JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Lehrstuhl für Numerische Mathematik
Prof. Dr. E. Berdysheva
Dipl.-Phys. Daniel Schäfer

Numerik II im Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Studieren Sie das folgende *Volterra-Lotka-System* gekoppelter Differenzialgleichungen

$$x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t)$$
$$y'(t) = \delta x(t)y(t) - \gamma y(t)$$

mit Anfangswerten

$$x(0) = 20, \quad y(0) = 2$$

und Parametern

$$\alpha = 0.1, \quad \beta = 0.2, \quad \gamma = \delta = 0.4,$$

indem Sie die Gleichungen mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren und der Schrittweite $h = 0.1$ auf dem Intervall $0 \leq t \leq 1$ lösen. Zeichnen Sie die Kurven von $x(t)$ und $y(t)$ in *einen* Graphen und interpretieren Sie das Ergebnis in ein, zwei kurzen Sätzen; betrachten Sie dazu den Verlauf der Funktionen als Anzahl der Hasen bzw. Füchse.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Lösen Sie die *logistische Gleichung*

$$y' = y(1-y), \quad y(0) = 0.5$$

mit fünf Schritten des aus der Vorlesung bekannten klassischen Runge-Kutta-Verfahrens und Schrittweite $h = 0.2$.

Aufgabe 3 (15 Punkte)
Betrachten Sie die autonome Differenzialgleichung $y' = f(y)$ mit hinreichend glatter Funktion f. Das durch das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

definierte Runge-Kutta-Verfahren besitzt mindestens Ordnung 1, falls $\sum_{j=1}^{\nu} b_j = 1$ gilt. Zeigen Sie nun, dass dieses Verfahren mindestens von Ordnung

(a) 2 ist, fall außerdem noch gilt

$$\sum_{j=1}^{\nu} b_j c_j = \sum_{j=1}^{\nu} b_j \sum_{i=1}^{\nu} a_{j,i} = \frac{1}{2} \text{ bzw.}$$

(b) 3 ist, falls zusätzlich zu den Bedingungen für Ordnung 1 und 2 noch

$$\sum_{j=1}^{\nu} b_j c_j^2 = \frac{1}{3} \text{ und } \sum_{j=1}^{\nu} b_j \sum_{i=1}^{\nu} a_{j,i} c_i = \frac{1}{6}$$

gelten.

Abgabe: Dienstag, 07.05.2013, bis 12:00 Uhr in/vor Raum 149 HRZ oder in der Vorlesung.

1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 2 15.5.12

1.1 Aufgabe 1

$$x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \quad x(0) = 20$$
$$y'(t) = \delta x(t)y(t) - \gamma y(t) \quad y(0) = 2$$
$$\alpha = 0.1\ ,\ \beta = 0.2\ ,\ \delta = \gamma = 0.4\ ,\ h = 0.1$$
$$x_0 = 20$$
$$x_1 = 20 + 0.1(20\alpha - 20\beta y_0) = 19.4$$
$$y_0 = 2$$
$$y_1 = 2 + 0.1(0.4 * 20 * 2 - 0.4 * 2) = 3.52$$

1.2 Aufgabe 2

$$y' = y - y'\quad ,\ y(0) = 0.5\quad ,\ h = 0.2$$
$$k_1 = f(x_0, y_0) = 0.25$$
$$k_2 = f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}k_1)0.2494$$
$$k_3 = f(x_0 + 0.1, y_0 + 0.1k_2) = 0.2494$$
$$k_4 = f(0.2, 0.54988) = 0.2475$$
$$y_1 = y_0 + \tfrac{h}{6}(k_1 + 2h_2 + 2h_3 + k_4) = 0.5498$$
$$y_2 = y_1 + \tfrac{1}{30}(0.2475 + 0.4888 + 0.489 + 0.2403) = 0.5987$$
$$y_3 = y_2 + \tfrac{1}{30}(0.2403 + 0.4698 + 0.4702 + 0.2888) = 0.6457$$
$$y_4 = y_3 + \tfrac{1}{30}(0.2288 + 0.4432 + 0.4436 + 0.2139) = 0.69$$
$$y_5 = y_4 + \tfrac{1}{30}(0.213 + 0.4106 + 0.4114 + 0.1966) = 0.7311$$

