JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Lehrstuhl für Numerische Mathematik
Prof. Dr. E. Berdysheva
Dipl.-Phys. Daniel Schäfer

Numerik II im Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Leiten Sie eine Abschätzung des lokalen Fehlers des 2-Schritt-Adams-Moulton-Verfahrens

$$y_{k+2} = y_{k+1} + h\left(\frac{5}{12}f_{k+2} + \frac{2}{3}f_{k+1} - \frac{1}{12}f_k\right)$$

nach der Methode von Milne her. Zur Überwachung benutzen Sie das 3-Schritt-Adams-Bashforth-Verfahren

$$y_{k+3} = y_{k+2} + h\left(\frac{23}{12}f_{k+2} - \frac{4}{3}f_{k+1} + \frac{5}{12}f_k\right).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Berechnen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y' = (1-2t)y,\ y(1) = 2, \qquad 1 \le t$$

mit Hilfe der Methode nach Milne. Benutzen Sie dazu die Trapezregel und als überwachendes Verfahren die 2-Schritt Adams-Bashforth-Methode. Den Wert y_1 berechnen Sie dabei ohne Überwachen und einer Startschrittweite von $h_0 = 0.1$. Verdoppeln Sie die Schrittweite, falls der Fehler kleiner $6 \cdot 10^{-4}$ ist und halbieren Sie die Schrittweite, falls der Fehler größer $4 \cdot 10^{-3}$ ist. Berechnen Sie insgesamt 6 Schritte mit Überwachen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Stellen Sie mit dem 2-Schritt-Adams-Bashforth- und dem 3-Schritt-Adams-Moulton-Verfahren ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren auf. Berechnen Sie mit diesem Verfahren eine Näherungslösung des AWP

$$y' = 2ty^2e^{-t^2}, \quad y(0) = 1$$

auf dem Intervall $t \in [0, 0.3]$. Den Startwert y_1 berechnen Sie bitte nach dem verbesserten Polygonzugverfahren:

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= f(x_k, y_k) \\
\kappa_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\kappa_1\right) \\
y_{k+1} &= y_k + h\kappa_2.
\end{aligned}$$

Führen Sie in jedem Schritt 3 Fixpunktiterationen durch. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung $y(t) = e^{t^2}$.

Abgabe: Dienstag, 04.06.2013, bis 12:15 Uhr in/vor Raum 149 HRZ oder in der Vorlesung.

1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 6 12.6.12

1.1 Aufgabe 1

$y(x_{k+2}) = y_{k+1} + hy'(x_{k+1}) + \frac{h^2}{2}y''(x_{k+1}) + \frac{h^3}{6}y'''(x_{k+1}) + \frac{h^4}{24}y''''(x_{k+1}) + O(h^5)$
$y_{k+2} = y_{k+1} + h(-\frac{1}{12}f_k + \frac{2}{3}f_{k+1} + \frac{5}{12}f_{k+2})$
$= y_{k+1} + h\left(-\frac{1}{12}y'(x_k) + \frac{8}{12}y'(x_{k+1}) + \frac{5}{12}y'(x_{k+2})\right)$
$= y_{k+1} + h\left(-\frac{1}{12}(y'(x_k) - hy'(x_{k+1}) + \frac{h^2}{2}y''(x_{k+2}) + \frac{h^3}{6}y''''(x_{k+1}) + O(h^4)\right) +$
$h\left(\frac{8}{12}y'(x_{k+1}) + \frac{5}{12}(y'(x_{k+1}) + hy''(x_{k+1}) + \frac{h^2}{2}y'''(x_{k+1}) + \frac{h^3}{6}y''''(x_{k+1}) + O(h^4))\right)$
$= y_{k+1} + h(y'(x_{k+1})(-\frac{1}{12} + \frac{8}{12} + \frac{5}{12} + hy''(x_{k+1})(\frac{1}{12} + \frac{5}{12})) + h(\frac{h^2}{2}y'''(x_{k+1})(-\frac{1}{12} +$
$\frac{5}{12}) + \frac{h^3}{6}y''''(x_{k+1})(\frac{1}{12} + \frac{5}{12}) + O(h^5))$
$= y_{k+1} + hy'(x_{k+1}) + \frac{h^2}{2}y''(x_{k+1}) + \frac{h^3}{6}y'''(x_{k+1}) + \frac{1}{12}h^4y''''(x_{k+1}) + O(h^5)$

