

# 1 Jochens Hinweise zur Klausur in Analysis 4

- Fubini: wann welches Integral vertauschen/berechenbar/existent!
- Riemann-Stieltjes
- Orthonormalisierung bzgl.  $\mathcal{L}^2$  mit/ohne Gewicht auf Menge
- Fourier-Transformation
- Lösung einer DGL mit Randwertproblemen mit Fourier-Reihe

Beispiel:

$$f(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k [t] e^{ikx} \in \mathcal{L}^2[a, b]$$

$$f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\partial_x^2 f = -\partial_t^2 f$$

$$\partial_x^2 f = \sum \alpha_k(t) (-k^2) e^{ikx}$$

$$\partial_t^2 f = \sum \ddot{\alpha}_k(t) e^{ikx}$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha}_k = +k^2 \alpha_k$$

$$\Rightarrow \alpha_k = \underbrace{\alpha_k}_{=0 \forall k \geq 0} e^{kt} + \underbrace{b_k}_{=0 \forall k \leq 0} e^{-kt}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-kt} e^{ikx}$$

etc., siehe aktuelles Blatt

- Integrierbar, Riemann-integrierbar?

$$\sum a_n \text{intbar} \Leftrightarrow \sum |a_n| < \infty$$

$$\exists R - \int_a^b f, \quad \exists \int f dx \Leftrightarrow \int |f| < \infty$$

Beispiel:  $\frac{\sin(x)}{x}$  auf  $[0, \infty)$  schwankt stark und unterscheidet sich in int'barkeiten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) \chi_{[-n, n]} dx$$

$$= \frac{a}{2} = \frac{a+n^2-n^2}{2} = \frac{x^2}{2} \Big|_{-n}^{\sqrt{a^2+n^2}} = \int_{-n}^{\sqrt{a^2+n^2}} x dx = \int_{-n, \sqrt{a^2+n^2}} x dx$$

Wäre es Lebesgue-Integrierbar, müsste der Wert unabhängig von den Grenzen sein,

Riemann: Änderung der Grenze ändert das Ergebnis (bzgl. ganz  $\mathbb{R}$ )

nicht-Lebesgue-Intbare Funktionen erhalten auch unter Umständen Ergebnisse, allerdings nicht eindeutig!

$$\int_{\mathbb{R}} |x| = 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\infty} = \infty \Rightarrow x \notin \mathcal{L}^2$$

$$\text{Lebesgue hieße: } \int x dx = \int x^+ d\lambda - \int x^- d\lambda = \int_0^{\infty} x dx - \int_{-\infty}^0 (-x) dx = \infty - \infty$$

$$\int f' d\lambda = f(\infty) - f(-\infty)$$

Lebesgue-Integrierbare Funktionen wären z.B.

$$\forall \alpha > 0 : \int \frac{1}{x^\alpha} \chi_{1, \infty} dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_1^{\infty}$$

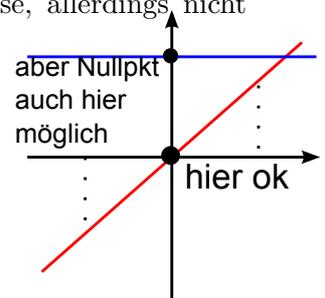
$$e^{-|t|} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad e^{-t} \in \mathcal{L}^1, \quad e^{-t} \chi_{[0, \infty)} \in \mathcal{L}^1$$

$$\frac{1}{x} \chi_{[1, \infty)} \notin \mathcal{L}^1$$

- Schwache D'barkeit

$$f \text{ schwach d'bar: } |\text{Abb. } f' \Leftrightarrow \int f' \varphi = - \int f \varphi' \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$$

$$\text{z.B. } f \in \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^1, \quad F(x) := \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$



$$\begin{aligned}
\text{z.Z.: } f, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty : \int F \varphi' d\lambda &= \int \int_{-\infty}^x f(t) dx \varphi' dx \\
&= \int \int f(t) \mathbb{1}_{\{t \leq x\}} dt \varphi'(x) dx = \int \int \varphi'(x) \mathbb{1}_{\{x \geq t\}} f(t) dt \\
&= \int \underbrace{\int_t^\infty \varphi'(x) dx}_{\varphi(x)|_t^\infty} f(t) dt = - \int \varphi(t) f(t) dt
\end{aligned}$$

$$\lambda(A) = \int \mathbb{1}_A d\lambda$$

$$\int |\varphi'| \leq \lambda(\text{supp}(\varphi')) \|\varphi'\|_\infty$$

$$= \int |\varphi'| \mathbb{1}_{\text{supp}(\varphi')} dx \int \int |f(x) \varphi'(x) \mathbb{1}_{\{t \leq x\}}| dx dt = \int \int_{-\infty}^t |f(t)| dt \varphi'(x) dx \leq \|f\|_2 \|\varphi'\|_2 < \infty$$

$$\mathcal{C}_c^\infty : \text{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R} \text{ komp.}$$

$$\text{supp}(\varphi) \text{ (Träger)} = \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}$$

$$\text{Fubini: } \int f(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int \int f(x, y) dx dy, \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$$

$$(\lambda[a, b] = b - a)$$



• Rechenprobe  $\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^2 e^{-\lambda x^2}}_{* \in \mathcal{L}^2 \forall \lambda > 0} dx$

\*geht schnell gegen 0 für x gegen  $\infty$ !

$$|\underbrace{\partial_\lambda x^2 e^{-\lambda x^2}}_{-x^2 f_\lambda}| \leq g$$

$$e^{-\lambda x} \downarrow \text{in } \lambda$$

$$|e^{-\lambda x}| \leq e^{-\lambda_0 x} \quad \forall \lambda \geq \lambda_0 \text{ Sei } \lambda_0 > 0 \Rightarrow e^{-\lambda x^2} \leq e^{-\frac{\lambda_0}{2} x^2} \in \mathcal{L}^1$$

Für Vertauschbarkeit nur zu betrachten: ist in diesem Punkt Singularität?

Wenn in Umgebung definiert, erhält man die benötigte Majorante wie hier durch Differentiation!

Wir wissen allgemein (notfalls hierüber argumentieren):

$$e^{-\lambda x} \in \mathcal{S} \Rightarrow x^\alpha e^{-\lambda x} \in \mathcal{L}^1$$

$$\frac{1}{x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{x^2} \in \mathcal{L}^1[1, \infty), \quad \frac{1}{x^2+1} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{x} \in \mathcal{L}^1(K), \quad K \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ komp.}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \sin(x) dx \text{ ex. nicht.}$$

$$\text{Angenommen, es existiert, dann } \int \cos(x) = \int \sin(x) \Rightarrow \int \underbrace{e^{ix}}_{| \cdot | = 1} = (1+i)I, \text{ also nicht intbar!}$$