

12 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 06.07.2011

Aufgabe 1

$$f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin(kx)$$

Satz 14.1:

(u_n) k-mal st. diffbar.

$u_n \rightarrow u^*$ lokal glm. konv. in M ($M \subset \mathbb{R}^n$ offen), dann

(a) u^* stetig

(b) \forall Multiindizes α , $|\alpha| \leq k$

(∂^α) lokal glm. konv. $\Rightarrow u^* \in C^k$ mit $\partial^\alpha u^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial^\alpha u_n$ (bzgl. lokal $\|\cdot\|_\infty$ (1))

zu (1): $\forall x \in M \exists \delta > 0$ mit $\sup_{y \in B(x, \delta)} |(u_n \rightarrow u^*)(x)| \rightarrow 0$

a) Seien $u_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $u_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \sin(kx)$,

$$n \leq m : |(u_n - u_m)(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^3} \sin(kx) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^3}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ konv., d.h. zu $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^3} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

$$\Rightarrow \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

Satz 11.1 liefert: f stetig.

b) (*) $\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \partial_x \partial_x u(t, x) & \forall t \geq 0, x \in [0, \pi] \\ u(0, x) = f(x) & \forall x \in [0, \pi], u(t, 0) = 0 = u(t, \pi) \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$

Idee: Die Fkt. $u : [0, \infty] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \sin(kx)$

mit $\alpha_k C_1$, $k \in \mathbb{N}$ könnte vielleicht (*) lösen.

$$\text{Vermutung } \partial_t u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha'_k(t) \sin(kx)$$

$$\partial_x \partial_x u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) (-k^2) \sin(kx)$$

Ist u eine LÖsung von (*), dann gilt für $l \in \mathbb{N}$:

$$\langle \partial_t u(t, x), \sin(l*) \rangle_{L^2} = \alpha_l(t) \cdot \|\sin(l*)\|_{L^2}^2$$

$$\langle \partial_x \partial_x u(t, x), l* \rangle_{L^2} = \alpha_l(t) (-l^2) \|\sin(l*)\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \alpha'_l(t) = -l^2 \alpha_l(t) \Rightarrow \alpha_l(t) = \alpha_l(0) e^{-l^2 t}$$

Wegen $u(0, x) = f(x) \quad \forall x \in [0, \pi]$ gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\langle u(0, x), \sin(k*) \rangle_{L^2} = \alpha_k(0) \|\sin(k*)\|_{L^2}^2$$

$$= \langle f, \sin(k*) \rangle_{L^2} = \frac{1}{k^3} \|\sin(k*)\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \alpha_k(0) = \frac{1}{k^3}$$

$$\Rightarrow u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k^3} \sin(kx)$$

$$\text{Sei nun } u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k^3} \sin(kx)$$

Wir zeigen nun, dass u (*) löst.

Dazu wenden wir den Satz 11.1 auf u mit $l \in \{0, 1, 2\}$ an.

$l = 0$: Sei $(t, x) \in [0, \infty) \times [0, \pi]$. Dann ist für $(s, y) \in [\frac{t}{2}, \infty) \times [0, \pi]$

$$u_n[\frac{t}{2}, \infty) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, u_n(s, y) := \sum_{k=1}^n \frac{e^{-k^2 s}}{k^3} \sin(ky)$$

$$n \leq m : |(u_n - u_m)(t, x)| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{e^{-k^2 s}}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^3} < \varepsilon$$

für bel. $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$

$$\xrightarrow{\text{Satz 11.1}} u \text{ stetig in } (x, t) \Rightarrow u \text{ stetig..}$$

$$l = 1: \text{nach t: } \partial_t u_n(t, x) = \sum_{k=1}^n (-k^2) \frac{e^{-k^2 t}}{k^3} \sin(kx)$$

Sei (t, x) fest gewählt, $(s, y) \in [\frac{t}{2}, \infty) \times [0, \pi]$

$$n \leq m : |(\partial_t u_n - \partial_t u_m)(s, y)| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{e^{-k^2 s}}{k} \leq \sum_{k=n+1}^m e^{-k^2 \frac{t}{2}}$$

$$e^{-k^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{e^{k^2 \frac{t}{2}}} \leq \frac{1}{k^2 \frac{t}{2}} \Rightarrow |(\partial_t u_n - \partial_t u_m)(s, y)| \leq \frac{2}{t} \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^3} < \varepsilon$$

$$\xrightarrow{\text{Satz 11.1}} \partial_t u(t, x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k} \sin(kx)$$

$$\text{Genauso sieht man: } \partial_x u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k^2} \cos(kx)$$

$$\partial_x \partial_x u(t, x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k} \sin(kx)$$

$$\partial_t \partial_x u(t, x) = - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} \cos(kx)$$

$$\partial_t \partial_t u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

$$e^{-k^2 t} \leq \frac{1}{k^2 t}, \quad k e^{-k^2 t} \leq k \frac{2}{k^4 t^2} = \frac{2}{t^2} \frac{1}{k^3}$$

Satz 11.1 $\Rightarrow u \in C^2$ mit

$$\partial_t u(t, x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k} \sin(kx)$$

$$\partial_x \partial_X u(t, x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k} \sin(kx)$$

$$\Rightarrow \partial_t u(t, x) = \partial_x \partial_x u(t, x)$$

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin(kx) = f(x)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-t^2 \pi}}{k^3} \sin(0) = 0$$

$\Rightarrow u$ löst (*)

