

# Mathematik für Physiker

## Analysis I

Skript zur Vorlesung von Prof. Dr. Lani-Wayda  
Mitgeschrieben und getext von Julian Bergmann

### Inhaltsverzeichnis

<b>1 Mengen &amp; Aussagen</b>	<b>1</b>
1.1 Mengenbeziehungen/-operationen . . . . .	1
1.2 Mathematische Aussagen . . . . .	1
1.3 Rechenregeln . . . . .	2
<b>2 Relation &amp; Funktionen</b>	<b>3</b>
2.1 Definition . . . . .	3
2.2 Bemerkung: Funktion . . . . .	3
2.3 Definition: Bild . . . . .	3
2.4 Definition: Komposition . . . . .	4
2.5 Definition: Bijektiv . . . . .	4
2.6 Definition: Relation . . . . .	4
2.7 Bemerkung: Partition . . . . .	5
2.8 Definition/Bemerkung: sup/inf & min/max . . . . .	5
2.9 Zornsches Lemma . . . . .	5
2.10 Auswahlaxiom . . . . .	6
<b>3 Reelle Zahlen</b>	<b>6</b>
3.1 Peano-Axiom . . . . .	6
3.2 Induktion & Rekursion . . . . .	6
3.3 Axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen . . . . .	7
3.4 Definition . . . . .	7
3.5 Rechenregeln . . . . .	7
3.6 Satz von Archimedes . . . . .	8
3.7 Definition: Intervalle . . . . .	8
3.8 Endlichkeit auf Abzählbarkeit . . . . .	8
3.9 Satz: Unterschiede $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ . . . . .	9
3.10 Bemerkung . . . . .	10
3.11 Satz: Existenz/Eindeutigkeit m-ter Wurzeln in $\mathbb{R}$ . . . . .	10
3.12 Satz: Definition . . . . .	10
<b>4 Komplexe Zahlen</b>	<b>11</b>
4.1 Körper der komplexen Zahlen . . . . .	11
4.2 Definition/Bemerkung . . . . .	11
4.3 Geometrische Veranschaulichung der komplexen Multiplikation . . . . .	12
<b>5 Induktive Beweise</b>	<b>12</b>
5.1 Rekursive Definitionen (einige) . . . . .	12
5.2 Binomialsatz . . . . .	12
5.3 Geometrische Summenformel . . . . .	13
<b>6 Folgen &amp; Konvergenz</b>	<b>13</b>
6.1 Definition . . . . .	13
6.2 Definition: Konvergenz/Grenzwert von Folgen . . . . .	13
6.3 Bemerkung . . . . .	14
6.4 Rechenregeln . . . . .	14

6.5	Beispiele . . . . .	15
6.6	Beispiele für Grenzwertberechnung . . . . .	15
6.7	Teilfolgen & Häufungspunkte . . . . .	15
6.8	Bemerkung . . . . .	15
6.9	Satz & Definition . . . . .	16
6.10	Satz: Bolzano Weierstraß . . . . .	16
6.11	Satz . . . . .	17
6.12	Definition/Satz: Cauchysches Konvergenzkriterium . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Reihen</b>	<b>17</b>
7.1	Definition . . . . .	17
7.2	Bemerkung . . . . .	18
7.3	Satz: Geometrische Reihe . . . . .	18
7.4	Satz: Mayorantenkriterium . . . . .	18
7.5	Satz: Quotientenkriterium . . . . .	19
7.6	Satz: Wurzelkriterium . . . . .	19
7.7	Bemerkung . . . . .	19
7.8	Cauchyscher Verdichtungssatz & Leibnizkriterium . . . . .	19
7.9	Folgerung . . . . .	20
7.10	Definition/Satz: Umordnung . . . . .	20
<b>8</b>	<b>Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit</b>	<b>21</b>
8.1	Definition . . . . .	21
8.2	Definition/Bemerkung: Stetigkeit . . . . .	21
8.3	Rechenregeln (analog zu Folgen) . . . . .	22
8.4	Folgerung . . . . .	22
8.5	Definition: Gleichmäßige Stetigkeit . . . . .	22
<b>9</b>	<b>Stetige Funktionen auf Intervallen</b>	<b>22</b>
9.1	Zwischenwertsatz . . . . .	22
9.2	Satz: Extrema von st. Funktionen auf $[a,b]$ . . . . .	23
9.3	Folgerung . . . . .	23
9.4	Satz . . . . .	24
9.5	Definition: Konvergenz von Funktionsfolgen . . . . .	24
<b>10</b>	<b>Potenzreihen, spezielle Funktionen</b>	<b>24</b>
10.1	Definition . . . . .	24
10.2	Satz: Konvergenz von Potenzreihen . . . . .	25
10.3	Bemerkung: lokale gleichmäßige Konvergenz . . . . .	25
10.4	Folgerung . . . . .	25
10.5	Satz & Definition . . . . .	26
10.6	Funktionalgleichung der exp-Funktion . . . . .	26
10.7	Satz: Formel von Euler de Moivre . . . . .	27
10.8	Folgerung . . . . .	27
10.9	Folgerung: Additionstheoreme . . . . .	27
<b>11</b>	<b>Differenzierbarkeit</b>	<b>28</b>
11.1	Definition . . . . .	28
11.2	Bemerkung . . . . .	28
11.3	Linearität der Ableitung der Zuordnung $f(x_0) \mapsto f'(x_0)$ . . . . .	28
11.4	Satz . . . . .	29
11.5	Bezeichnung . . . . .	29
11.6	Bemerkung . . . . .	29
11.7	Bemerkung . . . . .	29

11.8	Ableitungsregeln	30
11.9	Satz: Diffbarkeit von Potenzreihen	30
11.10	Folgerung	31
11.11	Folgerung	31
11.12	Folgerung: Identitätssatz für Potenzreihen	31
11.13	Definition: Lokale (und andere) Extrema	32
11.14	Extrema & Ableitungen	32
<b>12</b>	<b>Mittelwertsatz, Monotonie &amp; Logarithmus</b>	<b>33</b>
12.1	Satz von Rolle	33
12.2	Mittelwertsatz	33
12.3	Folgerung: Ableitung & Monotonie	33
12.4	Folgerung	33
12.5	Satz: Ableitung der Umkehrfunktion	34
12.6	Folgerung & Definition: $\log$	34
12.7	Definition: Allgemeine Potenz	34
12.8	Rechenregeln	35
12.9	Satz: e-Funktion schlägt alles tot	35
12.10	Folgerung: Potenzwachstum stärker als logarithmisches	35
12.11	Definition: Allgemeine Exp-Funktionen, allgemeiner Logarithmus	35
12.12	Bemerkung	35
<b>13</b>	<b>Taylorsche Satz</b>	<b>35</b>
13.1	Bemerkung	36
13.2	Satz: Taylor	36
13.3	Anwendung: Abschätzung von $\cos(z)$	37
<b>14</b>	<b>Weitere elementare Funktionen</b>	<b>37</b>
14.1	Satz & Definition: $\pi$	37
14.2	Folgerung: Symmetrien von $\sin$ bzw. $\cos$	37
14.3	Definition	37
14.4	Satz/Definition: Inverse trigonometrische Funktionen	38
<b>15</b>	<b>Integration</b>	<b>38</b>
15.1	Definition	38
15.2	Satz & Definition	38
15.3	Bemerkung	39
15.4	Eigenschaften des Integrals	40
15.5	Definition	40
15.6	Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung (HDI)	40
15.7	Weitere Integrationsregeln	41
15.8	Satz: Vertauschung Integral und limes	41
15.9	Folgerung	41

# 1 Mengen & Aussagen

Def:

Zusammenfassung von Objekten zu Mengen:

$$M = \{1, 2, 3\}$$

$$S = \{x | x \text{ ist nat. Zahl, } x > 5\} = \{y \in \mathbb{N} | y > 5\}$$

Objekte einer Menge sind dessen Elemente.

Beispiele:  $2 \in M$ ,  $7 \in S$ ,  $5 \notin S$

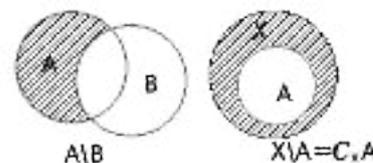
Technisches Hilfsmittel: Leere Menge  $\emptyset$

## 1.1 Mengenbeziehungen/-operationen

$A \subseteq B$	<b>Inklusion;</b> <i>A ist Teilmenge von B, B Obermenge von A. Jedes Element von A ist auch Element von B. Auch <math>A \subset B</math></i>
$A \subset B$	<b>Strikte Inklusion;</b> <i>A ist Teilmenge von B aber <math>A \neq B</math>. Auch <math>A \subsetneq B</math></i>
$A \cap B$	<b>Durchschnitt, gelesen A Durchschnitt B;</b> $= \{x   x \in A \text{ und } x \in B\}$
$A \cup B$	<b>Vereinigung, gelesen A vereinigt B;</b> $= \{x   x \in A \text{ oder } x \in B\}$
$A \setminus B$	<b>Differenz, gelesen A minus/ohne B;</b> $= \{x   x \in A \text{ und } x \notin B\}$
$\complement A$ oder $A^C$	<b>Komplement, gelesen Komplement von A;</b> <i>Normalerweise auf eine Obermenge X bezogen <math>\complement_X A = X \setminus A</math></i>
$A \cap B = \emptyset$	<i>A und B haben kein gemeinsames Element</i>

Bei einer Potenzmenge  $P(A) = \{B | B \subset A\}$  gilt stets:

$$\emptyset \subset A, \text{ also } \emptyset \in P(A) \text{ und } A \in P(A)$$



## 1.2 Mathematische Aussagen

Def:

Aussagen, denen sich „vernünftig“ ein Wahrheitswert „w“ oder „f“ zuordnen lässt (auch, wenn dieser nicht bekannt ist).

Beispiele: „10 ist Primzahl“, „ $3 > 1$ “

Aussagenoperation: Negation  $\neg$ ; Verknüpfung „Und“  $\wedge$ , „Oder“  $\vee$

Wahrheitstabellen: Seien a, b Aussagen.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$\neg a \vee b$	$a \Leftrightarrow b$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	f
f	f	w	w	f	f	w	w

Implikation:  $a \Rightarrow b$  | Äquivalenz:  $a \Leftrightarrow b$   
 definiert als  $\neg a \vee b$  | definiert als  $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

### 1.3 Rechenregeln

Definition:

Schlussregeln sind Aussagen, die stets den Wert „w“ haben

Seien  $a, b, c$  Aussagen;  $A, B, C, X$  Mengen;  $(A \cup B \cup C) \subset X$ .

1. Assoziativität	$(a \vee b) \vee c \Leftrightarrow a \vee (b \vee c)$ $(a \wedge b) \wedge c \Leftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$	$(A \cup B) \cup C \Leftrightarrow A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C \Leftrightarrow A \cap (B \cap C)$
2. Distributivität	$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ $a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. de Morgan- sche Komplen- tierungsregel	$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$ $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$	$X \setminus (A \vee B) \Leftrightarrow (X \setminus A) \wedge (X \setminus B)$ $X \setminus (A \wedge B) \Leftrightarrow (X \setminus A) \vee (X \setminus B)$ $(A \cup B)^c \Leftrightarrow A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c \Leftrightarrow A^c \cup B^c$
4. Kontraposition	$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$	Falls $A \subseteq B$ , so $(X \setminus B) \subseteq (X \setminus A)$ bzw. $B^c \subseteq A^c$

Exemplarischer Beweis für 4.:

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \Rightarrow b$	$\neg b \Rightarrow \neg a$
F	F	W	W	W	W
F	W	W	F	W	W
W	F	F	W	F	F
W	W	F	F	W	W

Schreibabkürzungen:

Für Alle:  $\forall$

Es existiert:  $\exists$

Es existiert genau ein  $\exists_1$

Bsp.:

1. Falls  $M \subseteq N$ , so ist die Aussage  $\forall x \in M : x \in N$  wahr.
2. Die Aussage  $\forall x \in \{1, 2, 3\} \exists y \in \{1, 2, 3\} : y > x$  ist falsch.

Hinweis:

Manchmal auch „Nachstellung“ des Gültigkeitsbereiches:

Beispiel:  $x^2 \leq \frac{1}{4} (|x| \leq \frac{1}{2})$

## 2 Relation & Funktionen

### 2.1 Definition

1. Für Objekte  $a, b$  ist das geordnete Paar  $(a, b)$  definiert durch:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

2. Für Mengen  $M, N$  ist das Produkt definiert durch:

$$M \times N := \{(a, b) | a \in M, b \in N\}$$

3. Eine Relation zwischen  $M$  und  $N$  ist eine Teilmenge  $R \subseteq M \times N$ .

Statt „ $(a, b) \in R$ “ schreibt man „ $aRb$ “. Beispiele:  $a \leq b$ ,  $a > b$ , etc.

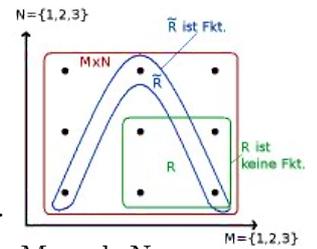
4. Eine Relation zwischen  $M$  und  $N$  heißt Funktion (Abbildung) von  $M$  nach  $N$  falls gilt:

$$\forall x \in M \exists_1 y \in N : (x, y) \in R \text{ oder } xRy.$$

Schreibweise:

$$f : M \rightarrow N, \\ x \mapsto f(x)$$

$$\text{Beispiel: } f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ oder } f(x) = x^2 \\ x \mapsto x^2$$



### 2.2 Bemerkung: Funktion

Zur Beschreibung einer Funktion sind 3 Dinge nötig:

1. Definitionsbereich
2. Wertebereich
3. Zuordnungsvorschrift

z.B. sind die Funktionen

$$f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{N}, g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{N} \text{ und } h : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 4\}$$

mit  $f(x) = x + 1$ ,  $g(x) = x + 1$  und  $h(x) = x + 1$  alle verschieden.

### 2.3 Definition: Bild

Seien  $A, B$  Mengen,  $f : A \rightarrow B$  Funktion

1. Sei  $A' \subseteq A$ . Das *Bild* von  $A'$  unter  $f$  ist

$$f(A') = \{y | \exists x \in A', y = f(x)\} = \{f(x) | x \in A'\}$$

2. Sei  $A' \subseteq A \subseteq A''$  und  $B'$  Menge.

Die *Einschränkung* von  $f$  auf  $A'$  ist die Funktion  $f|_{A'} : A' \rightarrow B$

Eine Funktion  $g : A'' \rightarrow B'$  heißt *Fortsetzung* von  $f$ , falls gilt:

$$\forall x \in A : g(x) = f(x)$$

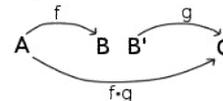
3. Für eine beliebige Menge  $C$  ist das *Urbild* von  $C$  definiert durch

$$f^{-1}(C) := \{x \in A | f(x) \in C\}$$

### 2.4 Definition: Komposition

Seien  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B' \rightarrow C$  Funktionen und  $B \subseteq B'$ . Dann ist die *Komposition* (Hintereinanderausführung)  $g \circ f$  definiert durch:

$$g \circ f : A \rightarrow C, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$



### 2.5 Definition: Bijektiv

Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  heißt:

*injektiv*, falls gilt:  $\forall x, y \in A : \{f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\}$ .

