad |\partial_2 g(x,t)| = |x \cdot g(x,t)| = |x|e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{|x|}{e^{\frac{x^2}{2}}} \in \mathcal{L}^1$

$$\frac{|x|}{e^{\frac{x^2}{2}}} \leq \begin{cases} R & , t \in [-R,R] \\ \frac{|x|}{\frac{(\frac{x^2}{2})^2}{2!}} & , t \in \mathbb{R} \setminus [-R,R] \in \mathcal{L} \end{cases}$$

$h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_1(x) = R\mathbb{1}_{[-R,R]}(x), \quad h_2(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-R,R]}\frac{1}{2}\frac{1}{|x|^3}$

$h_1, h_2 \in \mathcal{L}^1 \quad \Rightarrow h_1 + h_2 \in \mathcal{L}^1$

$|\partial_2 g(x,t)| \leq h_1(x) + h_2(x)$

$$\Rightarrow (\hat{f})'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \partial_2 g(x,t)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix)e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ixt} dx = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}[-e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ixt}] + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}}(-it)e^{-itx}dx \right)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{i^2 t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ixt} dx = -\frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ixt} dx = -t\hat{f}(t)$$

$$\text{(a),(b)}\Rightarrow \begin{cases} \hat{f}'(t) = -t\hat{f}(t) \quad t \in \mathbb{R} \\ \hat{f}(0) = 1 \end{cases}$$

$$-\frac{t^2}{2} = [-\frac{s^2}{2}]_0^t = \int_0^t (-s)ds = \int_0^t \frac{\hat{f}'(s)}{\hat{f}(s)} ds = [\ln(\hat{f}(s))]_0^t = \ln(\frac{\hat{f}(t)}{\hat{f}(0)})$$

$$\Rightarrow \hat{f}(t) = \hat{f}(0)e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)$$

Aufabe 5

a) $L^2(I = [0, 2\pi], R)$

$u_1, ..., u_n \in L^2$, orthogonal: $< u_i, u_j >_{L^2} = 0 \forall i, \neq j, i,j \in \{1,...,n\}$

$U = span\{u_1, ..., u_n\}$ (dim U=n)

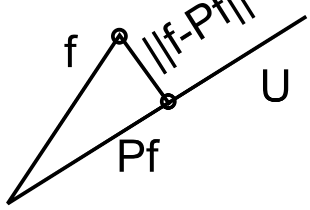
Im $\mathbb{R}^n : x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^N$ orthogonal $(n < N) :< x_j, x_j >_{\mathbb{R}^N} = 0, \; i \neq j$

$U = span\{x_1, ..., x_n\}, \quad P : \mathbb{R}^n \to U$

$$Px = \sum_{i=1}^{n} < x, x_i >_{\mathbb{R}^2} x_i$$

Hier in $\mathcal{L}^2 : \; P : \mathcal{L}^2 \to U$

$$Pf := \sum_{i=1}^{m} \underbrace{< f, u_i >_{\mathcal{L}^2}}_{= \int_{\mathbb{R}} f u_i dx} u_i$$



b) $\forall u \in U : ||f - u||_{\mathcal{L}^2} \geq ||f - Pf||^2_{\mathcal{L}}$

In anderen WOrten: $||f - Pf||^2_{\mathcal{L}} = \inf_{u \in U} ||f - u||^2_{\mathcal{L}}$

$$u \in U \Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

$||f - u||^2_{\mathcal{L}^2} = ||f||^2_{\mathcal{L}^2} + ||u||^2_{\mathcal{L}^2} - 2 < f, u >_{\mathcal{L}^2}$

$||f - Pf||^2_{\mathcal{L}^2} = ||f||^2_{\mathcal{L}^2} + ||Pf||^2_{\mathcal{L}^2} - 2 < f, Pf >_{\mathcal{L}^2}$

$$||Pf||^2_{\mathcal{L}^2} = \sum_{i=1}^{n} | < f, n_i > |^2 =< f, Pf >_{\mathcal{L}^2}$$

$\Rightarrow ||f - Pf||^2_{\mathcal{L}^2} = ||f||^2_{\mathcal{L}} - ||Pf||^2_{\mathcal{L}^2}$

$$\Rightarrow \left[||f - u||^2_{\mathcal{L}^2} \overset{!}{\geq} ||f - Pf||^2_{\mathcal{L}^2} \Leftrightarrow ||u||^2_{\mathcal{L}^2} - 2 < f, u >_{\mathcal{L}^2} \overset{!}{\geq} -||Pf||^2_{\mathcal{L}^2} \right]$$

$$||u - Pf||^2_{\mathcal{L}^2} = ||u||^2_{\mathcal{L}^2} - 2 \underbrace{< f, u >_{\mathcal{L}^2}}_{<Pf,u>_{\mathcal{L}^2}} + ||Pf||^2_{\mathcal{L}^2} \geq 0$$