JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Lehrstuhl für Numerische Mathematik
Prof. Dr. E. Berdysheva
Dipl.-Phys. Daniel Schäfer

NUMERIK II IM SOMMERSEMESTER 2013

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Gegeben sei das AWP

$$y' = x - 2y, \quad y(0) = 0.$$

Berechnen Sie eine Näherung der Lösung mit dem Nyström-Verfahren

$$y_{k+3} = y_{k+1} + h\left[\frac{7}{3}f(x_{k+2}, y_{k+2}) - \frac{2}{3}f(x_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{1}{3}f(x_k, y_k)\right] \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

für eine Schrittweite von $h = 0.05$ auf dem Interval $0 \leq x \leq 0.5$. Die dazu benötigten Werte $y(x_1)$ und $y(x_2)$ berechnen Sie mit der Rückwärts-Euler-Methode. Vergleichen Sie anschließend Ihre Näherungslösung mit der exakten Lösung des AWP

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(2x + e^{-2x} - 1\right).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Berechnen Sie die Näherungslösung des AWP

$$y' = (1 - 2x)y, \quad y(1) = 2$$

auf dem Intervall $1 \leq x \leq 1.5$ und der Schrittweite $h = 0.1$ mit Hilfe der 2-Schritt-Adams-Moulton-Methode. Den Startwert y_1 berechnen Sie nach dem folgenden Verfahren:

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= f(x_k, y_k) \\
\kappa_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\kappa_1) \\
y_{k+1} &= y_k + h\kappa_2.
\end{aligned}$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung $y(x) = 2e^{x-x^2}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Bestimmen Sie eine explizite und eine implizite 3-Schritt-Methode

$$\sum_{m=0}^{3} a_m y_{k+m} = h \sum_{m=0}^{3} b_m f(x_{k+m}, y_{k+m}) \text{ mit } a_3 = 1$$

möglichst hoher Ordnung unter der Nebenbedingung $a_0 = 0 = a_2$ (3-Schritt-Nyström- bzw. 3-Schritt-Milne-Methode). Hinweis: benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannten linearen Gleichungen für die Koeffizienten a_m und b_m.

Abgabe: Dienstag, 21.05.2013, bis 12:15 Uhr in/vor Raum 149 HRZ oder in der Vorlesung.

1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 3 22.5.12

1.1 Aufgabe 1

$$
\begin{aligned}
&y' = x - 2y\ ,\quad y(0) = 0\ ,\quad h = 0.05\ ,\quad 0 \le x \le 0.5 \\
&y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1) = 0 + 0.05(0.05 - 2y_1) \quad \Rightarrow y_1 = 0.0023 \\
&y_2 = 0.0066 \\
&y_3 = y_1 + 0.05(\tfrac{7}{3}f(x_2, y_2) - \tfrac{2}{3}f(x_1, y_1) + \tfrac{1}{3}f(x_0 y_0)) \\
&= 0.0023 + 0.05(\tfrac{7}{3} \cdot 0.0868 - \tfrac{2}{3} \cdot 0.0454 + \tfrac{1}{3}\dot{0}) = 0.0109 \\
&y_4 = 0.01942 \\
&y_5 = 0.026875 \\
&y_6 = 0.039084 \\
&y_7 = 0.0489 \\
&y_8 = 0.064381 \\
&y_9 = 0.0758353 \\
&y_{10} = 0.09435 \\
&y(0.5) = \tfrac{1}{4}(1 + e^{-1} - 1) = 0.09197
\end{aligned}
$$

1.2 Aufgabe 2

$$
\begin{aligned}
&1 \le 1.5\ ,\quad h = 0.1 \\
&k_1 = f(x_0, y_0) = f(1, 2) = -2 \\
&k_2 = f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2}) = f(1.05, 19) = -2.09 \\
&y_1 = y_0 + 0.1(-2.09) = 1.791
\end{aligned}
$$

Adams Moulton ($s = 2$)

$$
\begin{aligned}
&y_{k+2} = y_{k+1} + h(\tfrac{3}{12}f(x_{k+2}, y_{k+2})) + \tfrac{8}{12}f(x_{k+1}, y_{k+1}) - \tfrac{1}{12}f(x_k, y_k) \\
&y_2 = y_1 + h(\tfrac{5}{12}(1 - 2x_2)y_2 + \tfrac{8}{12}(1 - 2x_1)y_1 - \tfrac{1}{12}(1 - 2x_0)y_0) = 1.5727 \\
&y_3 = 1.3535\ ,\ y_4 = 1.1419\ ,\quad y_5 = 0.9442
\end{aligned}
$$

1.3 Aufgabe 3

Gesucht 3–Schritt–Methode: $\sum_{m=0}^{3} a_m y_{m+k} = h \sum_{m=0}^{3} b_m F(t_{k+m}, y_{k+m})$
mit $a_3 = 1$, $a_0 = 0 = a_2$ Benutze die Glungen:

$$\sum_{m=0}^{3} a_m = 0 \Rightarrow A_1 + A_3 = 0$$

$$\sum_{m=0}^{3} a_m m^l - l b_m m^{l-1} = 0 \forall 1 \le l \le p \sum_{m=0}^{3} a_m m^{p+1} - b_m(p+1)m^l \ne 0 = 0 \Rightarrow A_1 + A_3 = 0$$

1. Exp. Methode ($b_3 = 0$) Freie Param: a_1, b_0, b_1, b_2
   $l = 1:\ a_1 - b_0 - b_1 - b_2 = -3$
   $l = 2:\ a_1 - 2b_1 - 4b_2 = -9$
   $l = 3:\ a_1 - 3b_1 - 12b_2 = -27$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -26 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow b_0 = \frac{1}{3}$, $b_1 = -\frac{2}{3}$ $b_2 = \frac{7}{3}$

$l = 4 : a_1 - 4b_1 - 32b_2 + 80 = -\frac{11}{3} \neq 0$

$\Rightarrow$ Ordnung $p = 3$ (höchstens)

2. impl Methode:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 12 & 27 \\ 0 & 4 & 32 & 108 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 26 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a_1 = 1$, $b_0 = 0$, $b_1 = \frac{1}{3}$, $b_2 = \frac{4}{3}$, $b_3 = \frac{1}{3}$

$y_{k+2} = y_k + \frac{h}{3}(f(t_R, y_R), 4f(t_{R+1}, y_{R+1}) + f(t_{R+2}, y_{R+2}))$