JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Lehrstuhl für Numerische Mathematik
Prof. Dr. E. Berdysheva
Dipl.-Phys. Daniel Schäfer

Numerik II im Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 3

(Korrigierte Fassung vom 08. Mai)

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Schreiben Sie die Anfangswertaufgabe

$$y''' - x^2 y'' + 4y' - xy = 3$$

mit

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 2$$

in ein System von DGL erster Ordnung um und berechnen Sie mit der Trapezregel

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right]$$

und der Schrittweite $h = 1$ die Näherungswerte für $y(2), y'(2)$ und $y''(2)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Berechnen Sie für die 4-Schritt Adams-Bashforth-Methode die Koeffizienten b_m, indem Sie $f(x, y(x))$ in der Integralgleichung

$$y(x_{k+4}) = y(x_{k+3}) + \int_{x_{k+3}}^{x_{k+4}} f(x, y(x))\ \mathrm{dx}$$

durch das Interpolationspolynom 3. Grades in Lagrange-Form

$$p_3(x) = \sum_{j=0}^{3} f(x_{k+j}, y_{k+j})\ell_{k+j}(x)$$

annähern, wobei

$$\ell_i(z) = \prod_{l=0, l\neq i}^{3} \frac{z - z_l}{z_i - z_l} \text{ für } i = 0, \ldots, 3$$

ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Konstruieren Sie ein implizites 2-stufiges Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4.

Abgabe: Dienstag, 14.05.2013, bis 12:00 Uhr in/vor Raum 149 HRZ oder in der Vorlesung.

1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 3 22.5.12

1.1 Aufgabe 1

$$y''' = x^2 y'' - 4y' + xy + 3$$
$$y(1) = 1$$
$$y'(1) = 0$$
$$y''(1) = 2$$
$$\Rightarrow y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = 1,\ x_1 = 2$$
$$\Rightarrow z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \Rightarrow z' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ x^2y'' - 4y' + xy + 3 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_{p_2} & -4 & x_{p_2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = f(x_{p_2}, y_{p_2})$$
$$y_1 = (a,b,c)^T \ , a,b,c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(f(x_0,y_0) + f(x_1,y_1)) = \begin{pmatrix} 0.5b + 1.5 \\ 0.5c + 2 \\ a - 2b + 2c + 4.5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5b + 1.5 \\ 0.5c + 2 \\ a - 2b + 2c + 4.5 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow c = -12 = y''(2)$$
$$\Rightarrow b = -4 = y'(2)$$
$$\Rightarrow a = -0.5 = y(2)$$

1.2 Aufgabe 2

$$b_j = \frac{1}{h}\int_{x_{k+3}}^{x_{k+4}} l_j(x)dx = \frac{1}{h}\int_{3h}^{4h} l_j(x)dx$$
$$\Rightarrow b_0 = \frac{1}{h}\int_{3h}^{4h} \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\frac{x-x_3}{x_0-x_3} = -\frac{1}{4h^4}\int_{3h}^{4h} x^3 - 3hx^2 - 3hx^2 + 2h^2x + 2h^2x - 6h^3dx$$
$$= -\frac{1}{64h^4}\left(\frac{x^4}{4} - 2hx^3 + \frac{11}{2}h^2x^2 - 6h^3x\right)_{3h}^{4h} = -\frac{3}{8}$$
$$b_1 = \frac{37}{24}\ , \quad b_2 = -\frac{59}{24}\ , \quad b_3 = \frac{55}{24}$$

Alternativ:

$$g(z,0,1) = \frac{(1-z)^{-t}}{\ln(1-z)}\Big|_{t=0}^{t=1} = ... = \frac{z}{(1-z)\ln(1-z)}$$

Taylorentwicklung:

$$g(z,0,1) = (1-z)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j+1} = ... = 1 - \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j(j+1)}$$

Koeffizientenvergleich:

$$1 = -\frac{z}{(1-z\ln(1-z))}g(z,0,1) = (b_0^* + b_1^*z + ...)(1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2*3}z^2 - ...)$$

$= b_0^* + z(b_1^* - \frac{1}{2}b_0^*) + z^2(b_2^* - \frac{1}{2}b_1^* - \frac{1}{2*3}b_3^*)$
$\Rightarrow b_0^* = 1$
$b_i^* = \sum\limits_{j=0}^{i-1} \frac{b_j^*}{(i-j)(i+1-j)} \quad , i = 1, 2, ...$
$b_1 = \frac{1}{2}b_0^* = \frac{1}{2}$
$b_2^* = \frac{1}{2}b_0^* + \frac{1}{6}b_0^* = \frac{3}{12}$
$b_3^* = \frac{1}{2}b_2^* + \frac{1}{6}b_1^* + \frac{1}{12}b_0^* = \frac{3}{8}$

Betrachte:
$\varphi = \sum\limits_{i=0}^{3} b_i^* \nabla^i f_{k+m}$
$\nabla^0 f_{k+m} = f_{k+3}$
$\nabla^1 f_{k+m} = f_{k+3} - f_{k+2}$
$\nabla^2 f_{k+m} = f_{k+3} - 2f_{k+2} + f_{k+1}$
$\nabla^3 f_{k+m} = f_{k+3} - 3f_{k+2} + f_{k+1} - f_k$

Damit gilt $\varphi = f_{k+3} + \frac{1}{2}(f_{k+3} - f_{k+2}) + \frac{5}{12}(f_{k+3} - 2f_{k+2} + f_{k+1}) + \frac{3}{8}(f_{k+3} - 3f_{k+2} + 3f_{k+1} - f_k)$
$= -\frac{3}{8}f_k + \frac{37}{24}f_{k+1} - \frac{59}{24}f_{k+2} + \frac{55}{24}f_{k+3}$
Gilt:$-\frac{3}{8} + \frac{37}{24} - \frac{59}{24} + \frac{55}{24} = 1$

1.3 Aufgabe 3

$p_2(c) = 2 - 12c + 12c^2 \stackrel{!}{=} 0$
$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \;, \quad c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$
Kollokationsverfahren liefert:
$L_1(x) = \frac{x-c_2}{c_1-c_2} = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$
$L_2(x) = \frac{x-c_1}{c_2-c_1} = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$
$b_1 = \int\limits_0^1 L_1(x)dx = \frac{1}{2}$
$b_2 = \int\limits_0^1 L_2(x)dx = \frac{1}{2}$
$a_{11} = \int\limits_0^{c_1} L_1(x)dx = \frac{1}{4}$
$a_{12} = \int\limits_0^{c_1} L_2(x)dx = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$a_{21} = \int\limits_0^{c_2} L_1(x)dx = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$
$a_{22} = \int\limits_0^{c_2} L_2(x)dx = \frac{1}{4}$

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$