*surjektiv*, falls gilt:  $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$  (Gleichbedeutend:  $f(A)=B$ ).

*bijektiv*, falls f surjektiv und injektiv.

Beispiele:

$f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  ist injektiv, nicht surjektiv.  
 $x \mapsto x + 1$

$g : \{1, 2\} \rightarrow \{2, 3\}$  ist bijektiv.  
 $x \mapsto x + 1$

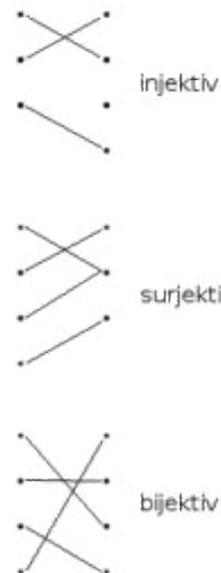
Falls  $f : A \rightarrow B$  bijektiv, so existiert die *inverse Funktion* (*Umkehrfunktion*)

$f^{-1} : B \rightarrow A$ , die jedem  $y \in B$  das eindeutige  $x \in A$  mit  $f(x) = y$  zuordnet.

Es gilt:

$$f(f^{-1}(y)) = y (y \in B)$$

$$f^{-1}(f(x)) = x (x \in A)$$



### 2.6 Definition: Relation

Sei R Relation in der Menge M (also  $R \subseteq M \times M$ ).

a) R heißt *Äquivalenzrelation* (auf M), falls folgende Eigenschaften für alle  $x, y, z \in M$  erfüllt sind:

- 1)  $xRx$  (*Reflexivität*)
- 2)  $xRy \Rightarrow yRx$  (*Symmetrik*)
- 3)  $xRy$  und  $yRz \Rightarrow xRz$  (*Transitivität*)

Häufig benutze Symbole: „=“, „ $\approx$ “, „ $\sim$ “

Für  $x \in M$  ist die *Äquivalenzmasse* von x (bzgl. R) definiert als

$$\{y \in M | yRx\}$$

b) R heißt *Ordnung* auf M (M durch R geordnet), falls für alle

$x, y, z \in M$  folgende Eigenschaften gelten:

- 1)  $xRx$  (*Reflexivität*)
- 2)  $(xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x = y$  (*Antisymmetrik*)
- 3)  $xRy$  und  $yRz \Rightarrow xRz$  (*Transitivität*)

Häufig benutze Symbole: „ $\leq$ “, „ $<$ “, „ $\subseteq$ “

c) Eine Ordnung  $<$  auf M heißt *Totalordnung*, falls gilt:

$$\forall x, y \in M : ((x < y) \vee (y < x))$$

Beispiele:

- „=“ bei Zahlen (*Äquivalenzrelation*),
- „≤“ bei Zahlen (*Ordnungsrelation*),
- „⊂“ bei Mengen (*Ordnungsrelation*).

## 2.7 Bemerkung: Partition

Sei  $\sim$  eine *Äquivalenzrelation* auf der Menge  $M$ .

Dann bilden die *Äquivalenzklassen* bezüglich  $\sim$  eine *Partition*, d.h. Zerlegung von  $M$  in paarweise disjunkte Teilmengen.

D.h.  $A \cap B = \emptyset$  für verschiedene Äquivalenzklassen  $A, B$ .

## 2.8 Definition/Bemerkung: sup/inf & min/max

Sei  $\leq$  eine Ordnung auf der Menge  $M$  ( $M$  durch  $\leq$  geordnet). Sei  $A \subseteq M$ .

- 1)  $A$  heißt nach oben (unten) beschränkt, falls ein  $s \in M$  existiert mit  $\forall a \in A : a \leq s$  ( $a \geq s$ ).

$s$  heißt dann *obere (untere) Schranke* für  $A$ .

- 2)  $s \in M$  heißt *Supremum* von  $A$ , falls  $s$  eine *kleinste obere Schranke* für  $A$  ist, d.h.:

- 1)  $s$  ist obere Schranke

- 2) falls  $S$  obere Schranke für  $A$ , dann  $s \leq S$

Analog heißt  $s$  *Infimum* von  $A$ , falls  $s$  eine *größte untere Schranke* für  $A$  ist, d.h.:

- 1)  $s$  ist untere Schranke

- 2) falls  $S$  untere Schranke für  $A$ , dann  $s \geq S$

Falls Supremum/Infimum von  $A$  existiert, so ist dies eindeutig.

Man schreibt dann  $s = \sup(A)$  bzw.  $s = \inf(A)$

- 3)  $a \in A$  heißt maximales (minimales) Element von  $A$ , falls gilt:

$$\forall x \in A : x \leq a \quad (x \geq a)$$

Notation:  $a = \max(A)$ ;  $a = \min(A)$

Bemerkung: Im Allgemeinen existiert weder sup/inf, noch min/max.

Beweis der Eindeutigkeit von sup/inf:

Seien  $s, s'$  Suprema von  $A$ .

Da  $s' \in A$  für  $A$ , gilt nach 2):  $s \leq s'$ , ebenso  $s' \leq s$

Mit Antisymmetrie von „≤“:  $s = s'$

Analog für inf.

## 2.9 Zornsches Lemma

Sei  $M$  eine Menge und  $\leq$  Ordnung auf  $M$  derart, dass gilt:

jede totalgeordnete Teilmenge  $N \subset M$  hat eine obere Schranke in  $M$ .

Dann gilt: Die ganze Menge  $M$  hat ein maximales Element.

## 2.10 Auswahlaxiom

Sei  $I$  eine beliebige Menge (Indexmenge) und für jedes  $i \in I$  sei eine Menge  $A_i \neq \emptyset$  gegeben.

Dann existiert eine Funktion  $F : \left( I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \right)$  mit der Eigenschaft  $\forall i \in I : f(i) \in A_i$  (Selektion eines Wertes  $f(i)$  aus der Menge  $A_i$ ).

Man kann zeigen: Zornsches Lemma und Auswahlaxiom sind äquivalent.

## 3 Reelle Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  natürliche Zahlen.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  ganze Zahlen.  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist kommutativ und Ring mit Eins.

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$  rationale Zahlen.  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  ist Körper.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  (Aus der Schule bekannt. Konstruktion dieser Zahlenmengen: hier nicht!)

$\mathbb{N}$  erfüllt folgende Grundregeln:

### 3.1 Peano-Axiom

$\mathbb{N}$  enthält ein Element 1 und es gibt eine injektive Abbildung  $\vartheta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$  (Nachfolgerabbildung), so dass gilt: Falls  $A \subseteq \mathbb{N}$  und

- i)  $1 \in A$
- ii) Falls  $n \in A$ , so auch  $\vartheta(n) \in A$

dann  $A = \mathbb{N}$

Peano-Axiome sind die Basis für folgenden Prinzipien:

### 3.2 Induktion & Rekursion

- a) Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei eine Aussage  $a(n)$  gegeben. Falls

- i)  $a(1)$  wahr,
- ii) Falls  $a(n)$  wahr für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so auch  $a(\vartheta(n))$ ,

so ist  $a(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  wahr.

(Schreibe auch „ $n+1$ “ statt  $\vartheta(n)$ . Es lässt Addition auf  $\mathbb{N}$  definieren.)

- b) Rekursionsprinzip:

Sei ein Objekt  $O(1)$  aus einer Menge  $M$  gegeben und für  $n \in \mathbb{N}$  sei eine Vorschrift  $V_n$  gegeben ( $V_1 : M \rightarrow M$ ), die aus einem Objekt  $O \in M$  ein neues Objekt macht.

Dann definiert die Vorschrift  $O(n+1) = V_n(O(n))$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein eindeutiges Objekt  $O(n) \in M$ .

D.h. es existiert genau eine Funktion:

$$\gamma : \mathbb{N} \rightarrow M \text{ mit } \tilde{O}(n+1) = V_1(\tilde{O}(n)) (\forall n \in \mathbb{N})$$

### 3.3 Axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen

$\mathbb{R}$  ist eine Erweiterung der rationalen Zahlen, also  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Es gilt:

- a)  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ist Körper (*Körperaxiom*)
- b)  $\mathbb{R}$  ist angeordneter Körper, d.h.
  - 1) Es existiert  $P \subset \mathbb{R}$ , sodass für jedes  $r \in \mathbb{R}$  genau eine der Aussagen
    - \*  $r \in P$
    - \*  $r = 0$  (*neutrales Element*)
    - \*  $r \in P$  (*additives inverses Element*)
 zutrifft. (*Anordnungsaxiome*)
  - 2) Falls  $a, b \in P$ , so ist  $a + b \in P, a \cdot b \in P$
- c) Bemerkung: Man definiert für  $a, b \in \mathbb{R} : a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}$   
 (Schreibweise auch  $b > a$ ).  
 $a \leq b [a \geq b] \Leftrightarrow (a = b) \vee (a < b) [a > b]$   
 Dann ist „ $\leq$ “ die Totalordnung auf  $\mathbb{R}$ .
- d)  $\mathbb{R}$  ist mit „ $\leq$ “ vollständig, d.h.  
 Falls  $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$  und  $M$  nach oben beschränkt, so hat  $M$  ein Supremum in  $\mathbb{R}$  (vgl. 2.4). (*Vollständigkeitsaxiom*)

Bemerkung: Es gilt auch: Falls  $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ ,  $M$  nach unten beschränkt, so hat  $M$  ein Infimum in  $\mathbb{R}$ .

### 3.4 Definition

- a) Für  $a \in \mathbb{R}$  setze  $\text{sgn}(a) := \begin{cases} 1, a > 0 (a \in P) \\ 0, a = 0 \\ -1, a < 0 (-a \in P) \end{cases}$
- b) *Betragsfunktion*: setze  $|a| = a \cdot \text{sgn}(a)$

### 3.5 Rechenregeln

- 1)  $|a| = |-a| \geq 0, a = |a| \cdot \text{sgn}(a)$
- 2)  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- 3)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \text{sgn}(a \cdot b) = \text{sgn}(a) \cdot \text{sgn}(b)$
- 4)  $|a^{-1}| = |a|^{-1}$ , falls  $a \neq 0$  (*Multiplikations Inverses*)
- 5)  $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$   
 $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$   
 $a \leq b \Leftrightarrow ca \leq cb$  Falls  $c > 0$ , sonst  $ca \geq cb$
- 6)  $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$  (*Dreiecksungleichung*)

*Bemerkung*

$1 \in P$ . Beweis. 1F (in jedem Körper):  $(0 \cdot 1 = 0; 1 \cdot 1 = 1)$

*Behauptung*:  $(-1) \cdot (-1) = 1$

*Bemerkung*:  $(-1) \cdot (-1) - 1 = (-1) \cdot (-1 + 1) = 0 \leftarrow a \cdot 0 = 0$  absorbierendes Element

Wäre  $(-1) \in P$  so  $(-1)(-1) \in P$ , also  $1 \in P$  (Widerspruch zu 3.3.b.1)

Mit 3.3.b.1 folgt:  $1 \in P$

Beweis 3.5.1:

$$|a| = a \cdot \operatorname{sgn}(a); \quad |-a| = -a \cdot \operatorname{sgn}(a) = -a \cdot -1 \cdot \operatorname{sgn}(a) = a \cdot \operatorname{sgn}(a)$$

$$|a| > 0, \text{ falls } a \in P(a \neq 0), \text{ so } |a| = a \cdot \operatorname{sgn}(a) = a \cdot 1 = a > 0$$

analog  $a < 0$ .

falls  $a = 0$ , so  $|a| = 0$ .

Beweis zu ii-v: Ähnlich leicht/trivial.

Beweis zu vi: siehe Übung.

### 3.6 Satz von Archimedes

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  ist nicht nach oben beschränkt, d.h.  $\forall r \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > r$

*Bemerkung:*

Annahme,  $\mathbb{N}$  sei nicht nach oben beschränkt in  $\mathbb{R}$ .

Dann existiert (Vollständigkeit)  $s := \sup(\mathbb{N}) \in \mathbb{R}$ .

Es ist  $s < s + 1$  (da  $0 < 1$ ), also  $s - 1 < s$ .

Da  $s$  kleinste obere Schranke ist, ist  $s-1$  keine obere Schranke für  $\mathbb{N}$ .

Also existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > s - 1$ . Dann auch  $n + 1 \in \mathbb{N}$  und  $n + 1 > s$ .

Widerspruch dass  $s$  kleinste obere Schranke für  $\mathbb{N}$  ist.

*Daraus folgt:*  $\mathbb{N}$  ist nicht nach oben beschränkt.

### 3.7 Definition: Intervalle

Seien  $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$  „(,“, ““  $\Rightarrow$  ausgeschlossen

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$  „[,“, “]“  $\Rightarrow$  eingeschlossen

Weiter:

$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$

$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$

$(-\infty, a), (-\infty, a]$  entsprechend.

$\mathbb{R}^+ := (0, \infty), \mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$ , entsprechend  $\mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^-$

### 3.8 Endlichkeit auf Abzählbarkeit

- a) Eine Menge heißt endlich, falls  $M = \emptyset$  (Dann hat  $M$  0 Elemente) oder falls  $n \in \mathbb{N}$  und eine bijektive Abbildung  $\{1, \dots, n\} \rightarrow M$  existiert.

Dann hat  $M$   $n$  Elemente. (In Zeichen:  $\operatorname{card}(M) = n$  oder  $\#M = n$ )

- b)  $M$  heißt unendlich, falls  $M$  nicht endlich.

- c)  $M$  heißt abzählbar, falls eine surjektive Abbildung  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow M$  existiert.

d)  $M$  heißt abzählbar unendlich, falls abzählbar und unendlich.

e)  $M$  heißt überabzählbar, falls  $M$  nicht abzählbar.

Bemerkung:

$n$  aus a) ist, falls es existiert, eindeutig.

### 3.9 Satz: Unterschiede $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$

a)  $\mathbb{Q}$  ist nicht vollständig,  $\mathbb{R}$  schon

b)  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar,  $\mathbb{R}$  nicht

Beweis zu a):

Sei  $M := \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2\}$ .  $M$  ist nach oben beschränkt (z.B. durch 2).

Sei  $s := \sup(\mathbb{R})$ . Annahme  $s \in \mathbb{Q}, s^2 = 2$ :

Annahme falsch:

1. Fall:  $s^2 > 2$

Für alle  $n \in \mathbb{N}(s - \frac{1}{n})^2 = s^2 - \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} > s^2 - \frac{2s}{n}$ . Nach Archimedes existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $b > \frac{2s}{s^2-2}$ . Für dieses  $n$  ist  $\frac{2s}{n} < \frac{2s}{s^2-2} = s^2 - 2$  und  $(s - \frac{1}{n})^2 > s^2 - (s^2 - 2) = 2$ .

