10 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 22.6.2011

Aufabe 1

Z.z.: $\mathbb{F}h_n = ch_n$
Beh.: $h_n'(x) = xh_n(x) - h_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$
Beweis:
$H_n x) = (-1)^n e^{x^2}[e^{-x^2}]^{(n)}$
$h_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x)$
$h_n'(x) = (-x)e^{-x^2/2}H_n(x) +^{-x^2/2} H_n'(x)$
$= (-x)h_n(x) + e^{-x^2/2}((-1)(2x)e^{x^2}[e^{-x^2}]^{(n)} + (-1)^n e^{x^2}[e^{-x^2}]^{(n+1)})$
$= (-x)h_n(x) + 2xh_n(x) - h_{n+1}(x) = xh_n(x) - h_{n+1}$

Wir haben auf Blatt 8 Aufgabe 4 gezeigt: $\mathbb{F}h_0 = h_0$
Damit gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein $c_n \in \mathbb{C}$ mit $\mathbb{F}h_n = c_n h_n$
Es folgt mit $c := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$:
$\mathbb{F}h_{n+1}(x) = c\int\limits_{\mathbb{R}} h_{n+1}(y)e^{-ixy}dy = c\int\limits_{\mathbb{R}}(yh_n(y) - h_n'(y))e^{-ixy}dy$
$= \frac{1}{-i}\frac{d}{dx}c\int\limits_{\mathbb{R}} h_n(y)e^{-ixy}dy - ixc\int\limits_{\mathbb{R}} h_n(y)e^{-ixy}dy$
$= i\hat{h}_n'(x) - ix\hat{h}_n(x) = i(c_nh_n)'(x) - ix(c_nh_n)(x)$
$= ic_nh_n'(x) - ixc_nh_n(x) = ic_n(h_n'(x) - xh_n(x))$
$= -ic_nh_{n+1}(x) = c_{n+1}h_{n+1}(x)$ mit $c_{n+1}i = (-ic_n) = (i)^{n+1}c_0 = (-1)^{n+1}$

Aufabe 2

$F : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ F(\lambda) = UR - \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{\sin(x)}{x}dx$

Für $\lambda > 0$ ist $F(\lambda) = LI - \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{\sin(x)}{x} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{\sin(x)}{x}dx$

a) Sei $\lambda_0 \in (0,\infty)$ und $f : (\frac{\lambda_0}{2},\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(\lambda,x) := e^{-\lambda x}\frac{\sin(x)}{x}$

i) $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,x) = (-x)e^{-\lambda x}\frac{\sin(x)}{x} = -e^{-\lambda x}\sin(x)$

ii) $f(\lambda,*)$ mbar. $\forall \lambda \in (\frac{\lambda_0}{2},\infty)$
$|f(\lambda,x)| \leq^{-\lambda x} \leq e^{-\frac{\lambda_0}{2}x} \quad \forall \lambda \in (\frac{\lambda_0}{2},\infty),\ x \in (0,\infty)$
$[x \mapsto e^{-\frac{\lambda_0}{2}x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)] \in \mathbb{L}^1$
$\Rightarrow f(\lambda,*) \in \mathbb{L}^1 \quad \forall \lambda \in (\frac{\lambda_0}{2},\infty)$

iii) $\forall \lambda \in (\frac{\lambda_0}{2},\infty), \quad x \in (0,\infty)$
$|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,x)| \leq e^{-\lambda x} \leq \underbrace{e^{-\frac{\lambda_0}{2}x}}_{unabh.\ v\ \lambda}$
$[x \mapsto e^{-\frac{\lambda_0}{2}x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)] \in \mathbb{L}^1$
F diffbar mit $F'(\lambda) = -\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\sin(x)dx$
$|F(\lambda)| \leq \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}dx = [-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}]_0^\infty$

$= \frac{1}{\lambda} \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Weiter gilt:

$F'(\lambda) = -\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} \sin(x) dx$

$= -[e^{-\lambda x}(-cos(x))]_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}(-\lambda) \cdot (-\cos(x)) dx$

$= -1 + [e^{-\lambda x} \sin(x)]_0^\infty - \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}(-\lambda) \sin(x) dx$

$= -1 + \lambda^2 \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} \sin(x) dx$

$= -1 - \lambda^2 F'(\lambda) \quad \Rightarrow F'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2} = -\arctan'(\lambda)$

$\Rightarrow F(\lambda) = -\arctan(\lambda) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$0 = \lim\limits_{\lambda \to \infty} F(\lambda) = -\frac{\pi}{2} + c \quad \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$ und $F(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\lambda)$

b) Wir wissen aus a):

$\int e^{-\lambda x} \sin(x) dx = [e^{-\lambda x}(-\cos(x)) - e^{-\lambda x} \sin(x)] - \lambda^2 \int e^{e^{-\lambda x} \sin(x) dx}$

$= \frac{1}{1+\lambda^2}[e^{-\lambda x}(-\cos(x)) - e^{-\lambda x} \sin(x)]$

Sei $R > 0$, $\lambda \in [0,1]$. Dann ist

$\int\limits_0^\infty e - \lambda x \frac{\sin(x)}{x} dx = [\frac{1}{1+\lambda^2}(e^{-\lambda x}(-\cos(x)) - e^{-\lambda x} \sin(x)) \frac{1}{x}]_R^\infty + \int\limits_R^\infty \frac{1}{1+\lambda^2}(e^{-\lambda x}(-\cos(x)) - e^{-\lambda x} \sin(x)) \frac{1}{x^2} dx$