1.3 Aufgabe 3

Es gilt:

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + h\sum_{j=1}^{\nu} \kappa_j k_j \\
&= y_k + h\sum_{j=1}^{\nu} \kappa_j f(y_k + h\sum_{i=1}^{\nu} a_{ji}k_i) \\
&= y_k + h\sum_{j=1}^{\nu} \kappa_j (f(y_k) + \kappa_k h\sum_{i=1}^{\nu} a_{jk}k_i + f_{yy}\tfrac{h^2}{2}(\sum_{i=1}^{\nu} a_{ji}k_i)^2) + O(h^4) \\
&= y_k + hf\sum_{j=1}^{\nu} \kappa_j + h^2 f_y \sum_{j=1}^{\nu} \kappa_j \sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} f(y_k + h\sum_{l=1}^{\nu} a_{il}\kappa_l) \\
&+\tfrac{h^3}{2} f_{yy} \sum_{j=1}^{\nu} y_j (\sum_{i=1}^{\nu} a_{ji} f)^2 + O(h^4) \\
&= y_k + h\sum_{j=1}^{\nu} k_j + h^2 f_y \sum_{j=1}^{\nu} k_j \sum_{i=1}^{\nu} a_{ji}(f(y_k) + f_y, h\sum_{l=1}^{\nu} a_{il} f) \\
&+\tfrac{h^3}{2}\sum_{j=1}^{\nu} k_j (\sum_{i=1}^{\nu} a_{ji})^2 f^2 f_{yy} + O(h^4) \\
&= y_k + hf\sum_{j=1}^{\nu} y_j + h^2 f_y f\sum_{j=1}^{\nu} k_j \sum_{i=1}^{\nu} a_{ji} \\
&+h^3 f_y f\sum_{j=1}^{\nu} k_j \sum_{i=1}^{\nu} a_{ji}\sum_{l=1}^{\nu} a_{il} + \tfrac{h^3}{2}\sum_{j=1}^{\nu} \kappa_j (\sum_{i=1}^{\nu})^2 + f_{yy} f^2 + O(h^4)
\end{aligned}$$

$$y_k + hf\sum_{j=1}^{\nu} k_j + h^2 f_y f\sum_{j=1}^{\nu} k_j c_j + h^3 f_y^2 f\sum_{j=1}^{\nu} k_j \sum_{i=1}^{\nu} a_{ji}c_i + \tfrac{h^3}{2} f_{yy} f^2 \sum_{j=1}^{\nu} \kappa_j c_j^2 + O(h^4)$$

Es gilt außerdem:

$$
\begin{aligned}
y(x_k+h) &= y(x_k) + hy'(x_k) + \tfrac{h^2}{2}y''(x_k) + \tfrac{h^3}{6}y'''(x_k) + O(h^4)\\
&= y(\kappa_k) + hf + \tfrac{h^2}{2}f_yf + \tfrac{h^3}{6}(f_{yy}f^2 + f_y^2f) + O(h^4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau(x_k, y(x_k), h) &= \tfrac{1}{h}(y(x_k+h) - y(x_k) - (y_{k+1} - y_k))\\
&= f + \tfrac{h}{2}f_yf + \tfrac{h^2}{6}(f_{yy}f^2 + f_y^2f) - f\sum_{j=1}^{\nu}\kappa_j\\
&-hf_yf\sum_{j=1}^{\nu}\kappa_j\kappa_j - h^2f_y^2f\sum_{j=1}^{\nu}\kappa_j\sum_{i=1}^{\nu}y_{ji}c_i - \tfrac{h^3}{2}f_{yy}f^2\sum_{j=1}^{\nu}\kappa_jc_j^2 + O(h^3)\\
&= F(1 - \sum_{j=1}^{\nu} + hf_yf(\tfrac{1}{2} - \sum_{j=1}^{\nu}\kappa_jc_j) + h^2f_{yy}f^2(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu}\kappa_jc_j^2)\\
&+h^2f_y^2f(\tfrac{1}{6} - \sum_{j=1}^{\nu}\kappa_j\sum_{i=1}^{\nu}a_{ij}c_i) + O(h^3)
\end{aligned}
$$