Es folgt:  $s - \frac{1}{n}$  ist obere Schranke für  $M$ . Widerspruch zu  $s$  kleinste obere Schranke.

2. Fall:  $s^2 < 2$

Ähnlich wie oben.  $\exists n \in \mathbb{N}(s + \frac{1}{n})^2 < 2$ , also  $s + \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$ .

Widerspruch zu  $s$  obere Schranke für  $M$ .

Da  $s \in \mathbb{Q}$  nach Annahme existiert  $p, q \in \mathbb{N}, y \neq 0, s = \frac{p}{q}$ , also  $\frac{p^2}{q^2} = 2$ ,

$p^2 = 2q^2$  (unmöglich denn Primfaktor 2 steckt links/rechts zu gerader/ungerader Potenz drin).

Also: Annahme falsch,  $s \in \mathbb{Q}$

Also:  $M$  hat kein Supremum in  $\mathbb{Q}$ , also  $\mathbb{Q}$  nicht vollständig.

Beweis zu b):

1) Ideenskizze:

...	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{1}$	0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...
...	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{1}$	0	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	...
...	$-\frac{3}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{1}$	0	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	...
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

2)  $\mathbb{R}$  überabzählbar: zeige  $[0,1]$  ist überabzählbar

Jedes  $x \in [0, 1]$  hat Dualbruch der Entwicklung  $x=0,011001100\dots$

Zeige: Die Menge  $F$  der Folgen von der Form  $(0,1110010\dots)$  ist überabzählbar. (Cantonsches Diagonalverfahren)

Annahme: Es existiert die Abzählung  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow F$  surjektiv,

also  $F = \{\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \dots\}$

Definiere eine Folge  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in F$  durch  $a_i \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \varphi(i)_i = 0 \\ 0 & , \text{ falls } \varphi(i)_i = 1 \end{cases}$

$(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \neq \varphi(j) \forall j \in \mathbb{N}$ , d.h.  $(a_j)$  tritt nicht im Bild von  $F$  auf.

Widerspruch zu  $\varphi$  surjektiv!

Also  $F$  nicht abzählbar!

$\varphi(1)$	$\varphi(2)$	$\varphi(3)$
<del>0</del>	1	1
1	<del>0</del>	1
0	0	<del>1</del>

### 3.10 Bemerkung

$\mathbb{R}$  ist ein Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{R}$ , auch über  $\mathbb{Q}$ .

Die Betragsfunktion (vgl. 3.5) definiert eine Norm auf  $\mathbb{R}$ .

### 3.11 Satz: Existenz/Eindeutigkeit m-ter Wurzeln in $\mathbb{R}$

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \forall m \in \mathbb{N} \exists_1 x \in \mathbb{R}_0^+ : x^m = a$$

(Notation:  $x = \sqrt[m]{a}$ , auch  $x = a^{\frac{1}{m}}$ , „m-te Wurzel“)

Beweis:

Sei  $a \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und  $M := \{y \in \mathbb{R}_0^+ | y^m \leq a\}$ .

Behauptung:  $M$  ist nach oben beschränkt durch  $1+a$ .

Beweis:

Falls  $a \leq 1$ , sonst für  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y > 1 + a$ :

(triviale Induktion)  $y^m \geq (1+a)^m \geq 1^m = 1 \geq a$ .

Falls  $a > 1$ , so ist für  $y \in \mathbb{R} > 1 + a$ :  $y^m > (1+a)^m > a^m \geq a$ .

Sei  $x := \sup(M)$ . Dann  $x > 0$ , also  $x \in \mathbb{R}_0^+$ .

Falls  $x^m < a$ , so existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $(x + \frac{1}{n})^m < a$ ,

also  $x + \frac{1}{n} \in M$ . Widerspruch zu  $x$  ist obere Schranke.

Falls  $x^m > a$ , so existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $(x - \frac{1}{n})^m > a$ .

Widerspruch zu  $x$  ist kleinste obere Schranke.

Also  $x^m = a$ .

Eindeutigkeit: Falls  $\tilde{x} < x$ , so  $\tilde{x}^m < x^m = a$ . Widerspruch, somit  $\tilde{x} = x$

### 3.12 Satz: Definition

a)  $\mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{R}$ , d.h.

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists q \in \mathbb{Q} : |q - a| < \varepsilon$$

b) Zahlen in  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  heißen irrationale Zahlen, diese sind auch dicht in  $\mathbb{R}$ .

Beweis zu 3.12:

Zu a)

Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Falls  $a \in \mathbb{Q}$ , so gilt:  $\forall \varepsilon > 0 : |a - a| = 0 < \varepsilon$

Sei jetzt  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  und  $a > 0$ .

Zu  $n \in \mathbb{N}$  sei nun  $m(n) := \max\{k \in \mathbb{N}_0 | \frac{k}{n} \leq a\}$ . (wohldefiniert)

Dann  $\frac{m(n)}{n} \leq a < \frac{m(n)+1}{n}$ , also  $|a - \frac{m(n)}{n}| < \frac{1}{n}$ .

Sei jetzt  $\varepsilon > 0$ . Nach Archimedes existiert  $n \in \mathbb{N}, n > \frac{1}{\varepsilon}$ , also  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ .

Setze  $q := \frac{m(n)}{n} \in \mathbb{Q}$ .

Dann  $|a - q| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ .

## 4 Komplexe Zahlen

In  $\mathbb{Q}$ :  $x^2 = 2$  hat keine Lösung, aber in  $\mathbb{R}$ .

In  $\mathbb{R}$ :  $x^2 + 1 = 0$  hat keine Lösung.

Historisch: Cardano (16. Jahrh.) in gewissem Sinn „Geistergrößen“.

Unmystische Erklärung: Gauß, Hamilton (18., 19. Jahrh.).

### 4.1 Körper der komplexen Zahlen

a) Sei  $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ .

Außer der komponentenweisen Addition/Subtraktion

$$((a, b) \pm (c, d)) = (a \pm c, b \pm d)$$

definiert man die Multiplikation komplexer Zahlen durch

$$(*) \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Damit wird  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ein Körper.

b) Indem wir  $r \in \mathbb{R}$  mit  $(r, 0) \in \mathbb{C}$  identifizieren, können wir  $\mathbb{R}$  als Unterkörper von  $\mathbb{C}$  auffassen, also  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

c) Mit  $i := (0, 1)$  ist  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$  (entspricht  $-1$  in  $\mathbb{R}$ ).

Für  $(a, b) \in \mathbb{C}$  ist  $(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a + bi$ .

Mit dieser Schreibweise ergibt sich  $(*)$  durch formales Ausmultiplizieren unter Berücksichtigung von  $i^2 = -1$ :

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bdi^2 + (bc + ad)i = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

d)  $a$  heißt *Realteil*,  $b$  *Imaginärteil* der komplexen Zahl  $a + bi$ . In Zeichen:

$$a = \Re(a + bi); b = \Im(a + bi)$$

Beweis: leicht

### 4.2 Definition/Bemerkung

a) Für  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  sei  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  (setzt reel. Betr.)

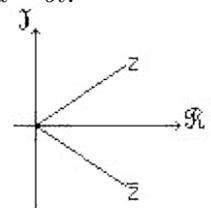
Es gilt:  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

b) Für  $z = a + bi$  ist die konjugierte komplexe Zahl  $\bar{z}$  definiert durch  $\bar{z} = a - bi$ .

Die *Konjugation*  $z \mapsto \bar{z}$  ist vertauschbar mit Grundrechenarten, also:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2; \quad \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \text{ falls } z_2 \neq 0.$$

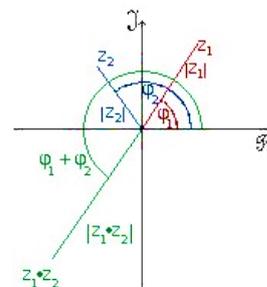
Weiter:  $|\bar{z}| = |z|$



### 4.3 Geometrische Veranschaulichung der komplexen Multiplikation

Die Multiplikation  $\mu_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit einer festen komplexen Zahl  $w$  ist geometrisch nämlich:

- Drehung um den zu  $z$  gehörigen Winkel.
- Streckung mit Faktor  $|z|$ .



Beweis: Später; Hier z.B. kein präziser Winkelbegriff vorhanden

## 5 Induktive Beweise

### 5.1 Rekursive Definitionen (einige)

a) *Fakultäten:*

$$0! = 1, (n+1)! = (n+1) \cdot n! \quad (\text{Präz. von } n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)$$

*Binomialkoeffizient:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left( = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \right) \quad (k, n \in \mathbb{N}_0, k \in \{0, \dots, n\})$$

b) *Summen/Produktzeichen:*

Für  $j \in \mathbb{N}_0$  sei eine Zahl  $a_j \in \mathbb{C}$  gegeben.

Def.  $\sum_{j=0}^n a_j$  und  $\prod_{j=0}^n a_j$  rekursiv durch

$$\sum_{j=0}^0 a_j = a_0, \quad \sum_{j=0}^{n+1} a_j = \left( \sum_{j=0}^n a_j \right) + a_{n+1}$$

$$\prod_{j=0}^0 a_j = a_0, \quad \prod_{j=0}^{n+1} a_j = \left( \prod_{j=0}^n a_j \right) \cdot a_{n+1}$$

c) *Ganzzahlige Potenzen:*

Für  $a \in \mathbb{C} : a^0 := 1, a^{n+1} = a \cdot a^n, a^{-n} := (a^n)^{-1}$  falls  $a \neq 0, n \in \mathbb{N}_0$

### 5.2 Binomialsatz

Für  $a, b \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$  ist  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Beweis  $n=0$ :

$$(a+b)^0 = 1 \quad (\text{links}); \quad \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^0 = 1 \quad (\text{rechts})$$

Beweis  $n \rightarrow n+1$ :

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right)}_{\binom{n+1}{k}} a^k b^{n+1-k} + a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

### 5.3 Geometrische Summenformel

Für  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  gilt:

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b - a) \cdot \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

Beispiel:  $b^2 - a^2 = (b - a) \cdot (b + a)$

Spezialfall:  $b := 1$ ,  $a := q$

$$1 - q^{n+1} = (1 - q) \cdot \sum_{k=0}^n q^k,$$

im Fall  $q \neq 1$ :  $\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1+q^{n+1}}{1-q}$

Beweis: ( $n=0$ : trivial)  $n \rightarrow n+1$ :

$$\begin{aligned}
b^{n+2} - a^{n+2} &= b \cdot b^{n+1} - a \cdot a^{n+1} = bb^{n+1} - ba^{n+1} + ba^{n+1} - aa^{n+1} \\
&= b(b^{n+1} - a^{n+1}) - (b - a)a^{n+1} = b(b - a) \cdot \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} + (b - a) \cdot 0^{n+1} \\
&= (b - a) \left( \sum_{k=0}^n a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} \right) = \sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

## 6 Folgen & Konvergenz

### 6.1 Definition

Sei  $M \neq \emptyset$  eine Menge. Eine Folge in  $M$  ist eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow M$  (auch  $\mathbb{N}_0 \rightarrow M$ ).

Schreibweise:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , kurz auch  $(a_n)$  (statt  $n \mapsto a(n)$ ).

$a_n (\in M)$  ist das  $n$ -te Glied der Folge.

Üblicher Missbrauch: „ $(a_n) \subset M$ “, korrekt  $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset M$ .

### 6.2 Definition: Konvergenz/Grenzwert von Folgen

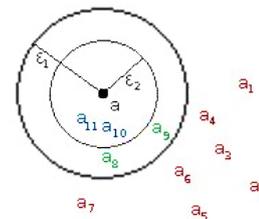
a)  $(a_n) \subset \mathbb{C}$  heißt *konvergent* gegen den *Grenzwert*  $a \in \mathbb{C}$

(in Zeichen:  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rightarrow} a$ ), falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

b)  $(a_n)$  heißt *konvergent*, falls ein  $a \in \mathbb{C}$  existiert mit  $a_n \rightarrow a$ , sonst *divergent*.

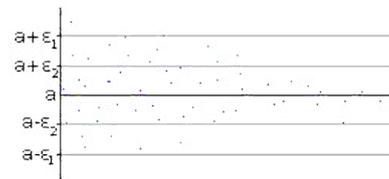
Sprechweise: „ $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rightarrow} \infty$ “ bedeutet:  $\forall R \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n \geq R$ .



Genereller Nutzen:

Vereinfachung komplizierter Ausdrücke, indem man sie für „große“  $n$  durch den Limes für  $n \rightarrow \infty$  ersetzt.

$$a_n = \frac{n^3 - 2n + 5}{4n^3 + 3n^2 + 13} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}$$



### 6.3 Bemerkung

Der Grenzwert  $a$  in 6.2 ist, falls er existiert, eindeutig bestimmt.

Beweis:

Seien  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $(a_n) \subset \mathbb{C}$  Folge,  $a_n \rightarrow a$ ,  $a_n \rightarrow b$ . zu  $\varepsilon > 0$  existiert  $N_1 \in \mathbb{N}$  mit  $\forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \varepsilon$ . Weiter existiert  $N_2 \in \mathbb{N}$  mit  $\forall n \geq N_2 : |a_n - b| < \varepsilon$ . Somit  $\forall n > \max\{N_1, N_2\} : |a_n - a| < \varepsilon$  und  $|a_n - b| < \varepsilon$ .

Für solche  $n$  folgt:  $|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon$ . Dies ist für alle  $\varepsilon > 0$  so, also:  $|a - b| = 0$ .

### 6.4 Rechenregeln

1. Falls  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ , so  $a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$ ,  $|a_n| \rightarrow |a|$

Falls  $b \neq 0$ , so existiert  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\forall n \geq n_0 : b_n \neq 0$ , und dann  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

(Grenzwertbildung vertauschbar mit Grundrechenarten und mit Betrag.)

Beweis: ( $\pm$  trivial) Exemplarisch „ $\frac{a}{b}$ “:

Es gilt  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ . ( $b_n$ ) ist beschränkt, dann zu  $\varepsilon := 1$  existiert  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\forall n > N : |b_n - b| \leq \varepsilon$ . Somit  $\forall n \geq N : |b_n| = |b_n - b + b| \leq |b_n - b| + |b| < |b| + 1$ .

$$\text{Also } \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq \max \left\{ \max_{j=1, N} (b_j), |b| + 1 \right\} =: B$$

Ebenso:  $\exists A > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq A$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Es existiert  $N_1 \in \mathbb{N}$  mit  $\forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2B}$

Analog: Es existiert  $N_2 \in \mathbb{N}$  mit  $\forall n \geq N_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2A}$

Für  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$  ist

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + ab_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also:  $a_n b_n \rightarrow ab$

2.  $a_n \rightarrow a \Rightarrow$  [Für  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:  $a_{n+n_0} \rightarrow a$ ]

3. Falls  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$  und  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ , so auch  $a \leq b$ .