$\Rightarrow \left| \int\limits_R^\infty e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq 2\frac{1}{R} + 2 \int\limits_R^\infty \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{R} + [-\frac{2}{x}]_R^\infty \leq \frac{4}{R} \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $R_1 > 0$ mit

$\left| \int\limits_R^\infty e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \lambda \in [0,1], \ R \geq R_1$

Weiter gibt es ein $R_2 > R_1$ mit

$\left| UR - \int\limits_R^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall R > R_2$

Jetzt gibt es noch ein $1 > \delta > 0$ mit

$\left| \int\limits_0^{R_2} \frac{\sin(x)}{x} dx - \int\limits_0^{R_2} \frac{\sin(x)}{x} e^{-\lambda x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \lambda \in [0, \delta)$

Insgesamt ist jetzt

$\left| UR - \int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx - F(\lambda) \right|$

$= \left| UR - \int\limits_{R_2}^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx + \int\limits_0^{R_2} \frac{\sin(x)}{x} dx - \int\limits_0^{R_2} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} dx - \int\limits_{R_2}^\infty e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} dx \right|$

$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$

Insbesondere gilt:

$\varepsilon > \lim\limits_{\lambda \to 0} \left| UR - \int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx - F(\lambda) \right| = \left| UR - \int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{\pi}{2} \right|$

Aufabe 3

a) Sei $f \in \mathbb{L}^1$. Dann ist für $\frac{-x^2}{2}$

$\hat{f}(x) = c \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy = c \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) e^{i(-x)y} dy$

$\overset{y \mapsto -y}{=} c \int\limits_{\mathbb{R}} f(-y) e^{ixy} dy = [f \circ (-id)]^\vee$

b) Für $\varphi \in \mathbb{S}$:
$\mathbb{F}^2\varphi = \mathbb{F}(\hat{\varphi}) = \mathbb{F}([\varphi \circ (-id)]^\vee) = \varphi \circ (-id)$
$\mathbb{F}^4\varphi = \mathbb{F}^2(\varphi \circ (-id)) = \varphi \circ (-id) \circ (-id) = \varphi$
Für $f \in \mathbb{L}^2 gibtes (\varphi_n) \subset \mathbb{S} mit \varphi_n \to f \in L^2$
$\Rightarrow ||\mathbb{F}^4 f - \mathbb{F}^4\varphi_n||_{L^2} = ||\mathbb{F}^3 f - [\mathbb{F}\varphi_n||_{L^2} = ... = ||f - \varphi_n||_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
$||\mathbb{F}^4 f - f||_{L^2} \leq ||\mathbb{F}^4 \underbrace{\varphi_n}_{\to 0} - \mathbb{F}^4 f||_{L^2} + ||\underbrace{\mathbb{F}^4\varphi_n - \varphi_n}_{=0}||_{L^2} + ||$
$underbrace varphi_{n \to 0} - f||_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
$\Rightarrow \mathbb{F}^4 f = f$

c) Aus Aufgabe 1 wissen wir $\mathbb{F}h_n = (-i)^n h_n$
$(-i)^n$ sind EW von $\mathbb{F}$
Aus b) wissen wir für einen EW $\lambda \subset \mathbb{C}$ von $\mathbb{F}$ mit EF $f \in \mathbb{L}^2$:
$f = \mathbb{F}^4 f = \lambda^4 \cdot f \Rightarrow \lambda^4 1$
$\Rightarrow \lambda \in \{\pm 1, \pm i\}$
Damit gibt es nur ± 1 und $\pm i$ als EW von $\mathbb{F}$

Aufabe 4

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \sqrt{\vec{\nabla}} \frac{\sin^2(nt)}{(nt)^2}$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(t) := \frac{\sin^2(t)}{t^2}$
$g \in \mathbb{L}^1$ (Blatt 9, Aufgabe 2)
Mit Transformationsformel für Lebesgue int. Fu' erhalten wir, dass $f_n \in \mathbb{L}^1$ mit
$||f_n||_1 = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f_n(t)}_{\geq 0} dt = \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(nt)}{(nt)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$
$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} g(t) dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) := \begin{cases} 2 - |x| & , |x| \leq 2 \\ 0 & , sonst \end{cases}$
$\mathbb{L}^1 \ni h = \hat{g},\ \hat{f}_n \in \mathbb{L}^1$. Wieder mit Transformationssatz erhalten wir
$\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-ixt} dt\big) dx$
$= \int_{\mathbb{R}} \big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} n g(nt) e^{-ixnt} dt\big) dx$
$= \frac{n}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n(xn) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n(x) dx$
$\Rightarrow ||\hat{f}_n||_1 = \int_{\mathbb{R}} h(x) dx \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

Aufabe 5

QM: $u(x,t) \in \mathbb{R}$: $\quad \frac{\partial u}{\partial t} = u''(x), \quad u(x,t) = u_1(x) u_2(t), \ \begin{cases} \ddot{u}_2 ... \\ u_1''(x) = c u_1(x) \end{cases}$
mit $u(x,y) = u_1(x) \cdot u_2(y)$
$u_{1,2}''(x) = c u_1(x), \quad c \in (0,a)$ bzw. $(0,b)$
$u_1(0) = u_1(a) = 0, \qquad u_2(0) = u_2(b) = 0,$

$u_1 = \sin(\frac{n\pi}{b}x), \quad u_2 = \sin(\frac{m\pi}{d})$
$\Delta u = cu, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$