Aufgabe 2

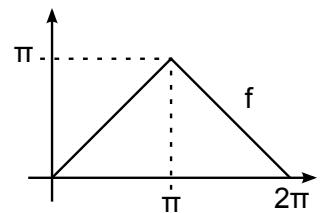
a) Mit Aufgabe 3 von Blatt 1 erhält man

$$a_0 = \pi$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & , k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{k^2 \pi} & , k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

b) Idee: $u : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$



$$u(t, x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) \sin(kx)$$

Annahme: u löst $(*)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \\ &= u(0, x) = \frac{a_0(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0) \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0) \sin(kx) \end{aligned}$$

Wie in Aufgabe 1 sieht man:

$$\pi = a_0 = a_o(0), \quad b_k(0) = b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad a_k(0) = a_k = \begin{cases} 0 & , k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{k^2\pi} & , k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\text{Annahme: } u_{tt}(t, x) = \partial_t \partial_t u(t, x) = \frac{a''_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a''_k(t) \cos(kx)$$

$$= u_{xx}(t, x) = \partial_x \partial_x u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-k^2) a_k(t) \cos(kx)$$

$$\Rightarrow \frac{a''_0(t)}{2} = 0, \quad a''_k(t) = (-k^2) a_k(t)$$

$$\Rightarrow \exists \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } a_0(t) = \lambda_0 + \mu_0 t, \quad \pi = a_0(0) = \lambda_0 \quad \Rightarrow$$

$$a_0(t) = \pi + t\mu_0$$

$$a_k(t) = \lambda_k \sin(kt) + \mu_k \cos(kt) \quad \Rightarrow a_k(0) = \mu_k a_k$$

$$\Rightarrow u(t, x) = \frac{\pi+t}{2} \mu_0 - \frac{4}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \cos((2k-1)x) \left(\frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)t) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx) \cdot \lambda_k \sin(kt)$$

$$0 = \partial_t u(0, x) = \frac{\mu_0}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k k \cos(kx)$$

$$\Leftrightarrow \mu_0 = 0, \quad \lambda_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u(t, x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)t)$$

c) i) Für $t \in \mathbb{R}$ fest:

$$x \mapsto u(t, x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)$$

$$g \in \mathbb{L}^2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} < \infty$$

ii) (x, t) fest, $\delta > 0$

$$u_n : [t-\delta, t+\delta] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_n(s, y) := \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)s)}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)$$

$$n \leq m : \quad |(u_n - u_m)(s, y)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{(2k-1)^2} < \varepsilon$$

(bel. $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall mn, \geq n_0$)

Satz 11.1 $\Rightarrow u$ stetig.

iii) u ist partiell nicht diffbar, weder nach x noch nach t .

$$\partial_t u_n(s, y) = - \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)s)}{(2k-1)} \cos((2k-1)x) \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

genauso $\partial_x u(s, y)$.

Aufgabe 3

a) $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$
 $P_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

b) $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$
 $P_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x$
 $P_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2x^2 - 1)$

c) $P_0(x) = 1$
 $P_1(x) = x - 1$
 $P_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{11}}(x^2 - 4x + 2)$

d) $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
 $P_1(x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}}$
 $P_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2\pi}}(x^2 - 1)$

Aufgabe 4

a) I kompakt, $\omega > 0$. Z.z.: $\mathbb{L}^2(I, \omega, \mathbb{C}) = \mathbb{L}(I, \mathbb{C})$
 $\mathbb{L}^2(I, \omega, \mathbb{C}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und } \omega|f|^2 \in \mathbb{L}^1\}$
 $\mathbb{L}^2(I, \mathbb{C}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und } |f|^2 \in \mathbb{L}^1\}$
I kompakt, ω stetig $\Rightarrow \exists \underbrace{\max \omega}_{=:c}, \underbrace{\min \omega}_{=:d}$
 $\omega|f|^2 \in \mathbb{L}^1, f \text{ messbar} \Rightarrow |f|^2 \text{ messbar, } |f|^2 \leq \frac{1}{d} \cdot \underbrace{\omega|f|^2}_{\in \mathbb{L}^1} \in \mathbb{L}^1$
 $\Rightarrow |f|^2 \in \mathbb{L}^1$
 $|f|^2 \in \mathbb{L}^1 \Rightarrow |f|^2 \text{ messbar, } \omega \text{ stetig} \Rightarrow \omega \text{ messbar}$
 $\Rightarrow \omega|f|^2 \text{ messbar, } \omega|f|^2 \leq \underbrace{c|f|^2}_{\in \mathbb{L}^1} \in \mathbb{L}^1$
 $\Rightarrow \omega|f|^2 \in \mathbb{L}^1$

b) $- I = [1, \infty), \omega(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in [1, \infty)$
 $\underbrace{|f(x)|^2 = (f(x))^2 = \frac{1}{x}}_{\Rightarrow f \notin \mathbb{L}^2(I, \mathbb{C})} \notin \mathbb{L}^1, \underbrace{\omega(x)|f(x)|^2 = \frac{1}{x^2} \in \mathbb{L}^1}_{\Rightarrow f \in \mathbb{L}^2(I, \omega, \mathbb{C})}$
 $- I = [-1, 1], \omega(x) = |x|, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
 $|f(x)|^2 = \frac{1}{|x|} \notin \mathbb{L}^1(I, \mathbb{C}) \Rightarrow f \notin \mathbb{L}^2$
 $\omega(x)|f(x)|^2 = \frac{|x|}{|x|} = 1 \in \mathbb{L}^1(I, \mathbb{C}) \Rightarrow f \in \mathbb{L}^2(I, \omega, \mathbb{C})$