Speziell, falls  $\forall n \in \mathbb{N} : a_1 \leq c \in \mathbb{R}$ , so auch  $a \leq c$ .  $\Rightarrow$  Für  $(a_n)$ ,  $(b_n \in \mathbb{R})$

4. Falls  $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{C}$ ,  $b_n \in \mathbb{R} : |a_n| \leq b_n$  und  $b_n \rightarrow 0$ , so  $a_n \rightarrow 0$ .

5.  $(a_n)$  konv.  $\Rightarrow (a_n)$  beschränkt, d.h.:  $\exists c > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c$

## 6.5 Beispiele

1)  $a_n := \frac{1}{n}$ ,  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Beweis:

Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Archimedes existiert  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N > \frac{1}{\varepsilon}$ . Für  $n \geq N$  folgt:  $|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

2)  $a_n := (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = -1 \dots$  ( $a_n$  ist divergent)

## 6.6 Beispiele für Grenzwertberechnung

a)  $a_n := \frac{n^2+3}{2n^3+n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $|a_n| = \frac{n^2}{2n^3+n} + \frac{3}{2n^3+n} \leq \frac{n^2}{2n^3} + \frac{3}{n} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} + \frac{3}{n} \rightarrow 0$

b)  $a_n := \frac{4n^3-7n^2+1}{3n^3+n+2} = \frac{n^3(4-\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^3(3+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3})} \xrightarrow{\frac{1}{n} \rightarrow 0} \frac{4}{3}$

## 6.7 Teilfolgen & Häufungspunkte

1) Eine Folge  $(b_n)$  heißt *Teilfolge* der Folge  $(a_n)$ , falls gilt:

Es gibt ein  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton wachsend.

$(\varphi(j+1) > \varphi(j) \forall j \in \mathbb{N})$ , so dass

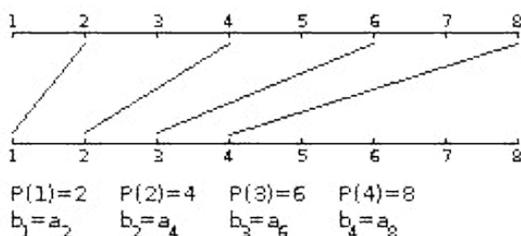
$$\forall n \in \mathbb{N}: b_n = a_{\varphi(n)}.$$

*Missbräuchliche Notation* „ $(b_n) \subset (a_n)$ “ für  $(b_n)$  ist Teilfolge von  $(a_n)$ .

*Bemerkung:* Für  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  str. wachsend ist  $\forall n \in \mathbb{N}: \varphi(n) \geq n$ .

2)  $x \in \mathbb{C}$  heißt *Häufungspunkt* der Folge  $(a_n) \subset \mathbb{C}$ , wenn gilt:

Es existiert eine Teilfolge  $(b_n) \subset (a_n)$  mit  $(b_n) \rightarrow x$ .



## 6.8 Bemerkung

$a_n \rightarrow x \Leftrightarrow$  jede Teilf.  $(b_n) \subset (a_n)$  erfüllt  $b_n \rightarrow x$

Beweis: leicht

Beispiel:

$a_n := (-1)^n$  nicht konvergent;  $(a_{2n}) \rightarrow 1$ ;  $(a_{2n+1}) \rightarrow -1$

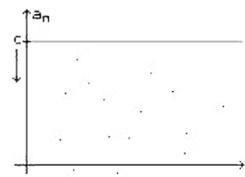
$a_n$  hat die Häufungspunkte:  $+1, -1$ .

## 6.9 Satz & Definition

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  beschränkt (d.h. es ex.  $c > 0$  mit  $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < c$ ).

Dann gibt es einen größten und einen kleinsten Hp von  $(a_n)$ , die mit limes superior ( $\overline{\lim}$ ) bzw. limes inferior ( $\underline{\lim}$ ) bezeichnet werden.

kurz:  $\overline{\lim} a_n, \underline{\lim} a_n$



Beweis:

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  beschränkt. Dann ex.  $c \in \mathbb{R}$  mit  $\{n \in \mathbb{N} | a_n > c\}$  endlich.

Sei  $s := \inf\{c \in \mathbb{R} | \{n \in \mathbb{N} | a_n > c\} \text{ endlich}\}$ . Dann  $M \supset (s; \infty)$  !

*Behauptung:*  $s$  ist Hp von  $(a_n)$ .

Beweis:

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $N \in \mathbb{N}$ . Dann  $s - \varepsilon \notin M$ , also existieren unendlich viele Folgenglieder  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a_n > s$ , also existiert  $n \in \mathbb{N}, n > N$  mit  $a_n > s - \varepsilon$ .

Damit konstruiere Teilfolge

$(a_{\varphi(j)}) \subset (a_n)$  mit  $\forall j \in \mathbb{N} : (a_{\varphi(j)}) > s - \frac{1}{j}$ .

Falls  $(a_{\varphi(j)}) \not\rightarrow s$ , so ex.  $\varepsilon_0 > 0$  und eine Teilf.  $(a_{\psi(j)})$  von  $((a_{\varphi(j)}))$ , so dass  $\forall j \in \mathbb{N} : a_{\psi(j)} \geq s + \varepsilon_0$ . *Widerspruch* zu  $s + \varepsilon_0 \in M$ , da alle  $((a_{\psi(j)}))(j \in \mathbb{N})$   $(a_{\psi(j)}) > s + \varepsilon_0$  erfüllen.

Also  $(a_{\varphi(j)}) \rightarrow s$

2. *Behauptung:*  $s$  ist größter Hp von  $(a_n)$

Beweis:

Sei  $x$  Hp von  $(a_n)$ . Z.z. ist:  $x \leq s$ .

Es existiert Teilf.  $(a_{\varphi(j)}) \subset (a_n)$  mit  $(a_{\varphi(j)}) \rightarrow x$ .

Falls  $x > s$ , so existiert zu  $\varepsilon := \frac{x-s}{2} > 0$  ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , so dass

$\forall n \geq n_\varepsilon : |a_{\varphi(j)} - x| < \varepsilon$ . Für solche  $n \geq n_\varepsilon$  folgt, dass

$(a_{\varphi(n)}) = \underbrace{(a_{\varphi(n)} - x + x)}_{> a - \varepsilon} > x - \varepsilon = \frac{x+s}{2} > s$  *Widerspruch* zu

$s + \varepsilon_0 \in M$ , da alle  $(a_{\psi(j)})$

Also  $x \leq s$

Beweis  $\liminf$  analog.

## 6.10 Satz: Bolzano Weierstraß

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  beschränkte Folge. Dann hat  $(a_n)$  einen Häufungspunkt, also eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Nach 6.9 ist z.B.  $\overline{\lim} a_n$  Hp.

Bemerkung: Gilt auch für  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , insbesondere für  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

### 6.11 Satz

Sei z.B.  $(a_n)$  monoton wachsend, also  $a_n \leq a_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Setze  $a := \overline{\lim} a_n$ . Es ex. Teilf.  $(a_{\varphi(n)}) \subset (a_n)$  mit  $a_{\varphi(n)} \rightarrow a$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Es ex.  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $\forall n \geq n_\varepsilon : |a_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$ .

wegen  $a_n$  wachsend gilt:  $0 \geq a - a_{\varphi(n)} > -\varepsilon$ .

Für  $n \geq \varphi(n_\varepsilon)$  ist  $\varphi(n) \geq n \geq \varphi(n_\varepsilon) \geq n_\varepsilon$  und  $a_{\varphi(n)} \geq a_n \geq a_{\varphi(n_\varepsilon)}$  (da  $(a_j)$  wachsend).

Also  $0 \geq a_{\varphi(n)} - n \geq a_n - a \geq a_{\varphi(n_\varepsilon)} \geq -\varepsilon$ , insbes.  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

Also  $a_n \rightarrow a$

### 6.12 Definition/Satz: Cauchysches Konvergenzkriterium

- Eine Folge  $(a_n) \subset \mathbb{C}$  heißt Cauchy-Folge, falls gilt:  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon$
- Es gilt:  $(a_n)$  ist konf.  $\Leftrightarrow (a_n)$  ist Cauchy-Folge
- Die Eigenschaft, dass jede Cauchy-Folge konvergiert, nennt man auch Vollständigkeit

Beweis:

- “ $\Rightarrow$ “: Sei  $(a_n) \subset \mathbb{C}$  konv. mit *limes*  $a \in \mathbb{C}$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Es ex.  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Für  $m, n \geq N$  gilt:

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq \underbrace{|a_m - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

„ $\Leftarrow$ “:  $(a_n)$  beschränkt.: Zu  $\varepsilon := 1$  ex.  $N \in \mathbb{N}$  mit

$\forall m, n \geq N : |a_m - a_n| < 1$ , speziell  $\forall n > N : |a_n - a_N| < 1$ . Es folgt mit  $c := \max\{|a_N| + 1, \max\{|a_1|, \dots, |a_N|\}\} : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c$ .

Nach Bolzano-Weierstraß ex.  $a \in \mathbb{C}$  und Teilfolge

$(a_{\varphi(n)}) \subset (a_n)$  mit  $(a_{\varphi(n)}) \rightarrow a$ .

## 7 Reihen

### 7.1 Definition

Sei  $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$  Folge.

- Die zugehörige Reihe  $\sum a_n$  (auch  $\sum_{n \geq 0} a_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  etc.) ist die Folge der Partial-

summen  $(s_n)_{n \geq 0}$ ,  $s_n := \sum_{j=0}^n a_j$

- Die Reihe  $\sum a_n$  heißt konvergent/divergent  $\Leftrightarrow (s_n)$  konv./div. (Konvergenz der Reihe hängt nicht vom Anfangsindex ab, der Wert (im Konvergenz-Fall) schon!)

Grenzwert von  $(s_n)$  wird, falls ex., mit  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  bezeichnet.

- $\sum a_n$  heißt absolut konvergent  $\Leftrightarrow \sum |a_n|$  konv. (gleichbedeutend:  $\sum_{j=0}^n |a_j|_{n \geq 0}$  beschr.)

## 7.2 Bemerkung

$$\sum a_n \text{ absolut konv. } \Rightarrow \sum a_n \text{ konv. } \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

Gegenbeispiele:

„ $\Leftarrow_1$ “:  $\sum_n (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ . alternierende harmon. Reihe, konv. aber nicht abs. konv.

„ $\Leftarrow_2$ “:  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ . harmonische Reihe, divergent.

Beweis:

zu „ $\Rightarrow_1$ “:

$$\text{Sei } |a_n| \text{ konv. und } s_n := \sum_{j=n_0}^n a_j, \sigma_n := \sum_{j=n_0}^n |a_j| \quad (n \geq n_0).$$

Zeige:  $(s_n)$  Cauchy-Folge (also konv.). Es ist  $(\sigma_n)$  konv. also Cauchy-Folge. Sei  $\varepsilon > 0$ , ex.  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $\forall m, n \geq n_\varepsilon : |\sigma_m - \sigma_n| < \varepsilon$ . Für solche  $m, n$  und  $m > n$  ist  $|s_m - s_n| = \left| \sum_{j=n+1}^m a_j \right| \geq$

$$\sum_{j=n+1}^m |a_j| = \sigma_m - \sigma_n = |\sigma_m - \sigma_n| < \varepsilon.$$

zu „ $\Rightarrow_2$ “:

Sei  $\sum a_n$  konv., dann ist  $(s_n)$  Cauchy-Folge, also ex. zu  $\varepsilon > 0$  ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $\forall m, n \geq n_\varepsilon : |s_m - s_n| < \varepsilon$ . Für  $n \geq n_\varepsilon + 1$  ist  $|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \varepsilon$ .

## 7.3 Satz: Geometrische Reihe

Für  $q \in \mathbb{C}$  ist  $\sum_n q^n$  konv.  $\Leftrightarrow |q| < 1$ .

Falls  $|q| < 1$ , so  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “:  $\sum a^n$  konv.  $\Rightarrow q^n \rightarrow 0 \Rightarrow |q| < 1$ .  
(7.22)

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $|q| < 1$ , dann ist für  $n \geq 0$   $\sum_{j=0}^n a^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-q}$   
 $q^n \rightarrow 0$

## 7.4 Satz: Mayorantenkriterium

Sei  $|a_n| \leq b_n$  ( $n \geq n_0$ ), wobei  $(a_n) \subset \mathbb{C}$ ,  $b_n \in [0, \infty)$  und  $\sum b_n$  sei konv.

Dann auch  $\sum (a_n)$  konv. (Also auch  $\sum a_n$  konv. nach 7.2 1)).

Beweis:

$$\text{Sei } s_n := \sum_{j=n_0}^n |a_j|, \text{ für } m, n \geq n_0, m > n \text{ ist } |s_m - s_n| = \sum_{j=n+1}^m |a_j| \leq \sum_{j=n+1}^m b_j.$$

Zu  $\varepsilon > 0$  ex., da  $\sum b_j$  konv., ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $\forall m, n \geq n_\varepsilon, m > n : \sum_{j=n+1}^m b_j < \varepsilon$ .

Für solche  $m, n : |s_m - s_n| < \varepsilon$ .

Also  $(s_n)$  Cauchy-Folge, also konv.

### 7.5 Satz: Quotientenkriterium

Sei  $(a_n)_{n \geq n_0} \subset \mathbb{C}$  und es gebe  $q \in [0, 1)$  mit  $\forall n \geq n_0 : |a_{n+1}| \leq q|a_n|$  (Reicht nicht  $(a_{n+1}) < |a_n| \forall n \geq n_0$ )

Dann  $\sum |a_n|$  konv.

Beweis:

Induktion:  $\forall n \geq n_0 : |a_n| \leq q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}|$ .

Es ist  $\sum_n q^{n-n_0} |a_{n_0}|$  konv. ( $= |a_{n_0}| \cdot q^{-n_0} \cdot q^n$ ) (geometrische Reihe), nach Mayorantenkriterium  $\sum |a_n|$  konv.

### 7.6 Satz: Wurzelkriterium

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{C}$ ,  $\sqrt[n]{|a_n|}$  sei beschränkt und  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ .

Dann  $\sum |a_n|$  konv.

Beweis:

Sei  $\tilde{q} := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ ,  $\tilde{q} \in [0, 1)$ . Wähle  $q \in (\tilde{q}, 1)$ . Dann ex. ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\forall n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ . Folgt:  $\forall n > N : |a_n| \leq q^n$ .

Nach Mayorantenkriterium:  $\sum |a_n|$  konv.

### 7.7 Bemerkung

Falls  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$  (oder  $\sqrt[n]{|a_n|}$  unbeschr.), so ist  $\sum a_n$  div.

Beweis:

Falls  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ , so ex. Teilfolge  $(b_n)$  von  $(a_n)$  mit  $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ . Also  $|b_n| > 1$ , also  $a_n \not\rightarrow 0$ ,  $\sum a_n$  div.

