JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Lehrstuhl für Numerische Mathematik
Prof. Dr. E. Berdysheva
Dipl.-Phys. Daniel Schäfer

Numerik II im Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Gegeben ist die 2-Schrittmethode

$$y_{k+2} = -9y_{k+1} + 10y_k + \frac{h}{2}\left[13f(x_{k+1}, y_{k+1}) + 9f(x_k, y_k)\right].$$

(a) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens.

(b) Zeigen Sie, dass die Methode nicht konvergiert.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Betrachten Sie das Verfahren

$$y_{k+2} - \frac{3}{2}y_{k+1} + \frac{1}{2}y_k = h\left(f_{k+1} - \frac{1}{2}f_k\right).$$

Lösen Sie mit Hilfe dieses Verfahrens das AWP

(a) $y' = 1, \quad y(0) = 1$

(b) $y' = 2x, \quad y(0) = 1$

Benutzen Sie für die Startwerte y_0 und y_1 die Werte der exakten Lösung. Leiten Sie jeweils eine Formel für y_k her. Vergleichen Sie die Ergebnisse jeweils mit den exakten Lösungen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Gegeben sei die Differenzengleichung

$$a_{n+4} - 3a_{n+3} - 6a_{n+2} + 28a_{n+1} - 24a_n = 0$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des AWP mit

$$a_1 = -3, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 57, \quad a_4 = 181.$$

Abgabe: Dienstag, 28.05.2013, bis 12:15 Uhr in/vor Raum 149 HRZ oder in der Vorlesung.

1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 5 5.6.12

1.1 Aufgabe 1

Siehe Ich.

1.2 Aufgabe 2

a) Mit AW $y' \equiv 1$ und $y(0) = 1$ hat das Verfahren

$$y_{k+2} - \frac{3}{2}y_{k+1} + \frac{1}{2}y_k + h$$

die exakte Lösung $y(x) = 1 + x$. Das charakt. Polynom

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0 \text{ hat das NS } \lambda_1 = 1\ , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Ansatz f. homog. Lösung:

$$y_k^{(h)} = A + B(\tfrac{1}{2})^k$$

Mit $f_k = 1$ und $f_{k+1} = 1$ ergibt sich

$$y_{k+2} - \frac{3}{2}y_{k+1} + \frac{1}{2}y_k = \frac{1}{2}h$$

Ansatz für die part. Lösung:

$$y_k^{(p)} = ck$$

Folgt:

$$c(k+2) - \frac{3}{2}c(k+1) + \frac{1}{2}ck = \frac{1}{2}h \ \Rightarrow\ c = h$$

Gesamtlösung:

$$y_k = y_k^{(h)} + y_k^{(p)} = A + B(\tfrac{1}{2})^k + hk$$

Mit AW $y_0 = 0\ ,\ y_1 = 1 + h$ folgt $A = 1\ ,\ B = 0$

$$\Rightarrow y_k = 1 + kh$$

Mit $y_k = kh$ folgt $y_k = 1 + y_k \ \Rightarrow$ exakte Lösung

b) Mit AW $y'(x) = 2x\ ,\ \ y(0) = 1$ hat das Verfahren

$$y_{k+2} - \frac{3}{2}y_{k+1} + \frac{1}{2}y_k = h(f_{k+1} - \frac{1}{2}f_k)$$

hat exakte Lösung $y(x) = 1 + x^2$

Mit $f_k = 2x_k = 2kh$ und $f_{k+1} = 2x_{k+1} = 2(k+1)h$ gilt:

$$h(f_{k+1} - \frac{1}{2}f_k) = h(2(k+1)h - kh) = h^2(k+2)$$

Die Methode:

$$y_{k+2} - \frac{3}{2}y_{k+1} + \frac{1}{2}y_k = h^2(k+2)$$

hat charak. Polynom wie in (a).

Lösung der homog. Lösung:

wie (a): $y_k^{(h)} = A + B(\tfrac{1}{2})^k$

Ansatz f.d. part. Lösung: $y_k^{(p)} = Ck^2 + Dk$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} h^2(k+2) &= C(k+2)^2 + DC(k+1) - \tfrac{3}{2}c(k+1)^2 - \tfrac{3}{2}D(k+1) + \tfrac{1}{2}Ck^2 + \tfrac{1}{2}Dk \\ &= k^2(C - \tfrac{3}{2}C + \tfrac{1}{2}C) + k(4C + D - 3C - \tfrac{3}{2}D + \tfrac{1}{2}D) + (4C + 2D - \tfrac{3}{2}C - \tfrac{3}{2}D) \end{aligned}$$

$= kC + (\frac{5}{2}C + \frac{1}{2}D) \quad \Rightarrow C = h^2$ (Koeffizientenvergl)

$\frac{5}{2}C + \frac{1}{2}D = 2h^2$

$\Rightarrow 5C + D = 4h^2 \quad \Rightarrow \quad D = 4h^2 - 5C = 4h^2 - 5h^2 = -h^2 = D$

Dann folgt d.f. part. Lösung:

$$y_k^{(p)} = hk^2 - h^2k = h^2k(k-1)$$

womit f.d. Gesamtlösung folgt

$$y_k = y_k^{(h)} + y_k^{(p)} = A + B(\tfrac{1}{2})^k + h^2k(k-1)$$

Mit AW $y_0 = 1$ und $y_1 01 + h^2$ folgt:

$$y_0 = A + B = 1$$

$$y_1 = A + \tfrac{1}{2}B = 1 + h^2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ +1 + h^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = 2h^2 + 1 \ , \quad B = -2h^2$

$\Rightarrow y_k = (1 + 2h^2) - 2h^2(\frac{1}{2})^k + h^2k(k-1)$

Mit $x_k = kh$ folgt:

$$y_k = 1 + 2h^2 - 2h^2(\tfrac{1}{2})^{x/h} + x^2 + hx = 1 + x^2 + O(h)$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} 1 + x^2$$

1.3 Aufgabe 3

Siehe auch Ich.