$y_{k+2} - y(x_{k+2}) = (\frac{1}{12} - \frac{1}{24})h^4y''''(x_{k+1}) + O(h^5) = \frac{1}{24}h^4y''''(x_{k+1}) + O(h^5)$
$\Rightarrow C = \frac{1}{24}$

$z_{k+2} = z_{k+1}(\frac{5}{12}f_{k-1} - \frac{4}{3}f_k + \frac{23}{12}f_{k+1})$
$= y_{k+1} + h(\frac{5}{12}y'(x_{k-1}) - \frac{4}{3}y'(x_k) + \frac{23}{12}y'(x_{k+1}))$
$= ...$
$= y_{k+1} + hy'(x_{k+1})(\frac{5}{12} - \frac{16}{12} + \frac{23}{12}) + h^2y''(x_{k+1})(-\frac{10}{12} + \frac{16}{12}) + h^3y'''(x_{k+1})(\frac{10}{12} - \frac{16}{12}) +$
$h^4y''''(x_{k+1})(-\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{3} + \frac{16}{12}\cdot\frac{1}{6}) + O(h^5)$
$= y_{k+1} + hy'(x_{k+1}) + \frac{h^2}{2}y''(x_{k+1}) + \frac{h^3}{6}y'''(x_{k+1}) - \frac{h^4}{3}y''''(x_{k+1}) + O(h^5)$

$z_{k+2} - y(x_{k+2}) = (-\frac{1}{3} - \frac{1}{24})h^4y''''(x_{k+1}) + O(h^5) = -\frac{3}{8}h^4y''''(x_{k+1}) + O(h^5)$
$\Rightarrow \tilde{C} = -\frac{3}{8}$

$\Rightarrow |\frac{c}{c-\tilde{c}}| = \frac{1}{10}$
$\Rightarrow |y_{k+2} - y(x_{k+2})| \approx \frac{1}{10}|y_{k+2} - z_{k+2}|$

1.2 Aufgabe 2

$y_0 = 1\ ,\quad t_0 = 0\ ,\quad h = 0.1\ ,\quad y_1 \approx 1.009975 = y_1^{(l)}$
$t_1 = 0.1\ ,\quad t_2 = 0.2\ ,\quad t_3 = 0.3$
$y_2^{(0)} = y_1^{(l)} + \frac{h}{2}(3f(t_1, y_1^{(c)}) - f(t_0, y_0^{(l)}))$
$\approx 1.009975 + 0.05\cdot(3\cdot 2\cdot 0.1\cdot 1.009975^2\cdot e^{-0.01} - 2\cdot 0\cdot 1\cdot e^{-0}) \approx 1.040272$
$\Rightarrow y_2^{(1)} = y_1^{(l)} + h(\frac{5}{12}\cdot 2\cdot t_2\cdot y_2^2\cdot e^{-t_2^2} + \frac{2}{3}\cdot 2\cdot t_1\cdot y_1^2\cdot e^{-t_1^2} - \frac{1}{12}\cdot t_0\cdot y_0^2\cdot e^{-t_0^2}) \approx 1.040769$
$y_2^{(2)} \approx 1.040786$
$y_2^{(3)} \approx 1.040786$
$y_3^{(0)} \approx 1.093133$
$y_3^{(1)} \approx 1.094159$
$y_3^{(2)} \approx 1.094210$
$y_3^{(3)} \approx 1.094213$