### 7.8 Cauchyscher Verdichtungssatz & Leibnizkriterium

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  monotone Nullfolge. Dann:

a)  $\sum a_n$  konv.  $\Leftrightarrow \underbrace{\sum_n 2^n \cdot a_{2^n}}_{\text{verdichtete Reihe}}$  konvergent.

b)  $\sum (-1)^n a_n$  konv. (Leibnizkriterium)

Beweis:

zu a)

$$s_n = \sum_{j=0}^n a_j. \text{ Es gilt } \sum a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow (a_n) \text{ beschr.} \Leftrightarrow (a_{2^n}) \text{ beschr.}$$

$$s_{2n} = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq 2a_2} + \underbrace{a_4 + a_5 + \dots}_{\geq 2a_4} + a_8 + \dots + a_{2^{n-1}} + \dots + a_{2^n}$$

$$\sum 2^n a_{2^n} \text{ konv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ konv.}$$

Sei z.B.  $a_i \geq 0 \forall i \in \mathbb{N}$

$$\text{Man sieht } \sum a_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum_n 2^{n-1} a_{2^n} \text{ konv.} \Rightarrow \sum_n 2^n a_{2^n} \text{ konv.}$$

zu b)

Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $s_k := \sum_{n=1}^k (-1)^n a_n$ . (Seien z.B.  $a_n \geq 0 \forall n : (a_n)$  fallend)

Für gerade  $k$ :  $s_{k+2} = s_k - a_{k+1} + a_{k+2} \leq s_k$ ;

Für ungerade  $k$ :  $s_{k+2} = s_k + a_{k+1} - a_{k+2} \geq s_k$ .

Also  $(s_{2k})$  fallend,  $(s_{2k+1})$  wachsend.

Weiter  $s_0 \geq s_{2k} \geq s_{2k-1} \geq s_1$  für  $k \in \mathbb{N}$ , somit  $(s_{2k})$  und  $(s_{2k-1})$  monoton und beschr. also konv.

Beispiel:

- 1)  $\sum_n \frac{1}{n^k}$  konv.  $\Leftrightarrow \sum 2^n \frac{1}{(2^n)^k}$  konv.  $\Leftrightarrow \sum_n \frac{1}{(2^n)^{k-1}}$  konv.  $\Leftrightarrow \sum \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^n$  konv.  $\Leftrightarrow k > 1$ ; insbesondere  $\sum \frac{1}{n}$  divergent.  
*geom. Reihe*
- 2)  $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  konv. (nach Leibniz-Krit.) (Wert =  $\log_e(2)$ )

## 7.9 Folgerung

Sei  $K \in \mathbb{N}_0$  dann ist  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^k}$  konv.  $\Leftrightarrow k > 1$  (Gilt auch für  $k \in \mathbb{R}$ )

Beispiel:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

## 7.10 Definition/Satz: Umordnung

Sei  $(a_n) \subset \mathbb{C}$ . Sei  $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (bzw.  $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ) bijektiv.

- a) Dann heißt die Reihe  $\sum_n a_{\varphi(n)}$  eine Umordnung der Reihe  $\sum_n a_n$ .

(Partialsommen:  $\sum_{n=1}^N a_{\varphi(n)} + \dots + a_{\varphi(N)}$ )

- b) Falls  $\sum_n |a_n|$  konv., so konv auch jede Umordnung von  $\sum_n a_n$  gegen den selben Grenzwert.

- c) Falls  $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ,  $\sum_n a_n$  konv., aber nicht abs. konv. ( $\sum_n |a_n|$  diverg.), so gilt

$\forall c \in \mathbb{R} \exists$  Umordnung  $\sum_n a_{\varphi(n)}$ , die gegen  $c$  konv. (Riemannscher Umordnungssatz)

Beweis:

b) Sei  $\varphi : \mathbb{N} \leftrightarrow \text{bij.}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Es gibt ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{n \geq N} |a_n| < \varepsilon$ , da  $\sum |a_n|$  konv.

$$\begin{aligned} \text{Es ex. } M \in \mathbb{N} \text{ mit } \{1, \dots, N\} \subset \{\varphi(1), \dots, \varphi(M)\} \text{ Für } n \geq M : \\ \left| \sum_{j=1}^n a_{\varphi(j)} - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right| = \left| \sum_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \notin \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}}} a_l \right| \leq \sum_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \notin \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}}} |a_l| \\ \leq \sum_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \notin \{\varphi(1), \dots, \varphi(M)\}}} |a_l| \leq \sum_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \notin \{1, \dots, N\}}} |a_l| < \varepsilon \end{aligned}$$

c) Beweisskizze:

1. Es ist  $\sum_{\substack{n \\ a_n \geq 0}} |a_n|$  div. und  $\sum_{\substack{n \\ a_n < 0}} |a_n|$  div (!).

2. Sei  $c \in \mathbb{R}$  nehme positive Summanden, bis Summe gerade  $> c$ , dann negiere Summanden bis  $< c$ , dann  $\dots > c$ , dann  $\dots < c \dots$

Konstruiere so rekursiv  $P : \mathbb{N} \leftrightarrow \text{bij.}$   $\sum_n a_{\varphi(n)} \rightarrow c$  folgt aus

$\frac{a_n}{n} \rightarrow 0$ , wegen  $\sum a_n$  konv.

## 8 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

### 8.1 Definition

Sei  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  (oder  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ), und  $a \in \mathbb{C}$  (nicht unbedingt  $a \in D$ )

Es gebe eine Folge  $(a_n) \subset D$  mit  $a_n \rightarrow a$  (automatisch der Fall wenn  $a \in D$ ).

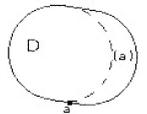
$f(x)$  hat für  $x \mapsto a$  den Grenzwert  $y$  (In Zeichen:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$ ), falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D, |x - a| < \delta : |f(x) - y| < \varepsilon .$$

Entsprechend falls  $R_0 \in \mathbb{R}$  ex. mit  $[R_0, \infty) \subset D$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 \forall x \geq R : |f(x) - y| < \varepsilon$$

$$\text{Analog für } \lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists R < 0 \forall x \leq R : |f(x) - y| < \varepsilon$$



### 8.2 Definition/Bemerkung: Stetigkeit



a)  $f$  wie in 8.1 heißt stetig im Punkt  $a \in D$ , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D, |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Äquivalent sind:

1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ex. (=  $f(a)$ )

2) Für jede Folge  $(x_n) \subset D$ ,  $x_n \rightarrow a$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow f(a)$

(„ $\varepsilon - \delta$ -Definition der Stetigkeit“)

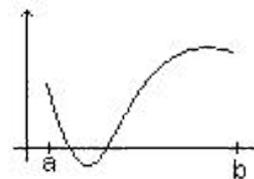
b)  $f$  heißt stetig, falls  $f$  bei allen Punkten  $a \in D$  stetig ist.

Bemerkung:

- 1) Falls  $D \subset \mathbb{R}$  Intervall, so bedeutet  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig anschaulich, dass man den Graphen von  $f$  „ohne abzusetzen zeichnen“ kann.
- 2) Sonst: Definition nachprüfen.

Beispiel:

- a)  $f : \mathbb{R} \leftrightarrow, f(x) = x$  ist stetig
- b)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$  ist stetig
- c)  $f : \mathbb{R} \leftrightarrow, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$  ist stetig in allen Punkten  $x \neq 0$ , aber unstetig im Punkt  $x = 0$
- d)  $f : \mathbb{R} \leftrightarrow, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  ist unstetig in allen Punkten („Dirichlet-Funktion“)



### 8.3 Rechenregeln (analog zu Folgen)

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , falls  $f(x)$  und  $g(x)$  existieren.

Entsprechend für „/“, falls  $g(x) \neq 0$ .

Analog für  $x \rightarrow \pm\infty$

### 8.4 Folgerung

- a)  $f, g$  in  $a \in \mathbb{C}$  und dort stetig, so auch  $f \pm g$  stetig bei  $a$ .

Falls  $g(a) \neq 0$ , so auch  $\frac{f}{g}$  bei  $a$ .

- b)  $f$  stetig in  $a$ ,  $g$  stetig in  $f(a) \Rightarrow g \circ f$  stetig in  $a$ .

### 8.5 Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

Sei  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $a \in D$ .

$f$  heißt gleichmäßig stetig auf  $A$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in A \forall x \in D, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

$f$  stetig auf  $A$  würde bedeuten:

$\forall a \in A \exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \forall x \in D, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

## 9 Stetige Funktionen auf Intervallen

Sei stets  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Ein Intervall der Form  $[a, b]$  heißt kompaktes Intervall.

### 9.1 Zwischenwertsatz

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $c \in [f(a), f(b)]$ , falls  $f(a) < f(b)$ , sonst  $c \in [f(b), f(a)]$ .

Dann  $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = c$

Beweis:

Betrachtet: Fall  $f(a) < c < f(b)$  (Restliche Fälle analog bzw. trivial)

Setze  $M := \{x \in [a, b] \mid x \leq c\}$ . Dann  $a \in M \subset [a, b]$ .

Setze  $\xi := \sup(M)$ . Dann  $\xi \in [a, b]$ .

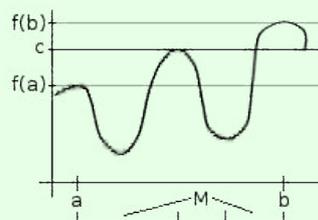
Es ex. eine Folge  $(x_n) \subset M$ ,  $x_n \rightarrow \xi$  (!).

Da  $f$  stetig bei  $\xi$ , gilt:  $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$ .

Wäre  $f(\xi) < c$ , so würde wegen  $f$  st. bei  $\xi$  ein  $\delta > 0$  ex.

mit  $\xi + \delta < b$  und  $\forall x \in [\xi, \xi + \delta]$ .  $f(x) < c$ .

Wid. zu „ $\xi$  o.S. für  $M$ “, also  $f(\xi) = c$



## 9.2 Satz: Extrema von st. Funktionen auf $[a, b]$

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  st. Dann nimmt  $f$  auf  $[a, b]$  ein Min. und ein Max. an, d.h.

$\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$

$\exists \eta \in [a, b] : f(\eta) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$

Beispiel:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$  hat kein Minimum/Maximum.

Beweis:

1. Behauptung  $f$  ist beschr.

Beweis:

Sonst ex. zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in [a, b]$

(Funktionale Abhängigkeit:  $(n \in \mathbb{N}) \mapsto x_n$  benutzt Auswahlaxiom)

mit  $|f(x_n)| \geq n$ . Nach Bolzano-Weierstraß ex. konv. Teilfolge  $x_{\varphi(n)}$  von  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)} = x^* \in [a, b]$  ( $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b \Leftrightarrow a \leq x^* \leq b$ ).

Da  $f$  st. bei  $x^*$ , gilt  $f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(x^*)$ ,

aber andererseits  $|f(x_{\varphi(n)})| \geq \varphi(n) \geq n$ .

Wid  $\Rightarrow f$  ist beschränkt.

2. Sei  $\sigma := \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ . Es ex. Folge  $(x_n) \subset [a, b]$  mit  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma$ .

Nach Bolzano-Weierstraß ex. konv. Teilfolge

$(x_{\varphi(n)}) \subset (x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)} = x^* \in [a, b]$ .

Da  $f$  stetig bei  $x^*$ , ist  $f(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)}) = \sigma$ .

Somit  $\sigma := \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$  ( $x \hat{=} \eta$ ). Min analog.

## 9.3 Folgerung

Für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  st gilt:  $f([a, b]) = [\min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}, \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}]$   
(gemeint  $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ )

Beweis: folgt aus 9.2 und Zwischenwertsatz 9.1

Beispiel:  $f : \mathbb{Q} \leftrightarrow, f(x) = x^2, f(1) = 1, f(3) = 9$ . 2 tritt nicht als Funktionswert auf!

## 9.4 Satz

Sei  $D \subset \mathbb{C}; [a, b] \subset D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  st. Dann ist  $f$  auf  $[a, b]$  sogar gleichmäßig stetig.

Beweis:

Annahme nicht.

Dann  $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in [a, b] \exists y \in D, |x - y| < \delta, |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$ .

Also ex. zu  $\delta_n = \frac{1}{n} x_n \in [a, b], y_n \in D, |x_n - y_n| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ .

Nach Bolzano-Weierstraß ex. konv. Teilfolge  $(x_{\varphi(n)}) \subset (x_n)$  mit  $\lim x^* \in [a, b]$  wegen  $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)}$  gilt auch  $y_{\varphi(n)} \rightarrow x^*$ .

Dann, da  $f$  st. bei  $x^* : f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(x^*), f(y_{\varphi(n)}) \rightarrow f(x^*)$ .

Widerspruch zu  $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon_0 (\forall n \in \mathbb{N})$

## 9.5 Definition: Konvergenz von Funktionsfolgen

Sei  $D \subset \mathbb{C}, f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$  Funktion für  $n \in \mathbb{N}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ .

$(f_n)$  konv. auf  $D$  punktweise gegen  $f$

$$\Leftrightarrow \forall x \in D : f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x).$$

(Bedeutet:  $\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

(von  $\varepsilon$  und  $n$  abhängig!))

$(f_n)$  konv. auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(nur von  $\varepsilon$ !)

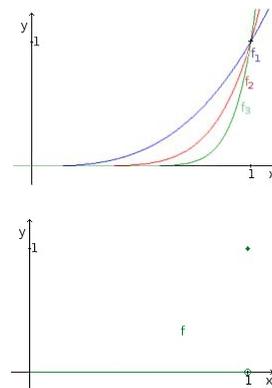
Beispiel:

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) := x^n$$

$$f_n \text{ stetig, } f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} := f(x)$$

$f_n \rightarrow f$  punktweise. z.B. für  $\varepsilon = \frac{1}{10} : \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \forall x \in$

$$[0, 1] : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{10}. \left( \forall n \in \mathbb{N} : f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \frac{1}{2} \right)$$



# 10 Potenzreihen, spezielle Funktionen

## 10.1 Definition

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$ . Die (von  $z \in \mathbb{C}$  abh.) Reihe  $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$  heißt

Potenzreihe mit Koeffizienten  $a_n$  und mit Entwicklungspunkt  $z_0$ . Sie definiert durch

$f(z) := \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$  überall dort, wo sie konvergiert. (sicher für  $z = z_0$ )

## 10.2 Satz: Konvergenz von Potenzreihen

Für eine Potenzreihe  $\sum a_n(z - z_0)^n$  tritt genau einer der folgenden 3 Fälle ein:

- 1)  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ , Potenzreihe konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$
- 2)  $(\sqrt[n]{|a_n|})$  ist beschr.,  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 0$ .

Dann ist mit  $\rho := \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$  (Cauchy-Hadamard):

$$\sum a_n(z - z_0)^n = \begin{cases} \text{divergent} & \text{falls } |z - z_0| > \rho \\ \text{konvergent} & \text{falls } |z - z_0| < \rho \end{cases}$$

- 3)  $\sqrt[n]{|a_n|}$  ist unbeschr.,  $\sum a_n(z - z_0)^n$  konvergent nur für  $z = z_0$ .

Beweisidee:  $\alpha_n : a_n(z - z_0)^n$ , Wurzelkrit. für  $\sum \alpha_n$ .

- 1) Falls  $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 0$  dann auch  $\forall z \in \mathbb{C} : \sqrt[n]{|\alpha_n|} \rightarrow 0$
- 2) Falls  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho} > 0$ , so  $\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \begin{cases} 0 & \text{falls } |z - z_0| > \rho \\ < 0 & \text{falls } |z - z_0| < \rho \end{cases}$
- 3) Falls  $\sqrt[n]{|a_n|}$  unbeschr., so für  $z \neq z_0$  auch  $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$

## 10.3 Bemerkung: lokale gleichmäßige Konvergenz

Auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe der Form  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ , die ganz im offenen Konvergenzkreis  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\}$  (Konvergenzradius  $\rho$ ) konvergiert  $\sum a_n(z - z_0)^n$  sogar gleichmäßig (absolut).

Beweis:

Sei  $\varepsilon > 0, r$  wie angegeben.

Dann für  $r \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r$ :

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} \leq \overbrace{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}^{\text{unabh. v. } z \text{ mit } |z - z_0| \leq r} < 1. \\ = \frac{1}{\rho} \text{ bzw. } 0$$

Also existiert  $q \in [0, 1)$  und  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\forall n \geq N_0 : |a_n| \cdot |z - z_0|^n \leq q^n$ .

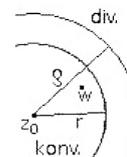
Es ex.  $N_\varepsilon \geq N_0$  mit  $\sum_{n \geq N_\varepsilon} q^n < \varepsilon$ , da  $\sum_n q^n$  konvergiert.

Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| \leq r$  folgt

$$\left| \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} a_n(z - z_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right| \\ = \left| \sum_{n \geq N_\varepsilon} a_n(z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n \geq N_\varepsilon} |a_n| \cdot |z - z_0|^n < \varepsilon$$

## 10.4 Folgerung

Die Summenfunktion  $z \rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$  ist stetig im inneren des Konvergenzkreises.



Beweisidee:

Sei  $\rho$  der Konvergenzradius,  $w \in \mathbb{C}$ ,  $|w - z_0| < \rho$ .

Dann mit  $r := \frac{|w - z_0| + \rho}{2}$  (bzw.  $|w - z_0| + 1$ , falls  $\rho = \infty$ ):

$$p_N(z) : \sum_{n=0}^N a_n (z - z_0)^n : p_n|_{B(z_0, r)} \rightarrow f|_{B(z_0, r)} \text{ glm.}$$

$$(f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, p_n \text{ Polynomfunktion stetig})$$

Nach Satz von Weierstraß:  $f|_{B(z_0, r)}$  st. Falls nun  $(w_j)$  Folge,  $w_j \rightarrow w$ , so:

$$\exists j_0 \forall j \rightarrow j_0 : w_j \in B(z_0, r).$$

$$\text{Somit } f(w_j) = f|_{B(z_0, r)} w_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f|_{B(z_0, r)}(w) = f(w)$$

## 10.5 Satz & Definition

Die folgenden Potenzreihen konvergieren für alle  $z \in \mathbb{C}$  absolut und definieren somit stetige Funktionen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

$$\exp(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\sin(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

Beweis exemplarisch für  $\exp(z)$ :

$$\left| \frac{\frac{z^{j+1}}{(j+1)!}}{\frac{z^j}{j!}} \right| = \frac{|z|}{j+1} \leq \frac{1}{2} \text{ für } j \geq 2|z| \text{ Quadrantenkriterium } \Rightarrow \text{ konvergent.}$$

Bemerkung:

- 1)  $\cos(-z) = \cos(z)$  (gerade),  $\sin(-z) = -\sin(z)$  (ungerade)
- 2) Schreibweise oft auch  $\exp(z) = e^z$
- 3) Für  $x \in \mathbb{R}$  ist  $\exp(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x) \in \mathbb{R}$

## 10.6 Funktionalgleichung der exp-Funktion

Für  $x, z \in \mathbb{C}$  ist  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ .

Beweis:  $e^{x+y}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x+y)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot \left( \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \cdot x^l \cdot y^{j-l} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j>l} \frac{1}{j} x^l y^{j-l} \frac{j!}{l!(j-l)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \left( \sum_{j>l} \frac{y^{j-l}}{(j-l)!} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \left( \sum_{j>l} \frac{y^j}{j!} \right) = \left( \sum_{j>l} \frac{y^j}{j!} \right) \left( \sum_{l>0} \frac{x^l}{l!} \right) \\ &= e^y \cdot e^x \end{aligned}$$

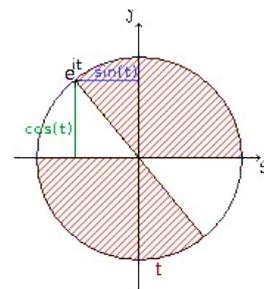
### 10.7 Satz: Formel von Euler de Moivre

Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt:  $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ .

Speziell für  $t \in \mathbb{R}$ :  $e^{it} = \underbrace{\cos(t)}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\sin(t)}_{\in \mathbb{R}}$ .

Also  $\cos(t) = \Re(e^{it})$ ,  $\sin(t) = \Im(e^{it})$ .

Weiter:  $|e^{it}| = 1$



Beweis:

$$1. \quad e^{iz} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^j}{j!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}}_{=\cos(z)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=\sin(z)}$$

2. Für  $t \in \mathbb{R}$ :  $\cos(t) \in \mathbb{R}$ ,  $\sin(t) \in \mathbb{R}$

und  $\cos(t) = \Re(e^{it})$ ,  $\sin(t) = \Im(e^{it})$ .

Für  $z = a + bi$  ist  $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ ,

also  $|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot e^{-it} = (\cos(t) + i\sin(t)) \cdot (\cos(t) - i\sin(t))$

$= (\cos(t) + i\sin(t)) \cdot (\cos(-t) + i\sin(-t)) = e^0$ ,

also  $|e^{it}| = 1$

### 10.8 Folgerung

$$\forall z \in \mathbb{C} : \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

Beweis:

$$1 = e^{iz} \cdot e^{-iz} = (\cos(z) + i\sin(z)) \cdot (\cos(z) - i\sin(z))$$

$$= \cos^2(z) + \cos(z)\sin(z) - \cos(z)\sin(z) + \sin^2(z) = \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

### 10.9 Folgerung: Additionstheoreme

Für  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

Beweis:

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} = (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot (\cos(y) + i\sin(y))$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y))$$

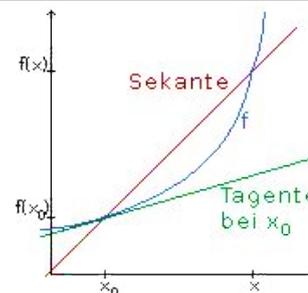
$$= \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

Vergleiche Real- und Imaginärteil!

## 11 Differenzierbarkeit

Notation:  $B(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$

für  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\delta > 0$ ,  $B(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



### 11.1 Definition

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}$ ) und  $x_0 \in D$  „innerer Punkt“ von  $D$  (d.h. es ex.  $\delta > 0$  mit  $B(x_0, \delta) \subset D$ )

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}$ )

a)  $f$  heißt bei  $x_0$  differenzierbar (diffbar)  $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert.

Der Grenzwert wird dann mit  $f'(x_0)$  bezeichnet (auch  $\frac{df}{dx}(x_0)$ ,  $\dot{x}(x_0)$ ) („Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$ “)

b) Falls  $f$  bei allen  $x_0 \in D$  diffbar, so heißt  $f$  diffbar.

Dann heißt die Funktion  $f' : D \ni x_0 \rightarrow f'(x_0)$  Ableitung von  $f$ .

Im reellen Fall: Steigung (Sekante)  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  (Differenzenquotient).

### 11.2 Bemerkung

Falls  $x_0$  immer Punkt von  $D$ , so ist Diffbarkeit von  $f$  äquivalent mit jeder der folgenden Bedingungen:

$$1) \exists \alpha \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} : \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \alpha \right| < \varepsilon$$

$$2) \exists \alpha \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(x_0, \delta) :$$

$$|f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0|$$

3) Es existiert  $\delta > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{C}$  und  $r : B(x_0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$  stetig bei  $x_0$ ,  $r(x_0) = 0$  so dass gilt:

$$\forall x \in B(x_0, \delta) : f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

$$(\text{Fehler: } r(x)(x - x_0))$$

Bemerkung:

2) und 3) drücken aus, dass der Fehler in der Approximation

$f(x) - f(x_0) \approx \alpha(x - x_0)$  auch bei Division durch  $|x - x_0|$  für  $x \rightarrow x_0$  gegen 0 konvergiert.

Falls Bedingungen 1) bis 3) in 11.2 gelten, so ist  $\alpha = f'(x_0)$

### 11.3 Linearität der Ableitung der Zuordnung $f(x_0) \mapsto f'(x_0)$

Falls  $f, g$  diffbar bei  $x_0$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  so ist auf  $(f + g)'$ ,  $\lambda \cdot f$  diffbar bei  $x_0$

und  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ,  $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

### 11.4 Satz

f bei  $x_0$  diffbar  $\not\Rightarrow$  f bei  $x_0$  stetig.

Beweis:

$$\text{„}\Rightarrow\text{“} \quad \text{Nach 11.2 3):} \quad f(x) = f(x_0) + \underbrace{\alpha(x-x_0)}_{x \rightarrow 0} + \underbrace{r(x)(x-x_0)}_{\substack{\rightarrow 0 \\ x \mapsto x_0}} \xrightarrow{x \mapsto x_0} f(x_0)$$

$$\text{„}\not\Rightarrow\text{“} \quad f(x) = |x| \text{ bei } x_0 = 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} +1 & , x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} |x| \text{ existiert nicht.}$$

### 11.5 Bezeichnung

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  diffbar. f heißt stetig diffbar, falls  $f' : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ist.

Falls  $f'$  wieder (bei  $x_0 \in D$ ) diffbar, so heißt  $(f')' := f''$  bzw.  $(f')'(x_0) := f''(x_0)$  zweite Ableitung von f (bei  $x_0$ ).

Entsprechend  $f'''$ , allgemein  $f^{(k)}(x_0)$  bzw.  $f^{(k)}$  (k-te Ableitung),  $f^0 := f$ .

f heißt k-mal stetig diffbar, falls  $f^{(k)}$  auf D existiert und stetig ist. In Zeichen:  $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{C})$  (bzw.  $\mathbb{R}$ ).  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{C}(\mathbb{R}))$  bedeutet  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig.  $\mathcal{C}^\infty(D, \mathbb{C}(\mathbb{R}))$  bedeutet beliebig oft diffbare Funktion.

Für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bedeutet  $f'(a)$  die rechtsseitige Ableitung  $(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a})$ , für  $f'(b)$  die linksseitige Ableitung  $(\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \frac{f(x)-f(b)}{x-b})$

Entsprechend ist  $\mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{C}(\mathbb{R}))$  zu verstehen.

### 11.6 Bemerkung

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  ist  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto z^n$  diffbar,  $f'(z) = n \cdot z^{n-1}$  (0 für  $n=0$ )

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = (\text{geometrische} \\ & \text{Summenformel): } \frac{(z-z_0) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} z^j \cdot z_0^{n-1-j}}{z-z_0} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{z^j \cdot z_0^{n-1-j}}_{\substack{\rightarrow z_0^{n-1} \\ z \rightarrow z_0}} = n \cdot z_0^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{Für } n = 0 : f(z) = f(z_0) = 1, f'(z_0) = 0$$

### 11.7 Bemerkung

Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^{-n}$  diffbar,  $f'(z) = -nz^{-n-1}$

## 11.8 Ableitungsregeln

a) Produktregel:

Seien  $f, g$  diffbar bei  $x_0$  ( $\in \mathbb{R}$  oder  $\in \mathbb{C}$ ), dann auch  $f \cdot g$ .

Und falls  $g(x_0) \neq 0$ , dann auch  $\frac{f}{g}$  bei  $x_0$  diffbar.

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

b) Kettenregel:

$f$  diffbar bei  $x_0$ ,  $g$  diffbar bei  $f(x_0) \Rightarrow g(f(x_0))$  diffbar bei  $x_0$ .

$$(f \circ g)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Beweis:

a) Nein

b) Idee:  $f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0) + f(x_0)$ ,  $g(x)$

$$= g'(x_0)(x - x_0) + \tilde{r}(x)(x - x_0) + r(x_0)$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0))$$

$$+ \tilde{r}(f(x))(f(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0))$$

$$= g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0))$$

$$+ \underbrace{g'(f(x_0))r(x)(x - x_0) + \tilde{r}(f(x))(f(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0))}_{=: R(x)}$$

$$\text{z.z.: } \lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Dies folgt aus  $r(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  und  $\tilde{r}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

Beachte:  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$ , da  $f$  stetig bei  $x_0$

Bemerkung zur Beweisidee bzw. „klassischen“ Schreibweise (Leibniz):

$$\text{z.B. Produkt: } f(x) = f(x_0) + \Delta f, g(x) = g'(x_0) + \Delta g$$

$$\Rightarrow (f \cdot g) = f(x_0)g(x_0) + \Delta f g(x_0) + \Delta g f(x_0) + \Delta f \Delta g$$

$$\text{Leibniz: } \delta(f \cdot g) = \delta f g + f \delta g$$

Man sieht: Ableitung (=Limes von Diffquot) vereinfacht die Formeln, die man für endliche Differenzen kriegen würde.

## 11.9 Satz: Diffbarkeit von Potenzreihen

Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\varrho > 0$ , die Potenzreihe  $\sum a_n(z - z_0)^n$  konvergiere auf  $B(z_0, \varrho)$ .

a) Dann ist die Summenfunktion  $f : B(z_0, \varrho) \rightarrow \mathbb{C}$ ;  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  diffbar

und  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(z - z_0)^{n-1}$  (Gliedweises Differenzieren).

b) Die abgeleitete Potenzreihe hat den selben Konvergenzradius wie die ursprüngliche.

Beweis:

a) Der Fall  $z_0 = 0$ : Für  $z, w \in B(0, \varrho)$ ,  $z \neq w$  ist  $\frac{f(z) - f(w)}{z - w} =$

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^n - w^n)}{z - w}$$

$$= \frac{\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^j w^{n-j-1}}{=: \varphi_w(z)}}{(z-w)} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{n=j+1}^{\infty} a_n w^{n-j-1}$$

(Doppelreihe konvergiert bzgl.  $z$  gleichmäßig auf  $B(0, \tilde{\varrho})$ ,  $\tilde{\varrho} := \frac{|w|+\varrho}{2}$ ).

$\varphi_w$  stetig bei  $z = w$ , also: ex.  $\lim \varphi_w(z) = \varphi_w(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n w^{n-1}$

Also  $f^n(w)$  ex.  $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n w^{n-1}$

Falls  $z_0 \neq 0$ : Betrachte  $\tilde{f}(z) = f(z_0 + z)$ ,  $z \in B(0, \beta)$ , wende obigen Fall an.

b) folgt aus  $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

### 11.10 Folgerung

$\exp, \sin, \cos \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  und  $\exp' = \exp$ ,  $\sin' = \cos$ ,  $\cos' = -\sin$

Beweis:

$$\exp'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot j \cdot z^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{j-1}}{(j-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = \exp(z)$$

Rest ähnlich oder nach  $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

### 11.11 Folgerung

Falls  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  (auf  $B(0, \varrho)$  konv. Potenzreihe), so ist

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \text{ also } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Beweis:

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad f^{(n)}(z_0) = a_n \cdot n! + 0 + 0,$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

### 11.12 Folgerung: Identitätssatz für Potenzreihen

Seien  $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ ,  $g(z) = \sum b_n (z - z_0)^n$  auf  $B(z_0, \varrho)$  konv. Potenzreihen und es gebe  $(w_j) \subset B(z_0, \varrho)$ ,  $w_j \rightarrow z_0$ ,  $w_j \neq z_0$ ,  $\forall j \in \mathbb{N} : f(w_j) = g(w_j)$ .

Dann  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = b_n$

Beweis:

$$f(z_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(w_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} g(w_j) = g(z_0) = a_0 = b_0$$

Sei  $a_j = b_j$ ,  $j = 0, \dots, n$  gezeigt.

$$\begin{aligned} \text{Dann } f(z) - g(z) &= \sum_{j \geq n+1} (a_j - b_j)(z - z_0)^{n+1} = (z - \\ z_0) &\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (a_{n+1+k} - b_{n+1+k})(z - z_0)^k}_{=: h(z)} \end{aligned}$$

$$\text{Für } j \in \mathbb{N} : 0 = f(w_j) - g(w_j) = \underbrace{(w_j - z_0^{n+1})}_{\neq 0} \cdot h(w_j),$$

$$\text{also } h(z_0) = 0 = a_{n+1} - b_{n+1}.$$

$$\text{Somit } \forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = b_n.$$

### 11.13 Definition: Lokale (und andere) Extrema

Sei  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  hat bei  $x_0 \in D$  ein lokales Maximum (Minimum)

$$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap B(x_0, \delta) : f(x) \leq (\geq) f(x_0).$$

Ein Max (Min) bei  $x_0$  heißt strikt, falls für  $x \neq x_0$  die Ungleichung strikt ist ( $<$  ( $>$ ) statt  $\leq$  ( $\geq$ ))

Ein Max (Min) bei  $x_0$  heißt global, falls  $\forall x \in D : f(x) \leq (\geq) f(x_0)$

### 11.14 Extrema & Ableitungen

Sei  $f$  bei  $x_0$  diffbar und habe dort ein lokales Extremum (Max/Min).

Dann ist  $f'(x_0) = 0$  ( $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ )

Beweis:

Da  $f$  diffbar bei  $x_0$  ist  $x_0$  innerer Punkt von  $D$ , also ex.  $\delta > 0$  mit  $\underbrace{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}_{=: I} \subset \mathbb{R}$  und  $f(x_0)$  größter/kleinster Funktionswert in  $I$ .

$$\text{Für } x \in I, x \neq x_0 \text{ ist im Fall „Max“ } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \leq 0 & \text{,falls } x > x_0 \\ \geq 0 & \text{,falls } x < x_0 \end{cases}$$

$$\text{Folgt } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Fall „Min“ analog.

Beispiel:

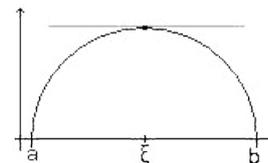
$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x, f \text{ hat bei } 0 \text{ Minimum, bei } 1 \text{ Maximum, aber } f'(0) \neq 0 \wedge f'(1) \neq 0$$

## 12 Mittelwertsatz, Monotonie & Logarithmus

### 12.1 Satz von Rolle

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  st. und auf  $(a, b)$  diffbar und  $f(a) = f(b) = 0$ .

Dann ex.  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = 0$



Beweis:

Nach §6 nimmt auf  $[a, b]$  ein Max und ein Min an, etwa bei  $\xi_1$  bzw.  $\xi_2$ .

Falls  $\{\xi_1, \xi_2\} \subset \{a, b\}$ , so  $f = 0$  auf  $[a, b]$ . Behauptung klar.

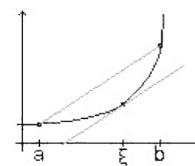
Sonst ex.  $j \in \{1, 2\}$  mit  $\xi_j \in (a, b)$ .

Nach 11.14:  $f'(\xi_j) = 0$

### 12.2 Mittelwertsatz

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  st. und auf  $(a, b)$  diffbar.

Dann ex.  $\xi \in (a, b)$  mit  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$



Beweis:

$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(r) := f(t) - (f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(1-a))$

$\varphi$  ist st. und auf  $(a, b)$  diffbar.

$\varphi(a) = 0$ ,  $\varphi(b) = 0$ .

Nach Rolle ex.  $\xi \in (a, b) : \varphi'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

### 12.3 Folgerung: Ableitung & Monotonie

Falls  $f$  auf  $(a, b)$  diffbar und auf  $[a, b]$  st., so gilt:

$f' \geq 0$  ( $> 0$ ) auf  $(a, b) \Rightarrow f$  (streng) wachsend auf  $[a, b]$ .

$f' \leq 0$  ( $< 0$ ) auf  $(a, b) \Rightarrow f$  (streng) fallend auf  $[a, b]$ .

Beweis:

Falls z.B.  $f' > 0$  auf  $(a, b)$ , so ex. für  $x, y \in [a, b]$ ,  $x < y$  ein  $\xi \in [x, y]$  :

$$\underbrace{\frac{f(y) - f(x)}{y - x}}_{> 0} = f'(\xi) > 0,$$

also  $f(y) > f(x)$ . Rest analog.

### 12.4 Folgerung

Sei  $x_0$  innerer Punkt des Intervalles  $I$  und sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar, in  $x_0$  zweimal diffbar.

Dann gilt:  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$  hat lokales Minimum.

Dann gilt:  $f'(x_0) = 0$ ,  $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$  hat lokales Maximum.

Beweisidee:

Falls  $f'(x_0) = 0 < f''(x_0)$ , dann für  $x$  nahe  $x_0$  :

$$f'(x) = \begin{cases} > f'(x_0) & \text{falls } x > x_0 \\ < f'(x_0) & \text{falls } x < x_0 \end{cases} \quad \left( \text{da } \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \right)$$

Also ex.  $\delta > 0$  mit  $f$  str. steigend auf  $[x_0, x_0 + \delta]$  bzw. fallend auf  $[x_0 - \delta, x_0]$ .

Somit bei  $x_0$  lokales Minimum.

Bemerkung:

Unter der Vorr. von 12.4 gilt:

$f$  hat bei  $x_0$  lok. Min  $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$  bzw.  $f$  hat lokales Max  $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$ .

## 12.5 Satz: Ableitung der Umkehrfunktion

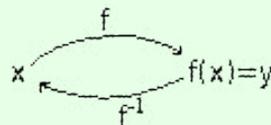
Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar und  $f' > 0 (< 0)$ . Dann ist  $f$  injektiv und die Umkehrfunktion  $f^{-1} : \underbrace{f([a, b])}_{\text{Bild}} \rightarrow [a, b]$  ist diffbar, es gilt:  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = f'(f^{-1}(y))^{-1} (\forall y \in f([a, b]))$

Beweisidee:

$$x \xrightarrow{f} f(x) = y \xrightarrow{f^{-1}} x$$

„ $\xrightarrow{f}$ “: lokaler Streckfaktor  $\approx f'(x)$

„ $\xrightarrow{f^{-1}}$ “: lokaler Streckfaktor  $\approx \frac{1}{f'(x)} \approx f^{(-1)}(y)$

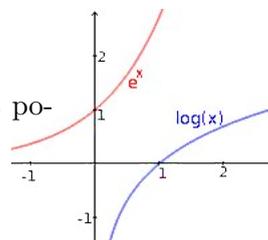


## 12.6 Folgerung & Definition: log

Die auf  $\mathbb{R}$  eingeschränkte exp-Funktion  $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist positiv und streng wachsend mit  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ .

Sie hat eine Umkehrfunktion  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Es gilt:  $\log'(x) = \frac{1}{x} (x \in (0, \infty))$



Beweis:

- Für  $x \geq 0$  :  $\exp(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots \geq 1$ . Für  $x < 0$  :  $\exp(x) = \exp(-x)^{-1} \in (0, 1)$ .
- Wegen  $\exp' = \exp > 0$  ist  $\exp$  str. wachsend. Weiter  $\exp'(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ ,  $\exp'(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ .

Mit ZWS folgt:  $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ . Ex. die Umkehrfunktion  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  klar.

Nach 12.5 ist für  $y \in (0, \infty)$  :  $\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log(y))} = \frac{1}{\exp(\log(y))} = \frac{1}{y}$ .

## 12.7 Definition: Allgemeine Potenz

Für  $\alpha, x > 0$  sei  $x^\alpha = \exp(\alpha \cdot \log(x))$

## 12.8 Rechenregeln

Für  $x, y > 0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist  $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ ,  $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$ ,  
 $\log(x^\alpha) = \alpha \cdot \log(x)$ ,  $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$

Beweis:

folgt im wesentlichen aus Funktionalgleichung für exp.

z.B.  $xy = \exp(\log(xy)) = \exp(\log(x) + \log(y)) = \exp(\log(x)) \cdot \exp(\log(y)) = x \cdot y$ , also da exp auf  $\mathbb{R}$  inj.  $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ .

## 12.9 Satz: e-Funktion schlägt alles tot

Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\lambda > 0$  ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \cdot e^{-\lambda x} = 0$

Beweis:

Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Für  $x \geq 1$  ist  $|x^\alpha| \leq x^{|\alpha|}$ .

Es ex. ein  $j_0 \in \mathbb{N}$  mit  $j_0 \geq |\alpha| + 1$ .

Für  $x \geq 1$  ist  $\left|\frac{x^\alpha}{e^x}\right| \leq \frac{x^{|\alpha|}}{1 + \lambda x + \frac{\lambda^2}{2!}x^2 + \dots + \frac{\lambda^{j_0}}{j_0!}x^{j_0} + \dots} \leq \frac{x^{|\alpha|}}{\frac{\lambda^{j_0}}{j_0!}x^{j_0}} \leq \frac{j_0!}{\lambda^{j_0}} \cdot \frac{x^{|\alpha|}}{x^{|\alpha|+1}} =$   
 $\frac{j_0!}{j_0} \cdot \frac{1}{x} \xrightarrow{x \mapsto \infty} 0$

## 12.10 Folgerung: Potenzwachstum stärker als logarithmisches

Für  $\alpha > 0$  ist:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} \rightarrow 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \cdot \log(x) \rightarrow 0$

## 12.11 Definition: Allgemeine Exp-Funktionen, allgemeiner Logarithmus

Für  $a > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  ist  $a^x = \exp(\log(a^x))$ .

Man setzt  $\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$ . Dann  $a^{\log_a(x)} = x$ .

Speziell:  $\log_{10}$ : Zehner-Logarithmus/dekadischer Logarithmus

## 12.12 Bemerkung

Für  $|x| < 1$  ist  $\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$

## 13 Taylorsche Satz

Sei  $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  in einer Kreisscheibe um  $z_0$ . (Dann:  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{f^{(n)}n!}$ )

Das k-te Taylorpolynom bei  $z_0$  ist def. durch  $(T_{z_0}^k f)(z) := \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)^n$ .

$T_{z_0}^k f \rightarrow f$  sogar glm. auf jedem Kreis um  $z_0$ .

Taylorsche Satz beschreibt den Approximationsfehler und zwar auch für  $f$ , die nicht unbedingt durch Potenzreihe gegeben sind.

### 13.1 Bemerkung

$$\frac{d}{dt} \left( (T_t^k f)(z) \right) = \frac{f^{(k+1)}(t) \cdot (z-t)^k}{k!}, \text{ falls } f^{(k+1)}(t) \text{ ex.}$$

### 13.2 Satz: Taylor

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  off. Intervall,  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k+1$ ) mal diffbar.

Dann ex. für  $x_0, x \in I, x \neq x_0$  ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$ , so dass gilt:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{=(T_{x_0}^k f)(x)} + \underbrace{\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}}_{\text{Lagrange-Restglied}}$$

Beweis:

$$\text{Es ex. genau ein } \varrho \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) - (T_t^k f)(x) = \frac{\varrho(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

$$\text{z.z. } \exists \xi \text{ zw. } x_0, x : \varrho = f^{(k+1)}(\xi).$$

Für  $g : I \rightarrow \mathbb{R}, g(t) := f(x) - (T_t^k f)(x) - \frac{\varrho(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$  gilt:  $g(x_0) = 0$  (Wahl von  $\varrho$ )

$$\Rightarrow g(x) = f(x) - (T_t^k f)(x) = 0.$$

Nach Rolle ex.  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$ :  $0 = g'(\xi) = -\frac{f^{(k+1)}(\xi)(x-\xi)^k}{k!} - \frac{\varrho}{(k+1)!} \cdot (k+1)(x-\xi)^k \cdot (-1)$

$$\text{Also } 0 = -f^{(k+1)}(\xi)(x-\xi)^k - \varrho(x-\xi)^k, \varrho = f^{(k+1)}(\xi).$$

Bemerkung:

Falls  $f$  beliebig oft diffbar, kann es sein, dass:

Schlecht:

1) die Taylorreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$  nur für  $z = z_0$  konvergiert.

2) die Taylorreihe in einem Kreis um  $z_0$  konvergiert, aber nicht glm. gegen  $f(z)$ .

Gut:

3) die Taylorreihe in einem Kreis um  $z_0$  gegen  $f$  konvergiert.

Welcher Fall eintritt hängt davon ab, wo die Taylorreihe konvergiert bzw. wo das Restglied gegen 0 geht (für  $k \rightarrow \infty$ ).

Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}, f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

(Idee: Für Polynomfunktion  $p$  von  $\lim_{x \rightarrow 0} p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ )

$$\forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}_0 \forall x \in \mathbb{R} : (T_0^k f)(x) = 0$$

$$\text{Ähnlich } g(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

**13.3 Anwendung: Abschätzung von  $\cos(z)$**

$$\cos(x) = \underbrace{\cos(0)}_1 + \underbrace{\cos'(0)}_0 x + \underbrace{\frac{\cos''(0)}{2!}}_{-\frac{1}{2}} x^2 + \underbrace{\frac{\cos'''(0)}{3!}}_0 x^3 + \underbrace{\frac{\cos^{(4)}(\xi)}{4!}}_{|\dots| \leq \frac{1}{4!}} x^4$$

$$\cos(2) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + R, |R| \leq \frac{1}{4!} \cdot 2^4 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos(2). \text{ Also } \cos(2) < 0.$$

**14 Weitere elementare Funktionen**

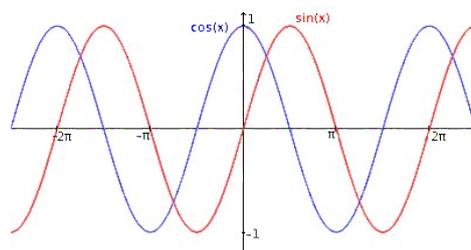
**14.1 Satz & Definition:  $\pi$**

Es ist  $\cos(0) = 1, \cos(z) < 0, \cos$  hat in  $[0, 2]$  eine kleinste NS  $\xi$  und  $\xi > 0$ . Man definiert  $\pi = 2\xi$ , also  $\xi = \frac{\pi}{2}$ .

**14.2 Folgerung: Symmetrien von  $\sin$  bzw.  $\cos$**

Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

- a)  $\cos(-x) = \cos(x), \sin(-x) = -\sin(x)$
- b)  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x), \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
- c)  $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x), \sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$
- d)  $\cos(x \pm 2\pi) = \cos(x), \sin(x \pm 2\pi) = \sin(x)$
- e)  $\sin'(x) > 0$  auf  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \sin'(x) < 0$  auf  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$



Beweis:

a) aus Reihenentwicklung.

e) 1. Teil:  $\sin'(x) = \cos(x) > 0$  auf  $(0, \frac{\pi}{2})$  nach Def. von  $\pi$ . Auch auf  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  wegen Symmetrie!

b)  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(-x) - \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2}) \sin(-x)}_{\substack{\cos^2 + \sin^2 = 1 \\ \sin \text{ steigend} \\ \text{auf } [0, \frac{\pi}{2}]}} = \sin(x), \text{ Rest}$

leicht.

c), d) leicht.

e) 2. Teil:  $\sin'(x) = \cos(x) = -\cos(\underbrace{x - \pi}_{\substack{\in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ < 0}})$  für  $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

**14.3 Definition**

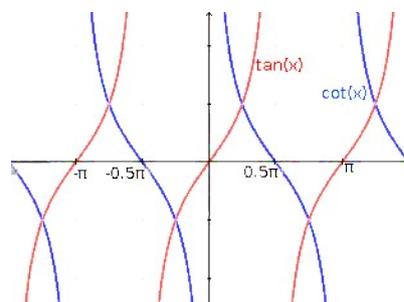
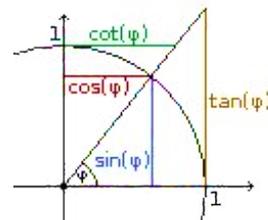
Für  $z \in \mathbb{Z}, \cos(z) \neq 0 : \tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ .

Falls  $\sin(z) \neq 0 : \cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$

Reelle Versionen:  $\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \tan :$

$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R},$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \cot'(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$$



## 14.4 Satz/Definition: Inverse trigonometrische Funktionen

$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ ,  $\cos|_{[0, \pi]}$ ,  $\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$  sind streng monoton und haben Umkehrfunktionen, die mit

$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ ,  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  bezeichnet werden können.

Für  $x \in (-1, 1)$  (für  $\arcsin/\arccos$ ) bzw. für  $x \in \mathbb{R}$  (für  $\arctan$ ) gilt:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Beweis:

Monotonie klar. Ableitung:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{\cos^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Weitere Funktionen:

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$$

$$\sinh^2(z) - \cosh^2(z) = 1$$

## 15 Integration

### 15.1 Definition

Zerlegung:  $\mathcal{Z} = (t_0, \dots, t_k)$  von  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$

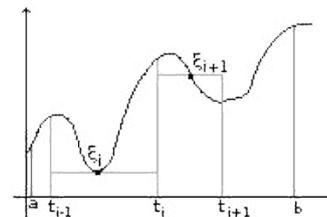
Hierzu Zwischenvektor (ZV):  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ ,  $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Feinheit für  $\mathcal{Z} : \Delta(\mathcal{Z}) := \max(t_i - t_{i-1}), i = 1, \dots, k$

Für  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ : Riemannsche Summen  $S(\mathcal{Z}, \xi, f) := \sum_{i=1}^k f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$

Zerlegungsnullfolgen (ZNF): Folge  $(\mathcal{Z}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ , dazu passende Zwischenvektorfolge (ZVF)  $(\xi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$\forall n \in \mathbb{N} : \xi^n$  ZV zu  $\mathcal{Z}^{(n)}$



### 15.2 Satz & Definition

a) Für  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$  gilt: Für jede ZNF  $(\mathcal{Z}^{(n)})$  und jede passende ZVF gilt:

Die Riemannschen Summen  $S(\mathcal{Z}^{(n)}, \xi^{(n)}, f)$  konvergieren für  $n \rightarrow \infty$  und zwar immer gegen denselben Grenzwert, der mit  $\int_a^b f(x)dx$  (auch  $\int_{[a,b]} f$  oder  $\int_a^b f(n)dn$  etc.) bezeichnet wird.

b) Eine beschr. Fu  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (in Zeichen:  $f \in B([a, b], \mathbb{R})$ )  $\Leftrightarrow$  Aussage von a) gilt für  $f$  (in Zeichen:  $f \in R([a, b], \mathbb{R})$ )

Beweis a):

Idee: Betrachte zunächst Zerlegung in  $\mathcal{Z} = (t_0, \dots, t_k)$ ,  $\tilde{\mathcal{Z}} = (\tilde{t}_0, \dots, \tilde{t}_k)$  und zugehörige ZV  $\xi, \tilde{\xi}$  derart, dass  $\{t_0, \dots, t_k\} \subset \{\tilde{t}_0, \dots, \tilde{t}_k\}$  ( $\tilde{\mathcal{Z}}$  Verfeinerung von  $\mathcal{Z}$ )

In jedem Intervall  $t_{i-1}, t_i : f(\xi) \cdot (t_i - t_{i-1}) = \sum_{\substack{j, [t_{j-1}, t_j] \\ \subset [t_{i-1}, t_i]}} f(\xi_j) (\tilde{t}_j - \tilde{t}_{j-1})$  (Beitrag zu  $S(\mathcal{Z}, \xi, f)$ )

Beitrag zu  $S(\tilde{\mathcal{Z}}, \tilde{\xi}, f) : \sum_{\substack{j, [t_{j-1}, t_j] \\ \subset [t_{i-1}, t_i]}} f(\tilde{\xi}_j) (\tilde{t}_j - \tilde{t}_{j-1})$

Um beide zu vergleichen, wähle Feinheit  $\Delta(\mathcal{Z}) < \delta$ , wobei zu  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  so, dass  $\forall t, s \in [a, b], |t - s| < \delta : |f(t) - f(s)| < \varepsilon$  (f glm. st)

Ergibt:  $|S(\mathcal{Z}, \xi, f) - s(\tilde{\mathcal{Z}}, \tilde{\xi}, f)| \leq \varepsilon \sum_j \tilde{t}_j - \tilde{t}_{j-1} = \varepsilon b \cdot a$

Weiter: Für bel. Zerlegungen  $\mathcal{Z}, \tilde{\mathcal{Z}}$ : Gemeinsame Verfeinerung  $\hat{\mathcal{Z}}$ , dazu ZV  $\hat{\xi}, S(\mathcal{Z}, \dots) \xrightarrow{\varepsilon} S(\tilde{\mathcal{Z}}, \dots) \xrightarrow{\varepsilon/2} S(\hat{\mathcal{Z}}, \dots) \xrightarrow{\varepsilon/2} S(\mathcal{Z}, \dots)$

Schließlich: Falls  $(\mathcal{Z}_1^{(n)})$  und  $(\mathcal{Z}_2^{(n)})$  ZNF,  $(\xi_1^{(n)})$  und  $(\xi_2^{(n)})$  passende ZVF,

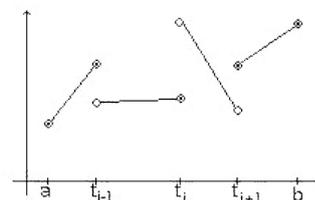
so def.  $\mathcal{Z}^{(n)} := \begin{cases} \mathcal{Z}_1^{(n)} & n \text{ gerade} \\ \mathcal{Z}_2^{(n)} & n \text{ ungerade} \end{cases}$

Entspr. ZVen  $\xi_n^{(n)}$  (Folgenmischung). Dann auf  $(S(\hat{\mathcal{Z}}^{(n)}, \hat{\xi}^{(n)}, f)$  konv.

Es folgt  $\lim S(\mathcal{Z}_1^{(n)}, \dots) = \lim S(\mathcal{Z}_2^{(n)}, \dots)$

### 15.3 Bemerkung

- a) Falls  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig, d.h. Es ex. Zuerlegung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  von  $[a, b]$  so dass  $f|_{(t_{i-1}, t_i)}$  stetig und  $\lim_{\substack{t \rightarrow t_{i-1} \\ t > t_{i-1}}} f(t)$  und  $\lim_{\substack{t \rightarrow t_{i-1} \\ t < t_{i-1}}} f(t)$  ex.,  $i = 1, \dots, k$ .



Dann  $f \in R([a, b], \mathbb{R})$  und  $\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) dt$  (gemeint:  $\int_{t_{i-1}}^{t_i} \tilde{f}_i(t) dt$ ,  $\tilde{f}_i$  st. Forts.

von  $f|_{(t_{i-1}, t_i)}$  in die Randpunkte

- b) Für Komplexwertige Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f = u + iv$ ;  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  def. man:

$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx$ , falls diese Integrale ex.

- c) Uneigentliche Integrale, z.B.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(x) dx$ , falls diese Inte-

grale und die limites ex.

entspr.  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  oder  $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$

Weiter: Falls z.B. f auf  $(0, 1]$  def., so  $\int_0^1 f(x) dx := \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 f(x) dx$ , falls diese Integrale und der limes ex.

Beispiel:

Für  $\delta > 0$  ex.  $\int_{\delta}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$  ( $= 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\delta}$ ), Also hat limes 2 für  $\delta \rightarrow 0$ , also

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$ .

## 15.4 Eigenschaften des Integrals

- a)  $\int f + \lambda g = \int f + \lambda \int g$  (Linearität)  
 b)  $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$  (Monotonie)  
 c)  $|\int f| \leq \int |f|$  (Dreiecksungleichung)  
 d)  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$  (falls  $c \in [a, b]$ , auch für bel.  $c$ , wenn man im Fall  $\int_a^c f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx$  setzt)

(Alles, falls Integrale ex.)

a), c), d) auch für komplexwertige Funktionen.

Beweis:

Idee: Riemannsche Summen, Grenzübergang.

## 15.5 Definition

Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  Intervall),  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Stammfunktion zu  $f$ , falls  $F'$  ex. und  $F' = f$ .

Bemerkung:

Wenn  $F, G$  Stammfu'n zu  $f$  auf  $I$ ,

so ex. Konstante  $c$  mit  $G(x) = F(x) + c \forall x \in I$

Beweis:

$(F - G)' = f - f = 0$  auf  $I$ . Mit Mittelwertsatz folgt:  $F - G$  konstant.

## 15.6 Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung (HDI)

Sei  $f$  aus  $C^0([a, b], \mathbb{R})$  und  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) := \int_0^x f(t)dt$ .

Dann ist  $F$  Stammfunktion zu  $f$  und für jede Stammf.  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zu  $f$  gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \text{ (Schreibweise } [G(x)]_a^b \text{)}$$

Beweis:

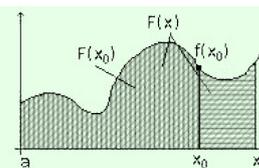
Sei  $x_0 \in [a, b]$  und  $\varepsilon > 0$  ( $|F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)| < \varepsilon|x - x_0|$ )

Da  $f$  stetig bei  $x_0$  ex.  $\delta > 0$  mit  $\forall x \in [a, b]$ ,  $|x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Für solche  $x$  ist  $|F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)| = |\int_0^x f(t)dt - \int_0^{x_0} f(t)dt - f(x_0)(x - x_0)| = |\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^x f(x_0)dt| = |\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))dt| \leq \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt \leq \int_{x_0}^x \varepsilon dt = \varepsilon|x - x_0|$ .

Also:  $F'(x_0) \text{ ex.} = f(x_0)$ . Weiter:  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0} = G(b) - G(a)$  (Für jede

andere Stammfunktion)



Physikalischer „Beweis“:

$$dF = f(x_0)dx + \Delta \text{ (ignoriert)} \Rightarrow \frac{dF}{dx} = f(x_0).$$

Genauer:  $\Delta F = \Delta x \cdot f(x_0) + \Delta$  (Klein gegenüber  $\Delta x$  im Sinne von

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0) + \underbrace{\frac{\Delta}{\Delta x}}_{\Delta x \rightarrow 0}$$

## 15.7 Weitere Integrationsregeln

a) Sei  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ ,  $g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$  und  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Stammfunktion zu  $f$ .

Dann  $\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$  (Partielle Integration)

b) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  st. diffbar.

Dann ist  $\int_c^d f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)dx$  (Substitution)

Formal:  $x = \varphi(u)$ ,  $dx = \varphi'(u)du$

Beweis:

a)  $(Fg)' = fg + Fg'$ , Integration über  $[a, b]$  ergibt  $[Fg]_a^b = \int_a^b fg + \int_a^b Fg'$

Daraus folgt Behauptung.

b)  $(F \circ \varphi)'(u) = f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$  ( $u \in [c, d]$ ).

Integration über  $[c, d]$ :  $[F \circ \varphi]_c^d = \int_c^d f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)du$

$[F \circ \varphi]_c^d = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = [F]_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)dx$

Bemerkung:

Falls  $u, v$  in  $C^1([a, b], \mathbb{R})$  und  $[u \cdot v]_a^b = 0$  (z.B. falls  $u(a) = u(b) = 0$ ), so ist

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \underbrace{[u(x)v(x)]_a^b}_0 - \int_a^b u(x)v'(x)dx,$$

$$\text{also } \int_a^b u'(x)v(x)dx = - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

(Überwälzen der Differentiation gibt Minuszeichen)

## 15.8 Satz: Vertauschung Integral und limes

Sei  $f_n \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ ,  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ ,  $f_n \rightarrow f$  glm auf  $[a, b]$ , dann  $\int_a^b f_n(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx$

Dann nach Weierstraß  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ .

Beweis:

zu  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Für  $n \geq N : |\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}} dx \leq \varepsilon$

## 15.9 Folgerung

$f_n \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ ,  $f_n \rightarrow f$  glm auf  $[a, b]$ . Weiter  $f'_n$  konv. glm auf  $[a, b]$  gegen  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (Dann  $\varphi$  stetig nach Weierstraß).

Dann auch  $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ ,  $f' = \varphi$  ( $= \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ )

Beweis:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)dt \Rightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)dt \quad (15.8)$$

mit HDI:  $f$  diffbar,  $f'(x) = \varphi(x)$